Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 51-53
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12011 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Locally θ Refinable Spaces

Xiaoxia Bian
Department of Fundamental Sciences, Yancheng Institute of Technology, Yancheng
Email: xiaoxiabian2011@yahoo.cn
Received: May 25th, 2011; revised: Jun. 20th, 2011; accepted: Jun. 24th, 2011.

Abstract: Three kinds of locally θ refinable spaces are defined. A sufficient condition on their equivalence is given and their properties are discussed respectively. Some good properties in θ refinable spaces are extended to locally θ refinable spaces. The theory of θ refinable space is expanded again, so covering theory is made more abundant.

Keywords: θ Refinable Spaces; Locally θ Refinable; Locally Compact Spaces

局部θ加细空间

卞小霞
盐城工学院基础部，盐城
Email: xiaoxiabian2011@yahoo.cn
收稿日期：2011 年 5 月 25 日；修回日期：2011 年 6 月 20 日；录用日期：2011 年 6 月 24 日

摘　要：在θ加细的基础上定义了三种局部θ加细性，给出了三者等价的充分条件，分别讨论了它们的一些性质，结果表明θ加细空间某些好的性质在相应的局部θ加细空间中仍成立，从而将θ加细空间的理论进行了推广，使覆盖性质理论更加丰富。

关键词：θ加细空间；局部θ加细；局部紧空间

1. 预备知识

定义 1[1,2]。称X是i型局部紧空间(i = 1,2,3)，是指它们满足下面的条件(i)：

(1) X中每一点都有一个紧邻域；

(2) X中每一点都有一个紧邻域基；

(3) X中每一点x的任意一个邻域U包含一个开邻域V，使得$\bar{V}\subset U$，且V是紧的。

定义 2。称X是i型局部θ加细空间(i = 1,2,3)，是指它们满足下面的条件i：

(1) X中每一点都有一个θ加细邻域；

(2) X中每一点都有一个θ加细邻域基；

(3) X中每一点x的任意一个邻域U包含一个开邻域V，使得$\bar{V}\subset U$，且$\bar{V}$是θ加细的。

由定义 2，显然θ加细空间必是 1-型局部θ加细空间，因为θ加细空间本身是它的任何一点的θ加细邻域。

在文献[3,4]中有以下一些结论：

结论 1：θ加细空间的每一个闭子集都是θ加细子集。

结论 2：连续的闭映射保持θ加细性。

结论 3：θ加细空间与紧空间的积是θ加细空间。

问题：在i型局部θ加细空间(i = 1,2,3)中，是否有上述类似结论？

本文就此问题进行了探讨，得到了以下的一些结果。

2. 主要结论及证明

定理 1

(1) 3 型局部θ加细空间$\Rightarrow$2 型局部θ加细空间$\Rightarrow$1 型局部θ加细空间；

(2) 若X是正则空间，则 3 型局部θ加细空间$\Leftrightarrow$2 型局部θ加细空间$\Leftrightarrow$2 型局部θ加细空间。

证明：(1)由定义 2，结论显然成立；

(2)由(1)，只需证 1 型局部θ加细空间$\Rightarrow$3 型局部θ加细空间。

设U是x的任意一个邻域,则存在x的开邻域V,使得$x\in V\subset U$，由X是1型局部θ加细空间知存在x的θ加细邻域 D，则$x\in V\bigcap D^{\circ}$，且$V\bigcap D^{\circ}$是开集，又 X 是正则空间，于是存在 x 的开邻域 W，使得$W\subset V\bigcap D^{\circ}\subset V\subset U$，由结论1，$\bar{W}$是$\theta$加细的，从而(3)成立。

定理 2 若X是i型局部θ加细空间($i=1,2,3$)，则其闭子空间也是相应的i型局部θ加细空间。

证明：1) 设X是1型局部θ加细空间，$F\subset X$，F为闭集，$\forall x\in F$，有$x\in X$，由X是1型局部θ加细空间知存在x在X中的θ加细邻域V,令$U=V\bigcap F$，则U是x在F中的邻域，且U是V的闭子集，由结论1知U是x在F中的θ加细邻域，从而F使1型局部θ加细空间。

2) 设X是2型局部θ加细空间，$F\subset X$，F为闭集，$\forall x\in F$，对x在F中的任一邻域U，存在x在X中的邻域V，使得 $U=V\bigcap F$，由X是2型局部θ加细空间，则存在θ加细邻域 W，使得$W\subset V$，记$W'=W\bigcap F$，则 $W'=W\bigcap F$，由结论1知W'是x在F中的θ加细邻域，从而F使2型局部θ加细空间。

3）设X是3型局部θ加细空间，$F\subset X$，F为闭集，$\forall x\in F$，对x在F中的任一邻域U，存在x在X中的邻域V，使得$U=V\bigcap F$，由X是3型局部θ加细空间，则存在x的开邻域W，使得$\bar{W}\subset V$，且$\bar{W}$是x在X中的θ加细邻域，令$W'=W\bigcap F$，则W'是x在F中的开邻域，$\bar{W}'=\overline{W\bigcap F}\subset\bar{W}\bigcap\bar{F}\subset V\bigcap F=U$，又$\bar{W}'\subset\bar{W}$，由结论1知$\bar{W}'$是$x$在$F$中的$\theta$加细邻域，从而$F$使3型局部$\theta$加细空间。

定理 3 几乎开的且闭的映射保持i型局部θ加细性($i=1,2,3$)。

证明：设$f:X\to Y$是几乎开的且闭的映射，

(1) 设$y\in Y$，由f是几乎开映射，知存在$x\in f^{-1}(y)$，使得对x的任一邻域U，$y\in Int\,f(U)$，又X是1型局部θ加细空间，则存在x的θ加细邻域D，于是$y\in Int\,f(D)$，由结论2知$f(D)$是θ加细的，即有$f(D)$为y的θ加细邻域，从而Y是1型局部θ加细空间。

(2) 设$y\in Y$，任取 y 的一个邻域 V，则$f^{-1}(y)\subset f^{-1}(V)$，由$f$连续知$f^{-1}(V)$是$x$的邻域，由$X$是2型局部$\theta$加细空间，$\forall x\in f^{-1}(y)$，存在$x$的$\theta$加细邻域$D_x$，$D_x\subset f^{-1}(V)$，又$f$是几乎开映射，则存在$x_0\in f^{-1}(y)$，使得$y\in Int\,f(D_{x_0})\subset f(D_{x_0})\subset V$，$f(D_{x_0})$即为满足条件的$\theta$加细邻域，故$Y$是2型局部$\theta$加细空间.

(3) 设$y\in Y$，任取 y 的一个邻域 V，则$f^{-1}(y)\subset f^{-1}(V)$，由$X$是3型局部$\theta$加细空间，知对任意的$x\in f^{-1}(y)$，存在 x 的开邻域D_x，使得$\overline{D_x}\subset f^{-1}(V)$，且$\overline{D_x}$是$\theta$加细的。由$f$是几乎开的闭映射，则存在$x_0\in f^{-1}(y)$，使得$y\in Int\,f(D_{x_0})\subset f(\overline{D_{x_0}})=\overline{f(D_{x_0})}\subset V$，$Int\,f(D_{x_0})$即为满足条件的$y$的开的$\theta$加细邻域,故$Y$是3型局部$\theta$加细空间。

注：文献[5]中对于θ加细空间所得的结论不能推广至局部θ加细空间。

定理 4 i型局部θ加细空间与i型局部紧空间的积是 I 型局部θ加细空间($i=1,2,3$)。

证：(1) 设X是1型局部θ加细空间，Y是1型局部紧空间，$\forall(x,y)\in X\times Y$，由条件可得，$x$在$X$中存在$\theta$加细邻域$U$，$y$在$Y$中存在紧邻域$V$，由结论3知$U\times V$是$(x,y)$在$X\times Y$中的$\theta$加细邻域，故$X\times Y$是1型局部$\theta$加细空间。

(2) 设X是2型局部θ加细空间,Y是2型局部紧空间，$\forall(x,y)\in X\times Y$，$U$是$(x,y)$的任一邻域，则$x$在$X$中存在邻域$V_X$，$y$在$Y$中存在邻域$V_y$，使得$V_X\times V_y\subset U$，由条件可得$x$在$X$中存在$\theta$加细邻域$W_X\subset V_x$，$y$在$Y$中存在紧邻域$W_y\subset V_y$，则$W_x\times W_y$是$(x,y)$在$X\times Y$中的邻域，且$W_x\times W_y\subset V_x\times V_y\subset U$，由结论3，$W_x\times W_y$是$\theta$加细的，故$X\times Y$是2型局部$\theta$加细空间。

(3) 设X是3型局部θ加细空间,Y是3型局部紧空间，$\forall(x,y)\in X\times Y$，$U$是$(x,y)$的任一邻域，则$x$在$X$中存在邻域$V_X$，$y$在$Y$中存在邻域$V_y$，使得$V_X\times V_y\subset U$，由条件得，$x$在$X$中存在开邻域$W_x$，使得$\overline{W_x}\subset V_x$，且$\overline{W_x}$是$\theta$加细的，$y$在$Y$中存在邻域$W_y$，使得$\overline{W_y}\subset V_y$，且$\overline{W_y}$是紧的，则$W_x\times W_y$是$(x,y)$在$X\times Y$中的邻域，且$\overline{W_x\times W_y}=\overline{W_x}\times\overline{W_y}\subset V_x\times V_y\subset U$，由结论3，$\overline{W_x\times W_y}$是$\theta$加细的，故$X\times Y$是3型局部$\theta$加细空间。

推论：i型局部θ加细空间与i型紧空间的积i型局部θ加细空间($i=1,2,3$)。

参考文献 (References)

[1] M. Eisenberg. Topology. New York: University of Massachusetts, 1974: 315-316.
[2] Engelking. General topology. Poland: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1975.
[3] 高国士. 拓扑空间论[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
[4] 朱培勇. 遗传次亚紧空间[J]. 数学进展, 1996, 42(4): 299-304.
[5] 葛英. 关于弱 θ 加细空间的闭 L 原象[J]. 数学研究与评论, 1994, 14(3): 426-428.