Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 144-148
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12028 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Inverse Coefficient Problems for a Parabolic Equation*

Cui'e Xiao[1], Youjun Xu[2]
[1]Department of Mathematics and Computation Sciences, Hunan City University, Yiyang
[2]College of Mathematic and Physics, University of South, Hengyang
Email: xiaocuie@163.com
Received: Mar. 26th, 2011; revised: Apr. 30th, 2011; accepted: May 5th, 2011.

Abstract: This paper is devoted to a class of inverse coefficient problems for a Parabolic Equation, We obtain an existence and uniqueness theorem of weak solutions. Using the theories of Schauder Fixed-Point Theorem, an existence theorem is established for the inverse coefficient problems solutions.

Keywords: Parabolic Equation; Inverse Coefficient Problems; Weak Solution; Existence; Uniqueness

抛物型方程的反系数问题研究*

肖翠娥[1]，许友军[2]
[1]湖南城市学院数学与计算科学系，益阳
[2]南华大学数理学院，衡阳
Email: xiaocuie@163.com
收稿日期：2011 年 3 月 26 日；修回日期：2011 年 4 月 30 日；录用日期：2011 年 5 月 5 日

摘　要：研究了一类抛物型方程的反系数问题，利用变分方法获得了方程弱解的存在性与唯一性，利用 Schauder 不动点定理得到了反系数问题解的存在性。

关键词：抛物型方程；反系数问题；弱解；存在性；唯一性

1. 方程及基本假设

热传导方程是抛物型方程的典型代表，有源函数的热传导方程是传热分析中最重要的一类方程，研究方程弱解的存在性与唯一性以及研究未知系数解的存在性，无论在理论研究还是在生产实际中都有非常重要的意义。主要讨论抛物型方程弱解问题，以及仅依赖于空间变量的主系数反问题，讨论未知系数解 $\{u(t,x),a(x)\}$ 的存在性。关于此类方程反系数问题的研究已有一些理论成果，具体可参见[1-7]。

设 $Q_T=[0,T]\times[0,l]$，考虑如下抛物型方程：

$$u_t-\left(a(x)u_x\right)_x-\left(b(x)u\right)_x+d(t,x)u=f(t,x) \tag{1}$$

其初始条件为

$$u(0,x)=0,x\in[0,l] \tag{2}$$

边界条件

$$\begin{cases}u(t,0)=u(t,l)=0,t\in[0,T]\\ a(0)u_x(t,0)=0\end{cases} \tag{3}$$

附加条件

$$\int_0^T u(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t=\varphi(x),x\in[0,l]。 \tag{4}$$

假设(1)～(4)中出现的函数，满足下列条件：

(A) $0\le\chi_1\le\chi(t)\le\chi_2$，$-\chi^*\le\chi'(t)\le-\chi^{**}<0$，$t\in[0,T]$；

(B) $b(x)\in C([0,l])$，$|b(x)|\le K_b,x\in[0,l]$；

(C) $d(t,x)\in C(Q_T),0<d_1\le d(t,x)\le d_2$，$(t,x)\in Q_T$；

(D) $f\in C(Q_T)$，$0\le f_1\le f(t,x)\le f_2$，$(t,x)\in Q_T$；

(E) $\varphi(x)\in C([0,l]),\varphi(0)=\varphi(l)=0,\varphi(x)\ge0$
$-\varphi_2\le\varphi'(x)\le-\varphi_1<0,|\varphi(x)|\le\varphi^*,x\in[0,l]$，

这里 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi^*,\chi_2,f_2=\text{const}>0$，$\chi_1,\chi^*,\chi^{**},f_1,K_b,d_1,d_2=\text{const}\ge0$，

*基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目(09C852)；湖南省科学技术厅科技计划资助项目(2011FJ6029)。

此外，设 $F(x,T)=\int_0^T\int_0^x f(t,y)\chi(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$，

$K_\chi=\max\{\chi^*,\chi^{**}\}$ $F_1(T)=\inf\limits_{x\in[0,l]}F(x,T)$，

$F_2(T)=\sup\limits_{x\in[0,l]}F(x,T)$，

$M(\delta)=\{a(x)\in C([0,l]):a(x)\ge\delta>0\}$，

$M(\delta_1,\delta_2)=\{a(x)\in C([0,l]):0<\delta_1\le a(x)\le\delta_2\}$。

2. 正问题弱解的存在性与唯一性

定理 1 设 $a(x)\in M(\delta_1)$，若条件(B)～(D)满足，则正问题(1)～(4)存在唯一广义解 $u\in W_p^{1,1}(Q_T)$，$p>2$，且存在正数 M，使得：

$$\|u\|_{C([0,T],L^2[0,l])}\le C\|f\|_{L^2(Q_T)}=M \text{ 成立。} \tag{5}$$

证明：正问题存在性与唯一性证明可参见[8,9]。下证有界性估计。

只证明 $d(t,x)$ 有充分大的正下界 d_1 情形，否则作变换 $u=e^{rt}v$，其中，r 充分大.

方程(1)左右两边乘以 $u(t,x)$ 并且从 0 到 t(这里 $0<t\le T$)，以及 0 到 l 积分，

$$\int_0^t\int_0^l\left(u_t-\left(a(x)u_x\right)_x-\left(b(x)u\right)_x+\mathrm{d}(s,x)u\right)u\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^t\int_0^l fu\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

分部积分可得：

$$\int_0^l\frac{u^2}{2}\bigg|_{(t,x)}\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l a(x)u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^l b(x)uu_x\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\int_0^l \mathrm{d}(s,x)u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\int_0^t\int_0^l fu\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

由 Young 不等式及条件(B)

$$\left|\int_0^t\int_0^l b(x)uu_x\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|\le\frac{\delta_1}{2}\int_0^t\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{K_b^2}{2\delta_1}\int_0^t\int_0^l u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s,$$

从而

$$\int_0^t\int_0^l b(x)uu_x\mathrm{d}x\mathrm{d}s\ge-\frac{\delta_1}{2}\int_0^t\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\frac{K_b^2}{2\delta_1}\int_0^t\int_0^l u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \text{。}$$

由已知条件，方程左边有

$$\int_0^l\frac{u^2}{2}\bigg|_{(t,x)}\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l a(x)u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^l b(x)uu_x\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\int_0^l \mathrm{d}(t,x)u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$\ge\int_0^l\frac{u^2}{2}\bigg|_{(t,x)}\mathrm{d}x+\frac{\delta_1}{2}\int_0^t\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \text{。}$$
$$+(d_1-\frac{K_b^2}{2\delta_1})\int_0^t\int_0^l u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

而方程右边有

$$\int_0^t\int_0^l fu\mathrm{d}x\mathrm{d}s\le C\int_0^T\int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\frac{d_1}{2}\int_0^t\int_0^l u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s,$$

因此，

$$\int_0^l\frac{u^2}{2}\bigg|_{(t,x)}\mathrm{d}x+\frac{\delta_1}{2}\int_0^t\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$\le C\int_0^T\int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\left(\frac{K_b^2}{2\delta_1}-\frac{d_1}{2}\right)\int_0^t\int_0^l u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \text{。}$$

从而，由 Gronwall 不等式可得

$$\int_0^l u^2(t,x)\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\int_0^l u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\le M,\ \forall t\in[0,T] \text{。} \tag{6}$$

定理证毕。

3. 反系数问题解的存在性

我们的目标是寻找未知函数 $a(x)$，假设 $a(x)\in M(\delta)$ 是任意的，在方程(1)左右两边乘以 $\chi(t)$ 并且从 0 到 T 以及 0 到 x 积分，

$$\int_0^T\int_0^x\left(u_t-\left(a(y)u_y\right)_y-\left(b(y)u\right)_y+d(t,y)u\right)\chi(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\int_0^x f(t,y)\chi(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

结合(2)～(4)、条件(E)，我们有

$$a(x)=\frac{1}{-\varphi'(x)}\left[-\int_0^T\int_0^x u_t\chi(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\int_0^T\int_0^x d(t,y)\chi(t)u\mathrm{d}y\mathrm{d}t+b(x)\varphi(x)+F(x,T)\right]$$

从而

$$a(x)=\frac{1}{-\varphi'(x)}\left[\int_0^T\int_0^x u\chi'(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\int_0^T\int_0^x d(t,y)\chi(t)u\mathrm{d}y\mathrm{d}t+b(x)\varphi(x)-\chi(T)\int_0^x u(T,y)\mathrm{d}y+F(x,T)\right] \text{。} \tag{7}$$

在集 $M(\delta_1,\delta_2)$ 上，引进算子 $B:M(\delta_1,\delta_2)\to C([0,l])$

$$B(a):=\frac{1}{-\varphi'(x)}\left[\int_0^T\int_0^x u\chi'(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\int_0^T\int_0^x d(t,y)\chi(t)u\mathrm{d}y\mathrm{d}t+b(x)\varphi(x)-\chi(T)\int_0^x u(T,y)\mathrm{d}y+F(x,T)\right], \tag{8}$$

这里$u(t,x)$是正问题(1)～(4)与系数$a(x)$相对应的解。因此，关系式(7)可改写成算子方程

$$a=B(a)。\tag{9}$$

定理 2 若条件(A)～(E)满足，则$\{u(t,x),a(x)\}$是问题(1)～(4)的广义解，当且仅当$\{u(t,x),a(x)\}$满足关系式(1)～(4)，(9)。

证明：必要性在(9)关系式导出过程中已证。下证充分性：

令$\tilde{a}(x)\in M(\delta_1,\delta_2)$是方程(9)的解，$\tilde{u}(t,x)$是相应于$\tilde{a}(x)$正问题(1)～(4)的解，设

$$\tilde{\varphi}(x)=\int_0^T\tilde{u}(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t,\ x\in[0,l],$$

则

$$-\tilde{\varphi}'\tilde{a}(x)=\left[\int_0^T\int_0^x\tilde{u}\chi'(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\int_0^T\int_0^x d(t,y)\chi(t)\tilde{u}\mathrm{d}y\mathrm{d}t+b(x)\tilde{\varphi}(x)-\chi(T)\int_0^x\tilde{u}(T,y)\mathrm{d}y+F(x,T)\right]。\tag{10}$$

另一方面，$\tilde{a}(x)$满足(9)，考虑算子B的定义，则有

$$-\varphi'B(\tilde{a})(x)=-\varphi'\tilde{a}(x)=\left[\int_0^T\int_0^x\tilde{u}\chi'(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\int_0^T\int_0^x d(t,y)\chi(t)\tilde{u}\mathrm{d}y\mathrm{d}t+b(x)\varphi(x)-\chi(T)\int_0^x\tilde{u}(T,y)\mathrm{d}y+F(x,T)\right]。\tag{11}$$

上面两式相减，在$[0,l]$上有

$$(\tilde{\varphi}-\varphi)'=\frac{b(x)}{\tilde{a}(x)}(\tilde{\varphi}-\varphi).$$

因为，$\tilde{\varphi}(0)=\varphi(0)$，从而可推出在$[0,l]$上$\tilde{\varphi}=\varphi$。因此，$(\tilde{u}(t,x),\tilde{a}(x))$是问题(1)～(4)的广义解，定理证毕。

定理 3 若条件(A)～(E)成立，且假设

$$0<F_1(T)-K_b\varphi^*-(TlM)^{\frac{1}{2}}(K_\chi+d_2\chi_2)-\chi_2(lM)^{\frac{1}{2}},$$

则一定存在正数a_1,a_2，使得$0<a_1\le B(a)\le a_2$。

证明：根据(8)式，我们有

$$\begin{aligned}-\varphi'(x)B(a)(x)&=\int_0^T\int_0^x u\chi'(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\&-\int_0^T\int_0^x d(t,y)\chi(t)u\mathrm{d}y\mathrm{d}t+b(x)\varphi(x)。\\&-\chi(T)\int_0^x u(T,y)\mathrm{d}y+F(x,T)\end{aligned}\tag{12}$$

利用已知条件(A)～(E)有

$$\begin{aligned}-\varphi'(x)B(a)(x)&\le(Tl)^{\frac{1}{2}}(K_\chi+d_2\chi_2)\left(\int_0^T\int_0^x u^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\&+K_b\varphi^*+\chi_2 l^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x u^2(T,y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}+F_2(T),\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\varphi_1B(a)(x)&\le(Tl)^{\frac{1}{2}}(K_\chi+d_2\chi_2)\left(\int_0^T\int_0^x u^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\&+K_b\varphi^*+\chi_2 l^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x u^2(T,y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}+F_2(T)\end{aligned}。$$

利用估计式(6)，进一步可得

$$\begin{aligned}\varphi_1B(a)&\le F_2(T)+K_b\varphi^*\\&+(TlM)^{\frac{1}{2}}(K_\chi+d_2\chi_2)+\chi_2(lM)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

取

$$a_2=\varphi_1^{-1}\left(F_2(T)+K_b\varphi^*+(TlM)^{\frac{1}{2}}(K_\chi+d_2\chi_2)+\chi_2(lM)^{\frac{1}{2}}\right),$$

有$\varphi_1B(a)\le\varphi_1a_2$，

从而

$$B(a)\le a_2。\tag{13}$$

类似(12)的推导，利用已知条件，由(12)可得

$$\begin{aligned}\varphi_2B(a)(x)&\ge-(Tl)^{\frac{1}{2}}\left(|\chi^*|+d_2\chi_2\right)\left(\int_0^T\int_0^x u^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\&-K_b\varphi^*-\chi_2l^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x u^2(T,x)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}+F_1(T),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi_2B(a)&\ge F_1(T)-K_b\varphi^*\\&-(TlM)^{\frac{1}{2}}(K_\chi+d_2\chi_2)-\chi_2(lM)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{14}$$

取

$$a_1=\varphi_2^{-1}\left(F_1(T)-K_b\varphi^*-(TlM)^{\frac{1}{2}}(K_\chi+d_2\chi_2)-\chi_2(lM)^{\frac{1}{2}}\right),$$

由(14)及定理假设，有

$$B(a)\ge a_1>0。\tag{15}$$

定理证毕。

定理 4 若条件(B)～(C)成立，则算子$B:M(a_1,a_2)\to C([0,l])$是连续映射。

证明 令$a^{(1)}(x),a^{(2)}(x)\in M(a_1,a_2)$，其相应的广义解为$u^{(1)}(t,x),u^{(2)}(t,x)$。

令$v(t,x)=u^{(1)}(t,x)-u^{(2)}(t,x)$，

$\hat{a}(x)=a^{(1)}(x)-a^{(2)}(x)$，则$v(0,x)=0,x\in[0,l]$，

$$\left(u^{(1)}-u^{(2)}\right)_t-\left(a^{(1)}(x)u_x^{(1)}-a^{(2)}(x)u_x^{(2)}\right)_x-\left(b(x)\left(u^{(1)}-u^{(2)}\right)\right)_x+d(t,x)\left(u^{(1)}-u^{(2)}\right)=0,$$

即

$$v_t-\left(a^{(1)}(x)v_x\right)_x-\left(b(x)v\right)_x+d(t,x)v=\left(\hat{a}(x)u_x^{(2)}\right)_x 。$$

上式两边积分可得

$$\int_0^t\int_0^l\left(v_s-\left(a^{(1)}(x)v_x\right)_x-\left(b(x)v\right)_x+d(s,x)v\right)v\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\int_0^t\int_0^l\left(\hat{a}(x)u_x^{(2)}\right)_x v\mathrm{d}x\mathrm{d}s 。$$

再分部积分后，有

$$\int_0^l\frac{v^2}{2}\Big|_{(t,x)}\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l a^{(1)}(x)v_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^l d(s,x)v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^l b(x)v\,v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}s=-\int_0^t\int_0^l\hat{a}(x)u_x^{(2)}v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}s 。\tag{16}$$

由 Young 不等式及条件(B)

$$\left|\int_0^t\int_0^l b(x)vv_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\le\frac{a_1}{2}\int_0^t\int_0^l v_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{K_b^2}{2a_1}\int_0^t\int_0^l v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{17}$$

结合条件(C)，并利用(17)，则(16)左边满足不等式：

$$\begin{aligned}&\int_0^l\frac{v^2}{2}\Big|_{(t,x)}\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^l a^{(1)}(x)v_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+\int_0^t\int_0^l d(s,x)v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^l b(x)vv_x\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\ge\int_0^l\frac{v^2}{2}\Big|_{(t,x)}\mathrm{d}x+\frac{a_1}{2}\int_0^t\int_0^l v_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&+\left(d_1-\frac{K_b^2}{2a_1}\right)\int_0^t\int_0^l v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned} 。$$

而(16)右边满足不等式：

$$\begin{aligned}-\int_0^t\int_0^l\hat{a}(x)u_x^{(2)}v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}s&\le\left|\int_0^t\int_0^l\hat{a}(x)u_x^{(2)}v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|\\&\le C\int_0^T\int_0^l\left|\hat{a}(x)u_x^{(2)}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\frac{a_1}{4}\int_0^t\int_0^l\left|v_x\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\&\le C\left\|\hat{a}(x)\right\|_{C([0,l])}^2\int_0^T\int_0^l\left|u_x^{(2)}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\frac{a_1}{4}\int_0^t\int_0^l\left|v_x\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\end{aligned} 。$$

因此

$$\int_0^l\frac{v^2}{2}\Big|_{(x,t)}\mathrm{d}x+\frac{a_1}{4}\int_0^t\int_0^l v_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\left(d_1-\frac{K_b^2}{2a_1}\right)\int_0^t\int_0^l v^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\left\|\hat{a}(x)\right\|_{C([0,l])}^2\int_0^T\int_0^l\left|u_x^{(2)}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{18}$$

再根据算子 B 的定义，

$$\begin{aligned}\left|B\left(a^{(1)}\right)-B\left(a^{(2)}\right)\right|&=\left|\frac{1}{-\varphi'(x)}\int_0^T\int_0^x\left(u^{(1)}-u^{(2)}\right)\chi'(t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\int_0^T\int_0^x d(t,x)\chi(t)\left(u^{(1)}-u^{(2)}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right|\\&+\left|-\chi(T)\int_0^x\left(u^{(1)}(T,y)-u^{(2)}(T,y)\right)\mathrm{d}y\right|\\&\le C\left[\int_0^T\int_0^x\left|\left(u^{(1)}-u^{(2)}\right)\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\int_0^x\left|u^{(1)}(T,y)-u^{(2)}(T,y)\right|\mathrm{d}y\right]\le C\left[\int_0^T\int_0^x v^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t+\int_0^x v^2(T,y)\mathrm{d}y\right]\end{aligned} 。$$

结合式(18)，Gronwall 不等式以及 $v(0,x)=0, x\in[0,l]$ 可知：

当 $\left\|a^{(1)}-a^{(2)}\right\|_{C([0,l])}\to0$ 时，

有 $\left|B\left(a^{(1)}\right)-B\left(a^{(2)}\right)\right|_{C([0,l])}\to0$ 。

定理证毕。

定理 5 若条件(A)～(E)成立，则存在 $a(x)\in M(a_1,a_2)$，使得 $B(a)=a$ 。

证明： 假设 $a(x)\in M(a_1,a_2)$， $u(t,x)$ 为 $a(x)$ 所对应的正问题的解。由前面讨论知 $u(x,t)\in W_p^{1,1}(Q_T)$，又因为 $p>2$，由嵌入定理[10]可知

$$u(t,x)\in C^{0,\alpha}(Q_T),\ 0<\alpha<1-\frac{2}{p} 。$$

由定理 2～定理 4， $B:M(a_1,a_2)\to M(a_1,a_2)$ 是到自身的连续映射。又因为 $C^{0,\alpha}(Q_T)$ 紧嵌入到 $C(Q_T)$，由 B 算子的定义可知 B 是由 $M(a_1,a_2)$ 映到自身的全连续算子。从而由 Schauder 不动点定理可知则存在 $a(x)\in M(a_1,a_2)$，使得 $B(a)=a$ 。

定理证毕。

参考文献 (References)

[1] V. L. Kamynin, A. B. Kostin. Two inverse problems of finding a coefficient in a parabolic equation. Differential Equations, 2010, 46(3): 375-386.
[2] V. L. kamynin. On the inverse of determining the leading coefficient in parabolic equations. Matematicheskie Zimetki, 2008, 84(1): 48-58.
[3] Z.-C. Deng, L. Yang, J.-N. Yu, and G.-W. Luo. Identifying the radiative coefficient of an evolutional type heat conduction equation by optimization method. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 362(1): 210-223.
[4] A. I. Prilepko, D. S. Tkachenko. Well-posedness of the inverse source problem for parabolic systems. Differential Equations, 2004, 40(11): 1619-1626.
[5] Z. H. Liu. Identification of parameters in semilinear parabolic equations. Acta Mathematica Scientia, 1999, 19(2): 175-180.
[6] A. G. Fatullayev, S. Cula. An iterative procedure for determining an unknown spacewise-dependent coefficient in a parabolic equation. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(7): 1033-1037.
[7] W. H. Yu. Inverse problems in partial differential equations. Tianjin: Nankai University, 1989.
[8] 王术. Sobolev 空间与偏微分方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 210-214.
[9] 伍卓群, 尹景学, 王春朋. 椭圆与抛物型方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
[10] E. Zeidler. Nonlinear functional analysis and its applications II A/B. New York: Springer, 1990.