

# Soliton Resonance of the NI-mKP Equation

Miaoxian Wu<sup>1</sup>, Jiaojiao Yan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Information and Control Engineering Institute, Guangsha College of Applied Construction Technology, Dongyang

<sup>2</sup>Zhejiang Institute of Communications, Hangzhou

Email: wmx314@mail.guangshaxy.com; yanjj@zjvtit.edu.cn

Received Mar. 31st, 2011; revised Apr. 22nd, 2011; accepted Apr. 28th, 2011.

**Abstract:** Resonance is one of soliton interaction phenomenon, in this paper the soliton resonance of the NI-modified Kadomtsev-Petviashvili (mKP) equation will be studied by asymptotic analysis. At first, its 2-and 3-soliton solutions will be presented using Hirota bilinear method, then we will further study the resonance property of 2 and 3 soliton solutions through the detail image analysis and comparison.

**Keywords:** Resonance; Soliton Equation; Hirota Bilinear Method; Nonisosppectral mKP Equation

## 非等谱 mKP 方程的孤子共振解

吴妙仙<sup>1</sup>, 颜姣姣<sup>2</sup>

<sup>1</sup>浙江广厦建设职业技术学院, 东阳

<sup>2</sup>浙江交通职业技术学院, 杭州

Email: wmx314@mail.guangshaxy.com; yanjj@zjvtit.edu.cn

收稿日期: 2011 年 3 月 31 日; 修回日期: 2011 年 4 月 22 日; 录用日期: 2011 年 4 月 28 日

**摘 要:** 共振是孤子相互作用的一种现象, 本文利用渐进分析法研究了非等谱修正 Kadomtsev-Petviashvili(mKP)方程的共振解。首先使用 Hirota 双线性方法得出其 2 孤子和 3 孤子解, 然后通过详细的图像分析、比较, 研究了 2, 3 孤子的各种共振现象。

**关键词:** 共振; 孤子方程; Hirota 双线性方法; 非等谱 mKP 方程

### 1. 引言

孤立子理论是现代应用数学和数学物理的一个重要组成部分。最近二、三十年, 在一些新技术问题及相应的理论研究中, 例如流体力学、等离子体物理、非线性光学、经典场论、量子论、激光、超导、晶格、凝聚态物理等领域有着广泛的应用。

在孤子理论中, 求解孤子方程是古老而又非常重要的研究课题。孤子方程的解除了可以用数值计算和计算机模拟进行研究外, 主要是通过符号计算得到其显式的精确解。在前辈们的辛勤耕耘下, 目前已有不少行之有效的方法被提出, 如 Hirota 方法<sup>[1-3]</sup>、Wronskian 技巧<sup>[4-6]</sup>、Bäcklund 变换<sup>[7,8]</sup>、变量分离法<sup>[9]</sup>、

双曲函数法<sup>[10]</sup>、齐次平衡法<sup>[11]</sup>等等。

到目前为止, 已经有很多学者作了一些有关孤立子相互作用的文章。对于非线性结构的相互作用, 一般说来可以分为两类: 一类为完全弹性碰撞, 另一类为非弹性碰撞。当孤立子的相互作用是完全弹性碰撞时, 相互碰撞的孤立子相互作用后会保持原来性质和状态, 即相互碰撞的孤立子相互作用后保持原来的速度、形状, 并且在碰撞的过程中没有发生相位移动。相反, 对于非弹性相互作用而言, 在相互作用的过程中, 可能发生以下几种情况的激发态:

- (1) 部分或者全部改变他们的形状;
- (2) 改变他们的速度;

(3) 有或者没有改变;

(4) 有裂变现象, 比如一个孤立子裂变为几个有相同结构的孤立子;

(5) 有聚变现象, 比如几个结构相似的孤立子聚合成一个新的孤立子。

共振是相互作用的一种现象, 这种有趣的现象首先是由 Miles 发现的<sup>[12]</sup>。他指出, 这些解是一些想干结构, 并描述了一个孤子在转角处的衍射, 指出在某种条件下, 当没有发生分裂或者失去它原有的性质时, 一个 KP 孤子在凸的转角处, 无法反射。而这种解的结构, 正提供了水波中的“马赫衍射”问题的解。这种现象即为共振。关于共振, 前人已有很多的研究成果。许多知名的孤子方程已被发现存在多孤子解的非平凡空间结构和相互作用方式<sup>[13-19]</sup>。

而渐进分析方法是研究孤子共振行为的一种重要工具, 在这种分析方法中, 一般将线孤子在  $y \rightarrow -\infty$  和  $y \rightarrow +\infty$  的条件下的渐进分别成为进线孤子和出线孤子。而当共振现象发生时, 两者的相位、方向甚至个数都发生了改变。

## 2. (2+1)-维非等谱 mKP 方程的 2-孤子和 3-孤子解

(2+1)-维非等谱 mKP 方程:

$$\begin{aligned} 4u_t + y(u_{xxx} - 6u^2u_x + 6u_x\partial^{-1}u_y + 3\partial^{-1}u_{yy}) \\ + 2xu_y - u^2 + 3\partial^{-1}u_y = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

的 Wronskian 解和 Grammian 解已经分别由邓淑芳<sup>[20]</sup>和张翼教授<sup>[21]</sup>作了研究。

经过变换  $u = \left( \log \frac{g}{f} \right)_x$ , 可以得到方程(2.1)的双线性形式:

$$D_y g \cdot f - D_x^2 g \cdot f = 0 \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned} 4D_t g \cdot f + y(D_x^3 g \cdot f + 3D_x D_y g \cdot f) \\ + 2xD_y g \cdot f + g_x f + g f_x = 0 \end{aligned} \quad (2.2b)$$

如果将  $N$ -孤子解记为  $u_N \triangleq \left( \log \frac{g_N}{f_N} \right)_x$

$$g_N = \sum_{e=0,1} \exp \left[ \sum_{j=1}^N e_j (\theta_j + \log b_j) + \sum_{1 \leq j < l} e_j e_l A_{jl} \right] \quad (2.3)$$

$$f_N = \sum_{e=0,1} \exp \left[ \sum_{j=1}^N e_j (\theta_j + \log a_j) + \sum_{1 \leq j < l} e_j e_l A_{jl} \right]$$

其中和是指取遍  $e_j = 0, 1 (j=1, 2, \dots, N)$  的各种可能的组合, 则前三个孤子解为:

$$g_1 = 1 + a_1 e^{\theta_1}, f_1 = 1 + b_1 e^{\theta_1} \quad (2.4a)$$

$$\begin{aligned} g_2 = 1 + a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}} \\ f_2 = 1 + b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2} + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}} \end{aligned} \quad (2.4b)$$

$$\begin{aligned} g_3 = 1 + a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + a_3 e^{\theta_3} + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}} \\ + a_1 a_3 e^{\theta_1 + \theta_3 - \Delta_{13}} + a_2 a_3 e^{\theta_2 + \theta_3 - \Delta_{23}} \\ + a_1 a_2 a_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{12} - \Delta_{13} - \Delta_{23}} \end{aligned} \quad (2.4c)$$

$$\begin{aligned} f_3 = 1 + b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2} + b_3 e^{\theta_3} + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}} \\ + b_1 b_3 e^{\theta_1 + \theta_3 - \Delta_{13}} + b_2 b_3 e^{\theta_2 + \theta_3 - \Delta_{23}} \\ + b_1 b_2 b_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{12} - \Delta_{13} - \Delta_{23}} \end{aligned}$$

其中

$$A_{ij} \triangleq \frac{(k_i - k_j)(q_i - q_j)}{(k_i + q_j)(k_j + q_i)} (1 \leq i < j \leq 3),$$

$$\theta_i = (k_i + q_i)x - (k_i^2 - q_i^2)y + \delta_i$$

$e_i^\delta = \omega_i$ ,  $e^{-\Delta_{ij}} = A_{ij} > 0$ ,  $k_i, q_i, a_i, b_i$  和  $\omega_i$  均为  $t$  的函数, 它们之间服从如下射散关系:

$$k_{i,t} = \frac{1}{2} k_i^2, \quad q_{i,t} = -\frac{1}{2} q_i^2, \quad a_i = q_i, \quad b_i = -k_i,$$

$$\omega_{i,t} = \frac{1}{4} (q_i - k_i) \omega_i, \quad (i=1, 2, 3).$$

同时为了确保  $u$  的收敛, 假定  $f_i$  和  $g_i$  均取正值。令  $k_i + q_i = \mu_i$ ,  $k_i - q_i = \nu_i$ , 则  $\theta_i$  可以写成  $\theta_i = \mu_i(x - \nu_i y) + \delta_i$ , 并且不失一般性, 假定  $\nu_i > \nu_j (i > j)$ 。

### 3. 2-孤子共振

通常情况下, 满足如下两者情况时, 产生孤子解:

a) 在(2.4b)式的其中两项非常大, 使得另外两项在渐进状态下可以忽略不计;

b) 在满足 a)的前提下, 较大的两项同价。

这是作渐进分析的基础和实质。

#### 3.1. 普通 2-孤子

当  $0 < A_{12} < +\infty$  且  $\neq 1$  时,  $y \rightarrow -\infty$ ,  $\theta_1 > \theta_2$ , 条件 a) 和条件 b) 在下列两个域内可以满足:

$$\begin{cases} u^{(1)} = \left( \log \frac{1+a_1 e^{\theta_1}}{1+b_1 e^{\theta_1}} \right)_x, & \theta_1 \approx 0, \theta_2 \rightarrow -\infty \\ u^{(2)} = \left( \log \frac{a_1 e^{\theta_1} + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}}}{b_1 e^{\theta_1} + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}}} \right)_x, & \theta_1 \rightarrow +\infty, \theta_2 \approx \Delta_{12} \end{cases} \quad (3.1)$$

因此, 当  $y \rightarrow -\infty$ ,  $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ , 又因为

$$\left( \log \frac{a_1 e^{\theta_1} + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}}}{b_1 e^{\theta_1} + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}}} \right)_x = \left( \log \frac{1+a_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12}}}{1+b_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12}}} \right)_x \quad \text{接下来}$$

我们应用其简化形式。

类似地, 当  $y \rightarrow +\infty$ ,

$$u = \left( \log \frac{1+a_1 e^{\theta_1 - \Delta_{12}}}{1+b_1 e^{\theta_1 - \Delta_{12}}} \right)_x + \left( \log \frac{1+a_2 e^{\theta_2}}{1+b_2 e^{\theta_2}} \right)_x. \quad \text{综上, 普通}$$

2-孤子解有四个“手臂”。并且呈现普通的相互作用, 即两个孤子在碰撞之后, 保持原有的方向和相位不变 (见图 1)。

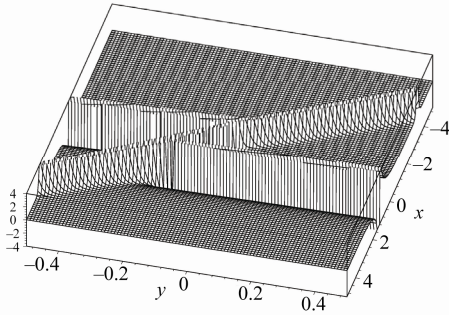


Figure 1. 3-D picture of 2-soliton solution  
图 1. 一般 2-孤子解的三维图

### 3.2. 2-孤子解的共振

当  $A_{12} \rightarrow +0$  或者  $A_{12} \rightarrow +\infty$ , 相位  $|\Delta_{12}| \rightarrow +\infty$ , 于是所谓的“孤子共振”现象出现, 在这个过程中, 散射关系起主要作用。更进一步而言, 因

$$\begin{cases} A_{12} \rightarrow +0 \Leftrightarrow (k_1 - k_2)(q_1 - q_2) \rightarrow +0 \\ A_{12} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow (k_1 + q_2)(k_2 + q_1) \rightarrow +0 \end{cases} \quad (3.2)$$

我们分别称其为“减共振”和“加共振”。

#### 3.2.1. 减共振

**情形 1.** 令  $A_{12} \rightarrow +0$ , (2.4b)式变为

$g_2 = 1 + a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2}$ ,  $f_2 = 1 + b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2}$ , 从中可以得到渐进式: (3.3)

此解有三个“手臂”, 每个均为标准 1-孤子。

**情形 2.** 将

$$g_2 \rightarrow A_{12}^{-1} g_2, \quad f_2 \rightarrow A_{12}^{-1} f_2, \quad e^{\theta_1} \rightarrow A_{12}^{-1} e^{\theta_1}, \quad e^{\theta_2} \rightarrow A_{12}^{-1} e^{\theta_2} \quad (3.4)$$

代入(1.4b)式, 得到

$$A_{12}^{-1} g_2 = 1 + a_1 A_{12}^{-1} e^{\theta_1} + a_2 A_{12}^{-1} e^{\theta_2} + a_1 a_2 A_{12}^{-1} e^{\theta_1 + \theta_2} \quad (3.5)$$

取极限  $A_{12} \rightarrow +0$ , (2.5)式变为

$$g_2 = a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2} \quad (3.6a)$$

类似的,

$$f_2 = b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2} + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2} \quad (3.6b)$$

以上的仅仅只是坐标变化。

相应的渐进形式为(3.7)

$$u = \begin{cases} u^{(1)} = \left( \log \frac{1+a_1 e^{\theta_1}}{1+b_1 e^{\theta_1}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty, \theta_1 \approx 0, \theta_2 \rightarrow -\infty \\ u^{(2)} = \left( \log \frac{1+a_2 e^{\theta_2}}{1+b_2 e^{\theta_2}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty, \theta_1 \rightarrow -\infty, \theta_2 \approx 0 \\ u^{(1-2)} = \left( \log \frac{a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2}}{b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty, \theta_1 \rightarrow +\infty, \theta_2 \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.3)$$

$$u = \begin{cases} u^{(2)} = \left( \log \frac{1+a_2 e^{\theta_2}}{1+b_2 e^{\theta_2}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty, \theta_1 \rightarrow +\infty, \theta_2 \approx \Delta_{12} \\ u^{(1)} = \left( \log \frac{1+a_1 e^{\theta_1}}{1+b_1 e^{\theta_1}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty, \theta_1 \approx \Delta_{12}, \theta_2 \rightarrow +\infty \\ u^{(1-2)} = \left( \log \frac{a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2}}{b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty, \theta_1 \rightarrow -\infty, \theta_2 \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.7)$$

仍然具有三个“手臂”。

$A_{12} \rightarrow +\infty$ ，得到

$$g_2 = 1 + a_2 e^{\theta_2} + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2}, \quad f_2 = 1 + b_2 e^{\theta_2} + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2} \quad (3.8)$$

### 3.2.2 加共振

情形 1. 将  $e^{\theta_1} \rightarrow A_{12}^{-1} e^{\theta_1}$  代入(2.4b)式，取极限

$$\begin{cases} u^{(1+2)} = \left( \log \frac{1 + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2}}{1 + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty, \theta_1 + \theta_2 \approx 0, \theta_2 \rightarrow -\infty, \\ u^{(1)} + u^{(2)} = \left( \log \frac{1 + a_1 e^{\theta_1}}{1 + b_1 e^{\theta_1}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_2 e^{\theta_2}}{1 + b_2 e^{\theta_2}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty, \theta_1 \approx 0, \theta_2 \rightarrow +\infty; \theta_1 \rightarrow -\infty, \theta_2 \approx 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

情形 2. 将  $e^{\theta_2} \rightarrow A_{12}^{-1} e^{\theta_2}$  代入(2.4b)式，取极限

$$g_2 = 1 + a_1 e^{\theta_1} + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2}, \quad f_2 = 1 + b_1 e^{\theta_1} + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2} \quad (3.10)$$

$A_{12} \rightarrow +\infty$ ，得到

$$\begin{cases} u^{(1)} + u^{(2)} = \left( \log \frac{1 + a_1 e^{\theta_1}}{1 + b_1 e^{\theta_1}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_2 e^{\theta_2}}{1 + b_2 e^{\theta_2}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty, \theta_1 \approx 0, \theta_2 \rightarrow -\infty; \theta_1 \rightarrow +\infty, \theta_2 \approx 0 \\ u^{(1+2)} = \left( \log \frac{1 + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2}}{1 + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty, \theta_1 \rightarrow -\infty, \theta_1 + \theta_2 \approx 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

以上用渐进分析法讨论了2-孤子解的两种形式的共振：加共振和减共振。从理论上证明了它们均具有三个“手臂”。这些也可以通过作图说明，从图 2 中可以观察到，两个高瘦波产生一个矮波。

在以上的讨论中，我们均假定  $v_1 > v_2$ ， $v_1 < v_2$  的情形可类似讨论，然而当  $v_1 = v_2$  时，情形就大相径庭。令  $x - v_1 y \triangleq Z$ ，

则

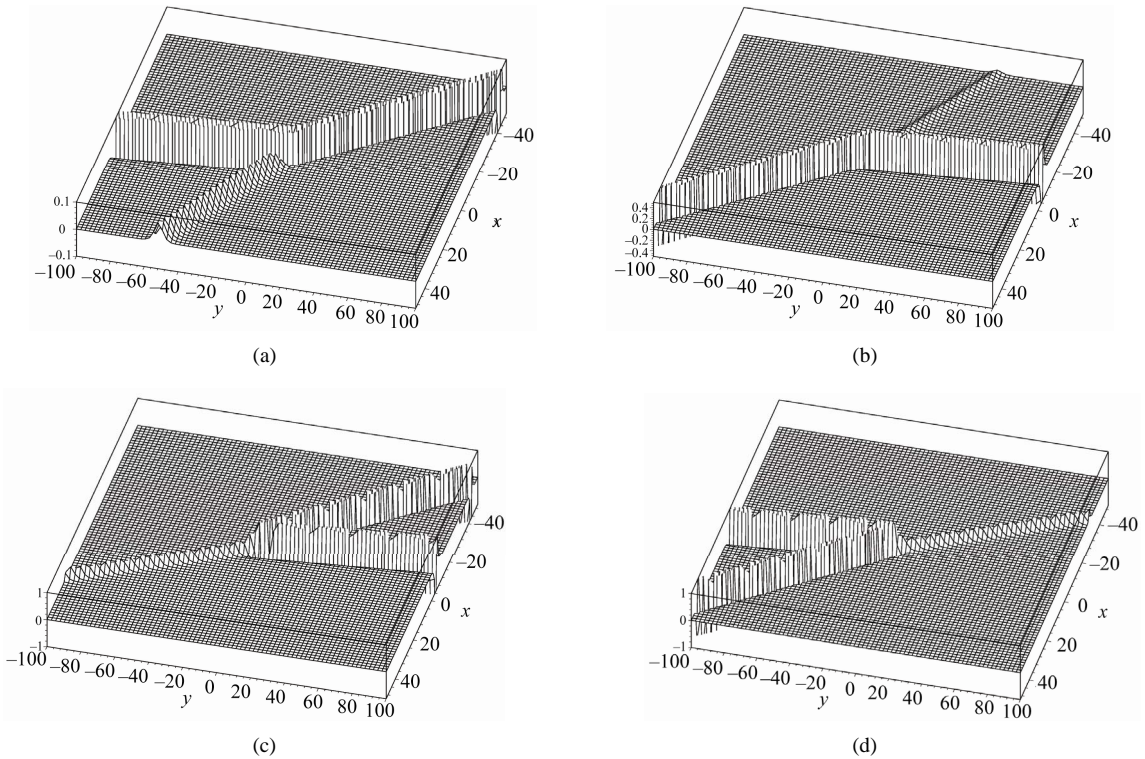


Figure 2. 3-D pictures of plus and minus resonance 2-soliton solutions. (a) Minus resonance case 1; (b) Minus resonance case 2; (c) Plus resonance case 1; (d) Plus resonance case 2

图 2. 2-孤子解的减共振和加共振三维图. (a) 减共振情形 1; (b) 减共振情形 2; (c) 加共振情形 1; (d) 加共振情形 2

$$\theta_1 = \mu_1 Z + \delta_1, \theta_2 = \mu_2 Z + \delta_2, A_{12} = (\mu_1 - \mu_2)^2 / (\mu_1 + \mu_2)^2 \quad (3.12)$$

两个孤子相互平行，这就和一般的 KdV 方程类似。

### 4.3-孤子共振

在本节中，我们将分析 3-孤子解的四种共振情形。

当  $0 < A_{12}, A_{13}, A_{23} < \infty$  和  $\neq 1$  时，取极限  $y \rightarrow -\infty, \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$ ，条件 a) 和 b) 在以下三个域内均可满足：

$$\begin{cases} u^{(1)} = \left( \log \frac{1+a_1 e^{\theta_1}}{1+b_1 e^{\theta_1}} \right)_x, \theta_1 \approx 0, \theta_2 \rightarrow -\infty, \theta_3 \rightarrow -\infty \\ u^{(2)} = \left( \log \frac{1+a_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12}}}{1+b_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12}}} \right)_x, \theta_1 \rightarrow +\infty, \theta_2 \approx \Delta_{12}, \theta_3 \rightarrow +\infty \\ u^{(3)} = \left( \log \frac{1+a_3 e^{\theta_3 - \Delta_{13} - \Delta_{23}}}{1+b_3 e^{\theta_3 - \Delta_{13} - \Delta_{23}}} \right)_x, \theta_1 \rightarrow +\infty, \theta_2 \rightarrow +\infty, \theta_3 \approx \Delta_{13} \end{cases} \quad (4.1)$$

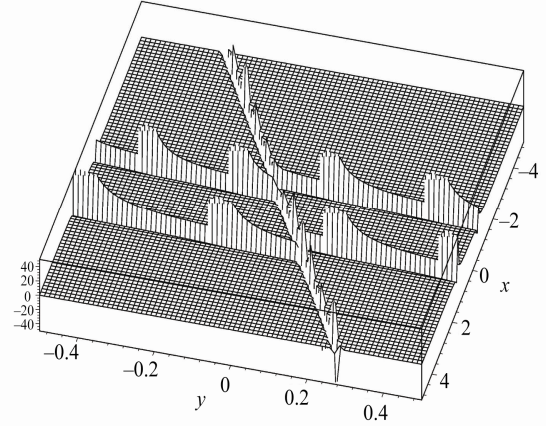
故当  $y \rightarrow -\infty$  时， $u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ 。

同理，当  $y \rightarrow +\infty$  时，

$$u = \left( \log \frac{1+a_1 e^{\theta_1 - \Delta_{13} - \Delta_{12}}}{1+b_1 e^{\theta_1 - \Delta_{13} - \Delta_{12}}} \right)_x + \left( \log \frac{1+a_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12}}}{1+b_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12}}} \right)_x + \left( \log \frac{1+a_3 e^{\theta_3}}{1+b_3 e^{\theta_3}} \right)_x \quad (4.2)$$

以上的分析从理论上证明了 3-孤子解有六个“手臂”，也可以用图 3 说明。

令集合  $\Omega = \{\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{23}\}$ ，当其中的一个或者两个甚至三个元素趋向于  $\pm\infty$ ，共振就发生了。我们相应地称其为 1-, 2-, 3-共振解，它们均包含减共振和加共振，接下来将作详细讨论。



Figur 3. 3-D picture of 3-soliton solution  
图 3. 普通 3-孤子解三维图

### 4.1. 1-共振

在这种情况下，集合  $\Omega$  中的一个元素趋向于  $\pm\infty$ 。不失一般性，假定  $\Delta_{13} \rightarrow \pm\infty$ ，等价于  $A_{13} \rightarrow +0$  (减 1-共振) 和  $A_{13} \rightarrow +\infty$  (加 1-共振)。

#### 4.1.1 减共振

取极限  $A_{13} \rightarrow +0$ ，(2.4c) 式变为

$$\begin{aligned} g_3 &= 1 + a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + a_3 e^{\theta_3} \\ &\quad + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}} + a_2 a_3 e^{\theta_2 + \theta_3 - \Delta_{23}} \\ f_2 &= 1 + b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2} + b_3 e^{\theta_3} \\ &\quad + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{12}} + b_2 b_3 e^{\theta_2 + \theta_3 - \Delta_{23}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

相应地，其渐进形式为(4.4)

因此减 2-孤子的 1-共振有五个“手臂”(见图 4(a))。

#### 4.1.2. 加共振

取极限  $A_{13} \rightarrow +\infty$ ，(2.4c) 式变为

$$\begin{aligned} g_3 &= a_1 a_3 e^{\theta_1 + \theta_3 - \Delta_{13}} + a_1 a_2 a_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{12} - \Delta_{13} - \Delta_{23}} \\ f_3 &= b_1 b_3 e^{\theta_1 + \theta_3 - \Delta_{13}} + b_1 b_2 b_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{12} - \Delta_{13} - \Delta_{23}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$u = \begin{cases} u^{(1)} + u^{(2)} = \left( \log \frac{1+a_1 e^{\theta_1}}{1+b_1 e^{\theta_1}} \right)_x + \left( \log \frac{1+a_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12}}}{1+b_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12}}} \right)_x, y \rightarrow -\infty \\ u^{(2)} + u^{(3)} = \left( \log \frac{1+a_2 e^{\theta_2 - \Delta_{23}}}{1+b_2 e^{\theta_2 - \Delta_{23}}} \right)_x + \left( \log \frac{1+a_3 e^{\theta_3}}{1+b_3 e^{\theta_3}} \right)_x, y \rightarrow +\infty \\ u^{(1-3)} = \left( \log \frac{a_1 e^{\theta_1 - \Delta_{12}} + a_3 e^{\theta_3 - \Delta_{23}}}{b_1 e^{\theta_1 - \Delta_{12}} + b_3 e^{\theta_3 - \Delta_{23}}} \right)_x, y \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.4)$$



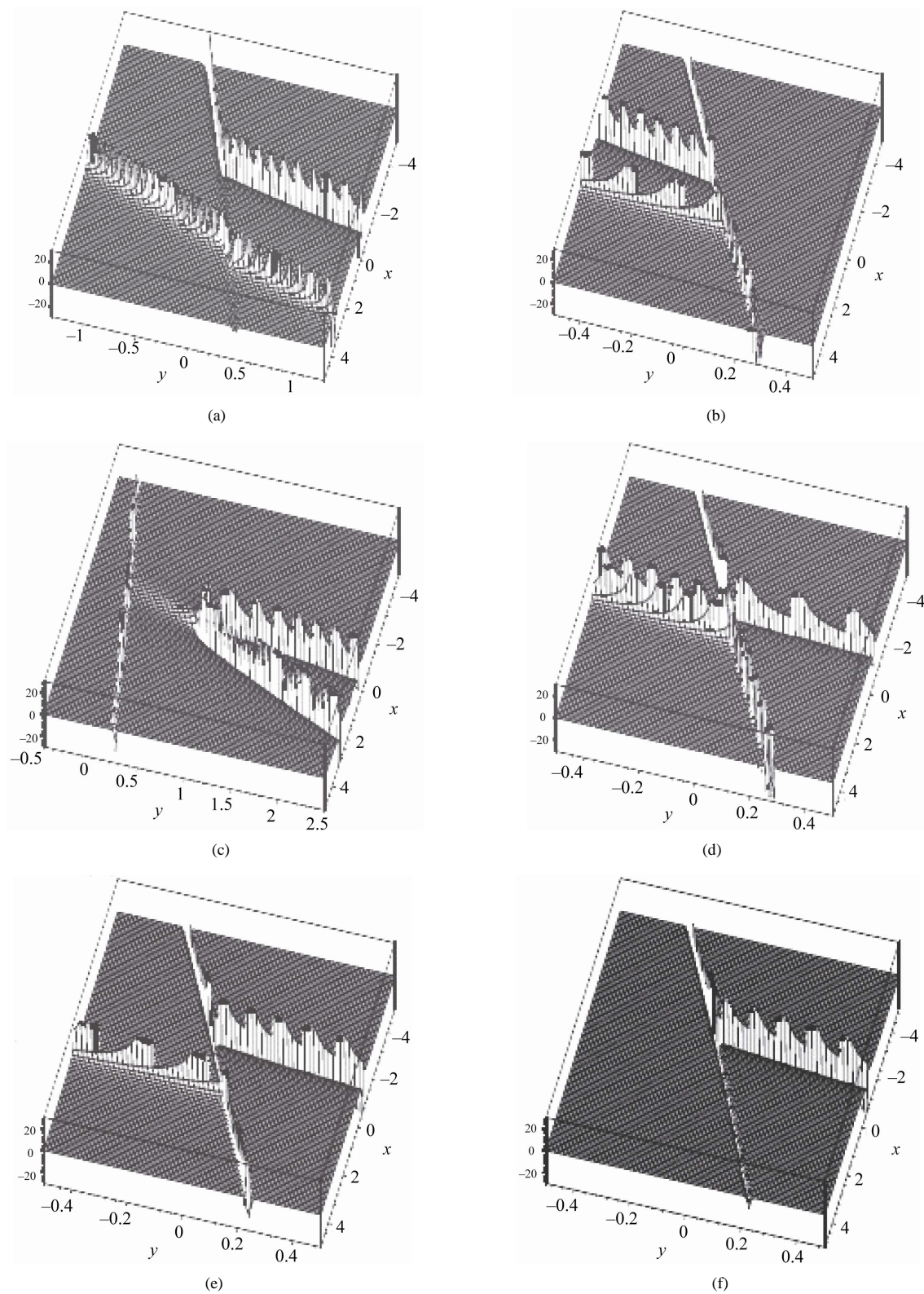


Figure 4. 3-D pictures of plus and minus resonance 3-soliton solutions. (a) Minus 1-resonance; (b) Plus 2-resonance case 1; (c) Plus 2-resonance case 2; (d) Plus 2-resonance case 3; (e) Minus 2-resonance; (f) Minus 3-resonance

图 4. 3-孤子解的减共振和加共振三维图。(a) 减 1-共振; (b) 加 2-共振情形 1; (c) 加 2-共振情形 2; (d) 加 2-共振情形 3; (e) 减 2-共振; (f) 减 3-共振

$$u = u^{(2)} = \left( \log \frac{1 + a_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12} - \Delta_{23}}}{1 + b_2 e^{\theta_2 - \Delta_{12} - \Delta_{23}}} \right)_x \quad (4.6)$$

很明显, 2-孤子解的 1-共振有只有一个“手臂”, 其图像与 1-孤子类似。

#### 4.2. 2-共振

在这种情况下, 集合  $\Omega$  中的两个元素趋向于  $\pm\infty$ 。不失一般性, 假设  $\Delta_{12} \rightarrow \pm\infty$ ,  $\Delta_{23} \rightarrow \pm\infty$ , 分别等价于  $A_{12} \rightarrow +0$ ,  $A_{23} \rightarrow +0$  (减 2-共振) 和  $A_{12} \rightarrow +\infty$ ,

$$u = \begin{cases} u^{(3)} + u^{(2)} + u^{(1)} = \left( \log \frac{1 + a_3 e^{\theta_3 - \Delta_{13}}}{1 + b_3 e^{\theta_3 - \Delta_{13}}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_2 e^{\theta_2}}{1 + b_2 e^{\theta_2}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_1 e^{\theta_1}}{1 + b_1 e^{\theta_1}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty \\ u^{(1+2+3)} = \left( \log \frac{1 + a_1 a_2 a_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}}}{1 + b_1 b_2 b_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.8)$$

**情形 2.** 将  $A_{12} e^{\theta_1} \rightarrow e^{\theta_1}$ ,  $A_{23} e^{\theta_2} \rightarrow e^{\theta_2}$  代入式(2.4c), 取极限  $A_{12}$  和  $A_{23}$ ,

得到

$$u = \begin{cases} \left\{ u^{(3)} + u^{(2)} + u^{(1)} = \left( \log \frac{1 + a_3 e^{\theta_3}}{1 + b_3 e^{\theta_3}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_2 e^{\theta_2}}{1 + b_2 e^{\theta_2}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_1 e^{\theta_1 - \Delta_{13}}}{1 + b_1 e^{\theta_1 - \Delta_{13}}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty \\ u^{(1+2+3)} = \left( \log \frac{1 + a_1 a_2 a_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}}}{1 + b_1 b_2 b_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.10)$$

**情形 3.** 将  $A_{12} A_{23} e^{\theta_2} \rightarrow e^{\theta_2}$  代入式(2.4c), 取极限  $A_{12}$  和  $A_{23}$ ,

得到

$$u = \begin{cases} u^{(3)} + u^{(1+2)} = \left( \log \frac{1 + a_3 e^{\theta_3}}{1 + b_3 e^{\theta_3}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{13}}}{1 + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2 - \Delta_{13}}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty \\ u^{(1)} + u^{(2+3)} = \left( \log \frac{1 + a_1 e^{\theta_1}}{1 + b_1 e^{\theta_1}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_2 a_3 e^{\theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}}}{1 + b_2 b_3 e^{\theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.12)$$

#### 4.2.2. 减共振

取极限  $A_{12} \rightarrow +0$ ,  $A_{23} \rightarrow +0$ , (2.4c) 可以写成

$$u = \begin{cases} u^{(2-3)} + u^{(1)} = \left( \log \frac{a_2 e^{\theta_2} + a_3 e^{\theta_3}}{b_2 e^{\theta_2} + b_3 e^{\theta_3}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_1 e^{\theta_1 - \Delta_{13}}}{1 + b_1 e^{\theta_1 - \Delta_{13}}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty \\ u^{(3)} + u^{(1)} = \left( \log \frac{1 + a_3 e^{\theta_3 - \Delta_{13}}}{1 + b_3 e^{\theta_3 - \Delta_{13}}} \right)_x + \left( \log \frac{1 + a_1 e^{\theta_1}}{1 + b_1 e^{\theta_1}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.14)$$

情形  $\Delta_{12} \rightarrow \pm\infty$ ,  $\Delta_{13} \rightarrow \pm\infty$  和  $\Delta_{13} \rightarrow \pm\infty$ ,

$A_{23} \rightarrow +\infty$ , (加 2-共振)。

#### 4.2.1. 加共振

**情形 1.** 将  $A_{12} e^{\theta_2} \rightarrow e^{\theta_2}$ ,  $A_{23} e^{\theta_3} \rightarrow e^{\theta_3}$  代入(2.4c)式, 并取极限  $A_{12}$  和  $A_{13}$ , 得到

$$\begin{aligned} g_3 &= 1 + a_1 e^{\theta_1} + a_1 a_2 e^{\theta_1 + \theta_2} + a_1 a_2 a_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}} \\ f_3 &= 1 + b_1 e^{\theta_1} + b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2} + b_1 b_2 b_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

故

$$\begin{aligned} g_3 &= 1 + a_3 e^{\theta_3} + a_2 a_3 e^{\theta_2 + \theta_3} + a_1 a_2 a_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}} \\ f_3 &= 1 + b_3 e^{\theta_3} + b_2 b_3 e^{\theta_2 + \theta_3} + b_1 b_2 b_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

故

$$\begin{aligned} g_3 &= 1 + a_1 e^{\theta_1} + a_3 e^{\theta_3} + a_1 a_3 e^{\theta_1 + \theta_3 - \Delta_{13}} + a_1 a_2 a_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}} \\ f_3 &= 1 + b_1 e^{\theta_1} + b_3 e^{\theta_3} + b_1 b_3 e^{\theta_1 + \theta_3 - \Delta_{13}} + b_1 b_2 b_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \Delta_{13}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

故

$$\begin{aligned} g_3 &= 1 + a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + a_3 e^{\theta_3} + a_1 a_3 e^{\theta_1 + \theta_3 - \Delta_{13}} \\ f_3 &= 1 + b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2} + b_3 e^{\theta_3} + b_1 b_3 e^{\theta_1 + \theta_3 - \Delta_{13}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

故

$\Delta_{23} \rightarrow \pm\infty$  类似。

通过以上的渐进分析, 可知 3-孤子的 2-解有四个“手臂”(见图 4(b)-(e)). 2-也有四个“手臂”, 但前者是不稳定的, 后者是稳定的。

### 4.3. 3-共振

对于加 3-共振, 将  $A_{12}e^{\theta_1} \rightarrow e^{\theta_1}$ ,  $A_{23}e^{\theta_2} \rightarrow e^{\theta_2}$ ,  $A_{13}e^{\theta_3} \rightarrow e^{\theta_3}$  代入式 (2.4c), 取极限  $A_{12} \rightarrow +\infty$ ,  $A_{13} \rightarrow +\infty$ ,  $A_{23} \rightarrow +\infty$ , 得到

$$\begin{aligned} g_3 &= 1 + a_1 a_2 a_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \\ f_3 &= 1 + b_1 b_2 b_3 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \end{aligned} \quad (4.15)$$

这种情形和 1-孤子解类似, 只有一个“手臂”。

对于减 3-共振, 对式 (2.4c) 取极限  $A_{12} \rightarrow +0$ ,  $A_{13} \rightarrow +0$ ,  $A_{23} \rightarrow +0$  得到

$$\begin{aligned} g_3 &= 1 + a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + a_3 e^{\theta_3} \\ f_3 &= 1 + b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2} + b_3 e^{\theta_3} \end{aligned} \quad (4.16)$$

故

$$u = \begin{cases} u^{(3)} + u^{(2-3)} = \left( \log \frac{1+a_3 e^{\theta_3}}{1+b_3 e^{\theta_3}} \right)_x + \left( \log \frac{a_2 e^{\theta_2} + a_3 e^{\theta_3}}{b_2 e^{\theta_2} + b_3 e^{\theta_3}} \right)_x, & y \rightarrow +\infty \\ u^{(1-2)} + u^{(1)} = \left( \log \frac{1+a_1 e^{\theta_1}}{1+b_1 e^{\theta_1}} \right)_x, & y \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.17)$$

它有三个“手臂”(见图 4(f)).

## 5. 总结和展望

本文主要以双线性导数方法和 Wronskian 技巧为数学基础, 利用渐进分析法为工具, 同时采用 Maple 的符号计算及作图功能, 从机理到直观对(2+1)-维非等谱 mKP 方程解的共振现象作了研究。当然对于更一般的多孤子情况, 比方  $N$ -孤子解, 其中的  $M$  ( $2 \leq M \leq N$ ) 个孤子就可以进行 1-, 2-, ...,  $C_M^2$ -, 共振, 而且它们都具有加共振和减共振。当  $N$  增大时, 情况也变得更加复杂。同时, 随着方程维数的增加, 复杂度也会增加。如何对这些情况进行系统地分析和总结, 并找出一般的规律, 是一个非常值得研究和探讨的课题。

## 6. 致谢

衷心感谢导师张翼教授的悉心指导和马文秀教授、

J. J. Nimmo 教授, 刘青平教授、陈登远教授等领域内的泰斗级人物的热情帮助, 感谢审稿人的辛勤工作!

## 参考文献 (References)

- [1] R. Hirota, J. Satsuma. Nonlinear evolution equations generated from the Bäcklund transformation for the Boussinesq equation. *Progress of Theoretical Physics*, 1977, 57(3): 797-807.
- [2] R. Hirota. Exact solution to the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters*, 1971, 27(18): 1192-1194.
- [3] X. B. Hu, P. A. Clarkson. Rational solutions of a differential-difference KdV equation, the Toda equation and the discrete KdV equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 1995, 28(17): 5009-5016.
- [4] 张大军, 邓淑芳. 孤子解的 Wronskian 表示[J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2002, 8(3): 232-242.
- [5] Y. D. Zhang, Y. Chen. A new representation of N-soliton solution and limiting solution for the fifth order KdV equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(3): 1055-1061.
- [6] N. C. Freeman, J. J. C. Nimmo. Soliton solutions of the Korteweg-de Vries and Kadomtsev Petviashvili equations: The Wronskian technique. *Physics Letters*, 1983, 95A(1): 1-3.
- [7] 陈登远. Bäcklund 变换与 n 孤子解[J]. 数学研究与评论, 2005, 25(3): 479-488.
- [8] 陈登远. 孤子引论[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 101-122.
- [9] S. L. Lou, L. L. Chen. Formally variable separation approach for nonintegrable models. *Journal of Mathematical Physics*, 1990, 40(5): 6491-6500.
- [10] Z. S. Lu, H. Q. Zhang. On a further extended tanh method. *Physics Letter A*, 2003, 307(5-6): 269-273.
- [11] 范恩贵. 齐次平衡法, Weiss-Tabor-Carnevale 及 Clarkson-Kruskal 约化之间的联系[J]. 物理学报, 1998, 47(8): 1409-1412.
- [12] J. W. Miles. Resonantly interacting solitary waves. *The Journal of Fluid Mechanics*, 1977, 79(1): 171-179.
- [13] F. Lambert, M. Musette. Tow-soliton resonances for KdV-like solitary waves. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1987, 57(6): 2207-2208.
- [14] K. Ohkuma, M. Wadati. The Kadomtsev-Petviashvili equation: the trace method and the soliton resonances. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1983, 52(3): 749-760.
- [15] E. Medina. An N soliton resonance solution for the KP equation: interaction with change of form and velocity. *Letters in Mathematical Physics*, 2002, 62(2): 91-99.
- [16] S. Isojima, R. Willox, J. Satsuma. On various solutions of the coupled KP equation. *Journal of Physics A*, 2002, 35(32): 6893-6909.
- [17] O. K. Pashaev, M. L. Y. Francisco. Degenerate four-virtual-soliton resonance for the KP-II. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2005, 144(1): 1022-1029.
- [18] J. H. Lee, R. Willox, O. K. Pashaev. Soliton resonances for the MKP-II. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2005, 144(1): 995-1003.
- [19] H. H. Hao, D. J. Zhang. Resonance of line solitons in a non-isospectral Kadomtsev-Petviashvili equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 2008, 77(1-4): Article ID 045001-2.
- [20] S. F. Deng. The multisoliton solutions for the nonisospectral mKP equation. *Physics Letters A*, 2007, 362(2-3): 198-204.
- [21] Y. Zhang, Y. N. Lv. On the nonisospectral modified Kadomtsev-Petviashvili equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 342(1): 534-541.