Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 80-84
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12017 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

The Blow up Property of Solutions for Some Pseudoprabolic Equations with Nonlinear Nonlocal Source

Chengshun Jiang[1,2], Xianchao Wang[2]
[1] Wuhan College of Zhongnan University of Econonics and Law, Wuhan
[2]Zhengzhou Institute of Scientific and Technical Information, Zhengzhou
Email: maszniu@163.com
Received: Mar. 25th, 2011; revised: Apr. 16th, 2011; accepted: Apr. 17th, 2011.

Abstract: This paper investigates some Initial Buandary Value Problem (IBVP) of pseudoparabolic equations with nonlinear nonlocal source. Firstly, the authors prove the existence and uniqueness of local solutions of the IBVP. Secondly, authors derive the blow up property of solutions under certain conditions. Finally, they show the growth rate of solutions near the blow up time.

Keywords: Blow-Up; Pseudoparabolic Equation; Nonlinear Nonlocal Source; Growth Rate

伪抛物型方程非局部问题解的爆破性

江成顺 [1,2]，汪先超 [2]
[1] 中南财经政法大学武汉学院，武汉
[2] 郑州信息科技学院，郑州
Email: maszniu@163.com
收稿日期：2011 年 3 月 25 日；修回日期：2011 年 4 月 16 日；录用日期：2011 年 4 月 17 日

摘　要：本文研究带非线性非局部源项的伪抛物型方程的一类初边值问题。首先证明了模型局部解的存在唯一性，然后证明其解在一定条件下的爆破性质，最后给出两个特殊源项问题解的爆破速率估计。

关键词：Blow-Up；伪抛物型方程；非线性非局部源；爆破速率

1. 引言

形如

$$u_t-\Delta u_t-\Delta u=\int_\Omega f(u)\mathrm{d}x,\quad (x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T) \tag{1.1}$$

的 PDE 是带有非线性非局部源项 $\int_\Omega f(u)\mathrm{d}x$ 的伪抛物型方程，其中 Δ 是 Laplace 算子，$u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subset R^n$，$S=\partial\Omega$ 是 Ω 的适当光滑的边界，Ω 为有界区域。

本文考虑方程(1.1)的带有齐次 Dirichlet 边界条件或齐次 Newman 边界条件：

$u(x,t)=0$ 或

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}(x,t)=0,\quad (x,t)\in S_T=\partial\Omega\times(0,T) \tag{1.2}$$

和初始条件

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\bar{\Omega} \tag{1.3}$$

的初边值问题(1.1)~(1.3)，其中 $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$ 是 $\partial\Omega$ 的外法向导数，$u_0(x)$ 为已知光滑函数。

伪抛物型方程可以描述二阶非平稳流模型[1,2]，可以描述传导问题中双温控制模型[3]，还可以描述长波的非线性弥散模型[4,5]等。正是因为其物理应用背景非常广泛，对其研究在不断发展[6-9]。

伪抛物型方程解的定性理论已有很多文献作了系统深入的研究，但研究类似于方程(1.1)的含有非线性非局部源项的伪抛物型方程的初边值问题(IBVP)解的爆破性质的文献相对少一些。

本文将在讨论问题(1.1)～(1.3)的局部解的存在唯一性的基础上，讨论在一定条件下，局部解在有限时刻发生爆破的性质，最后讨论有关特殊问题的解发生爆破的 Blow-up 速率估计。

2. 局部解的存在唯一性

本文将作以下基本假设：

(I) 函数 $f(s)\in C^2(R)$ 且 $f(s)\ge 0$，初始函数 $u_0(x)\in C^{2+\alpha}(\Omega)$ 非负且有界；

(II) $f'(s)\ge 0$ 且 $f(s)$ 是凸函数，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(s)}\mathrm{d}s<\infty$。

问题(1.1)～(1.3)中，当边界条件为齐次 Dirichlet 边界条件时，记为 IBVP(PD)；当边界条件为齐次 Newman 边界条件时，记为 IBVP(PN)。

为后面定理证明的需要，这里先给出两个引理。

引理 2.1[10] (最大值原理)设 $h(x,t)$，$k(x,t)$ 均非负，且 $u(x,t)$ 是线性初边值问题

$$\begin{cases} u_t-\Delta u_t-\Delta u=h(x,t), & (x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)\\ u(x,t)=k(x,t)\ \text{或}\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta}(x,t)=k(x,t), & (x,t)\in S_T=\partial\Omega\times(0,T)\\ u(x,0)=u_0(x), & u_0(x)\ge 0,\ \ x\in\Omega. \end{cases}$$

的解。如果 $k(x,t)\ge \mathrm{e}^{-t}k(0)$，则

$$u(x,t)\ge 0,$$

对所用 $(x,t)\in\bar{Q}_T=\bar{\Omega}\times(0,T)$ 成立。

引理 2.2[10] 设 $u(x,t)$ 是伪抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t-\Delta u_t-\Delta u=0, & u(x,t)\in L^2(\Omega)\\ u(x,t)=\bar{g}(t), & \bar{g}(t)\in C\left(C^{2+\alpha}(\Omega),[0,T]\right)\\ u(x,0)\le u_0(x). \end{cases}$$

的解，则

$$\|u\|_{L^\infty}\le\max\left\{M(T),\|u_0\|_{L^\infty}\right\},\quad \forall t\in[0,T]$$

其中 $M(T)=\sup\left\|\dfrac{\bar{g}-e^{-t}\bar{g}(0)}{1-e^{-t}}\right\|_{L^\infty}$。

下面推证 IBVP(1.1)～(1.3)的局部解的存在唯一性。

定理 2.1 假设条件(I)和(II)成立。若 IBVP(1.1)～(1.3)存在上解 $\bar{u}(x,t)$，则对某个 T_0，$t\in(0,T_0)$，IBVP(PD)和 IBVP(PN)均有唯一非负古典解。

证明：解的存在性的证明可以参考文献[10]，这里主要利用引理 2.1 和引理 2.2 证明解的唯一性。

设 u_1 和 u_2 都为 IBVP(1.1)～(1.3)的解，令 $w=u_1-u_2$，则 w 满足

$$\begin{cases} w_t-\Delta w_t-\Delta w=0, & (x,t)\in Q_T\\ w(x,t)=0\ \text{或}\ \dfrac{\partial w}{\partial\eta}(x,t)=0, & (x,t)\in S_T\\ w(x,0)=0, & x\in\Omega. \end{cases}\tag{2.1}$$

对于 IBVP(PD)，由引理 2.2 知 $w\equiv 0$，故 IBVP(PD)解的唯一性得证。对于 IBVP(PN)，将(2.1)中第一个方程两边在 Ω 上关于 x 积分，再从 0 到 t 关于 t 积分，得 $\int_\Omega w(x,t)\mathrm{d}x=0$。由引理 2.1 知 $w\equiv 0$，故 IBVP(PN)解的唯一性得证。

证明完毕。

为本文最后的讨论，这里给出 f 的两个例子。利用定理 2.1，讨论其解的存在唯一性。

例 A. $f(s)=s^p$，$p>1$。

对于 IBVP(PD)解的存在唯一性的讨论，根据定理 2.1，主要是寻找其上解。

假设 $\bar{u}=s(t)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是对应于第一特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x)=\lambda\varphi(x), & x\in\Omega\\ \varphi(x)=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的特征函数，故只需寻求 t 的函数 $s(t)$。

设 $K_1=\max\varphi(x)$，$K_2=\min\varphi(x)$，$K=\int_\Omega\varphi^p(x)\mathrm{d}x$，则可取常微分方程初值问题

$$\begin{cases} (1+\lambda)s'(t)+\lambda s(t)=s^p(t)\dfrac{K}{K_2},\\ s(0)=p_0\ge\dfrac{\max u_0}{K_2} \end{cases}$$

的解为 $s(t)$。由此，构造了 IBVP(PD)的一个上解。

例 B. $f(s)=e^s$。

对于 IBVP(PD)解的存在唯一性的讨论，类似地可构造上解 $\bar{u}=s(t)\varphi(x)$，其中 $s(t)$ 是常微分方程初值问题

$$\begin{cases} (1+\lambda)s'(t)+\lambda s(t)=\dfrac{|\Omega|}{K_2}\exp\left[K_1 s(t)\right],\\ s(0)=p_0\ge\dfrac{\max u_0}{K_2} \end{cases}$$

的解。

3. 解的爆破性质

本节主要讨论 IBVP(1.1)～(1.3)的局部解发生爆破的条件。

定理 3.1 设条件(I)和(II)成立，如果初值 $u_0(x)$ 充分大，则 IBVP(1.1)～(1.3)的解在有限时刻发生爆破现象。

证明： 设 $\varphi(x)$ 是第一特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x)=\lambda\varphi(x), & x\in\Omega \\ \varphi(x)=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的特征函数，令 $\int_\Omega\varphi(x)\mathrm{d}x=1$。将方程(1.1)两边同乘以 $\varphi(x)$，然后在 Ω 上积分，可得

$$(1+\lambda)a'(t)+\lambda a(t)=\int_\Omega f(u)\mathrm{d}x$$

其中 $a(t)=\int_\Omega u(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x\geq 0$。

由 Jensen 不等式知

$$\int_\Omega f(u)\mathrm{d}x\geq|\Omega|f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\mathrm{d}x\right).$$

记 $K_1=\max_{x\in\Omega}\varphi(x)$，则

$$a(t)\leq K_1\int_\Omega u\mathrm{d}x.$$

因 $f(s)$ 非负且非减，故有

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\mathrm{d}x\right)\geq f\left(\frac{1}{K_1|\Omega|}a(t)\right).$$

由此可得

$$(1+\lambda)a'(t)+\lambda a(t)\geq|\Omega|f\left(\frac{1}{K_1|\Omega|}a(t)\right).$$

因此当 $a(0)$ 充分大时，$a(t)$ 在有限时刻发生爆破，即当 $u_0(x)$ 充分大时，IBVP(1.1)～(1.3)的解在有限时刻爆破。定理得证。

考虑以下形式的 IBVP(PD)

$$\begin{cases} u_t-\Delta u_t-\Delta u=g(t), & (x,t)\in Q_T \\ u(x,t)=0, & (x,t)\in S_T \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $0<T<\infty$，$g(t)\geq 0$ 与解 $u(x,t)$ 有关，$g(t)$ 是给定函数，且在 $(0,T)$ 上局部 Holder 连续。由已有结论可知，若初值 $u_0(x)\in C^{2+\alpha}(\Omega)$，则 IBVP(4.1)有唯一局部古典解 $u(x,t)\in C^1\left(C^{2+\alpha}(\Omega),[0,T]\right)$[11]。下面定理主要给出了(3.1)解爆破的充分必要条件。

引进函数记号

$$G(t)=\int_0^t g(s)\mathrm{d}s,\quad H(t)=\int_0^t G(s)\mathrm{d}s。$$

定理 3.2 设 $u(x,t)$ 是 IBVP(3.1)的解，$\Delta u_0\leq 0$，则

$$\lim_{t\to T}\sup|u|_\infty=\infty \tag{3.2}$$

的充分必要条件是

$$\int_0^T g(s)\mathrm{d}s=\infty. \tag{3.3}$$

进一步，若(3.2)或(3.3)成立，则必有

$$\lim_{t\to T}\frac{\int_\Omega u\varphi\mathrm{d}x}{G(t)}=\frac{1}{1+\lambda}$$

其中 λ 和 $\varphi(x)$ 分别是第一特征值和第一特征函数。

证明： 首先证明若(3.2)成立，则(3.3)成立。因方程(3.1)右边项 $g(t)$ 和 x 无关，故可令 $v=-\Delta u$，则易知 v 满足

$$\begin{cases} v_t-\Delta v_t-\Delta v=0, & (x,t)\in Q_T \\ v(x,t)=\bar{g}(t), & (x,t)\in S_T \\ v(x,0)=-\Delta u_0(x)\geq 0, & x\in\Omega. \end{cases}$$

其中 $\bar{g}(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(-\Delta u_0+\int_0^t g(s)\mathrm{e}^s\mathrm{d}s\right)$。

因 $v=-\Delta u$ 在 $\Omega\times\left(\frac{T}{2},T\right)$ 上连续，且 $\bar{g}(t)\geq e^{-t}\bar{g}(0)$。

由引理 2.1 和引理 2.2，可推得

$$0\leq v(x,t)\leq\max\left\{M(T),-\Delta u_0(x)\right\},$$

故

$$v=-\Delta u\leq C_1=\left|\Delta u_0(x)\right|_\infty,\quad t\in\left(\frac{T}{2},T\right) \tag{3.4}$$

对于固定实数 $R>0$，存在以原点为球心，以 R 为半径的球 $B(0,R)$，使得 $\Omega\subset B(0,R)$。由线性椭圆型方程最大值原理和(3.4)可知

$$\underline{u}(x)=-C_1\frac{R^2-|x|^2}{2n}$$

作为下界比较函数，得到

$$u(x,t)\geq -C_1\frac{R^2}{2n}. \tag{3.5}$$

将方程(3.1)两边在区间 $\left(\frac{T}{2},T\right)$ 上求积分，得

$$u(x,t)=u\left(x,\frac{T}{2}\right)+G(t)-G\left(\frac{T}{2}\right)+\int_{\frac{T}{2}}^t\Delta u(x,s)\mathrm{d}s$$
$$+\Delta u(x,t)-\Delta u\left(x,\frac{T}{2}\right)。$$

由(3.4)和 $G(t)\geq 0$ 知

$$u(x,t)\leq G(t)+C_1,\qquad\forall x\in\Omega。 \tag{3.6}$$

因此由(3.2)成立可推得(3.3)成立。

若(3.3)成立，下面将要证明

$$\lim_{t\to T}\frac{\int_\Omega u\varphi \mathrm{d}x}{G(t)}=\frac{1}{1+\lambda}。\tag{3.7}$$

设 λ 和 φ 分别是满足

$$\begin{cases}-\Delta\varphi(x)=\lambda\varphi(x), & x\in\Omega\\ \varphi(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的特征值和特征函数，且 $\varphi(x)\ge 0$，$\int_\Omega\varphi(x)\mathrm{d}x=1$。

记 $z(x,t)=\dfrac{1}{1+\lambda}G(t)-u(x,t)$，

$\beta(t)=\int_\Omega z(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x$。

由 Green 公式可得

$$\begin{aligned}\beta'(t)&=\int_\Omega\left(\frac{1}{1+\lambda}g(t)-u_t\right)\varphi(y)\mathrm{d}y\\&=-\int_\Omega\Delta u_t\varphi(y)\mathrm{d}y-\int_\Omega\Delta u\varphi(y)\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{1+\lambda}g(t)\\&=\lambda\int_\Omega u_t\varphi(y)\mathrm{d}y+\lambda\int_\Omega u\varphi(y)\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{1+\lambda}g(t)\\&=-\lambda\beta'(t)-\lambda\beta(t)+\frac{\lambda}{1+\lambda}G(t)\end{aligned}$$

因此可得

$$\beta'(t)=-\frac{\lambda}{1+\lambda}\beta(t)+\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}G(t).$$

上面的方程可直接积分得到

$$\beta(t)=\beta(0)\exp\left(\frac{-\lambda t}{1+\lambda}\right)+\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\int_0^t G(s)\exp\left(\frac{\lambda(s-t)}{1+\lambda}\right)\mathrm{d}s\le C_2\left(1+H(t)\right).\tag{3.8}$$

其中 C_2 为一正常数。

另一方面，将方程(3.1)两边乘以 $\varphi(x)$ 后在 Ω 上积分，也可得到

$$(1+\lambda)\int_\Omega u_t\varphi\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega u\varphi\mathrm{d}x=g(t).$$

记 $\int_\Omega u\varphi\mathrm{d}x=a(t)$，可得

$$a(t)=a(0)\exp\left(-\frac{\lambda t}{1+\lambda}\right)+\frac{1}{1+\lambda}\int_0^t g(s)\exp\left(\frac{\lambda(s-t)}{1+\lambda}\right)\mathrm{d}s\le C_3+\frac{1}{1+\lambda}G(t).\tag{3.9}$$

其中 C_3 为一正常数。

由(3.8)和(3.9)，推得

$$-C_3\le\frac{1}{1+\lambda}G(t)-a(t)=\beta(t)\le C_2\left(1+H(t)\right)\tag{3.10}$$

即

$$\frac{-C_3}{G(t)}\le\frac{1}{1+\lambda}-\frac{a(t)}{G(t)}\le\frac{C_2\left(1+H(t)\right)}{G(t)}.\tag{3.11}$$

由于 $G(t)$ 单调非减，对 $\forall\varepsilon>0$，有

$$0\le\frac{1+H(t)}{G(t)}\le\frac{\int_0^{T-\varepsilon}G(s)\mathrm{d}s}{G(t)}+\varepsilon。$$

由(3.3)可得

$$\lim_{t\to T}\frac{H(t)}{G(t)}=0。$$

因此(3.7)得证。同时易见若(3.3)成立，则(3.2)成立。

定理得证。

4. Blow-up 速率估计

本节研究特殊情形的 IBVP(PD)解在发生爆破的时刻附近解的爆破速率，给出其估计结果。为此设 $f(s)=e^s$ 或 $f(s)=s^p$ ($p>1$)，T 是 IBVP(PD)解的爆破时间。

定理 4.1 若 $f(s)=s^p,(p>1)$，$\Delta u_0\le 0$，u_0 充分大，则 IBVP

$$\begin{cases}u_t-\Delta u_t-\Delta u=\int_\Omega u^p\mathrm{d}x, & (x,t)\in Q_T\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in S_T\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega.\end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 满足

$$\frac{C_2}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}\le\lim_{t\to T}\max u(x,t)\le\frac{C_1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}$$

其中 C_1 和 C_2 是两个正常数。

证明： 首先证明定理的左边不等式。令 $U(t)=\max\limits_{x\in\Omega}u(x,t)$，则

$$U'(t)=\int_\Omega u^p\mathrm{d}x,\tag{4.1}$$

由(4.1)易得

$$U'(t)\le|\Omega|U^p(t)。\tag{4.2}$$

将(4.2)两边从 t 到 T 积分，有

$$\frac{1}{p-1}U^{1-p}(t)\le|\Omega||T-t|,\tag{4.3}$$

令 $C_2=\left[(p-1)|\Omega|\right]^{\frac{1}{1-p}}$，由(4.3)得

$$U(t)\geq\frac{C_2}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{4.4}$$

下面证明定理的右边不等式。将(4.1)两边从 0 到 t 积分得

$$U(t)=G(t)。 \tag{4.5}$$

由 Holder 不等式，可知

$$\int_\Omega u\varphi\mathrm{d}x\leq\left(\int_\Omega u^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega\varphi^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}。$$

故存在常数 C，有

$$\int_\Omega u^p\mathrm{d}x\geq C\left(\int_\Omega u\varphi\mathrm{d}x\right)^p \tag{4.6}$$

由(4.1)和(4.6)知

$$U'(t)\geq C\left(\int_\Omega u\varphi\mathrm{d}x\right)^p。 \tag{4.7}$$

由(4.5)，(4.7)和定理 3.2，当 $t\to T$ 时，有

$$G'(t)\geq C\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^p G^p(t)。 \tag{4.8}$$

将(4.8)两边从 t 到 T 积分，得

$$G(t)\leq\left[C(p-1)\right]^{\frac{1}{1-p}}\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{\frac{p}{1-p}}(T-t)^{\frac{1}{1-p}},\ t\to T。 \tag{4.9}$$

令 $C_1=\left[C(p-1)\right]^{\frac{1}{1-p}}\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{\frac{p}{1-p}}$，由(4.5)和(4.9)，有

$$U(t)\leq\frac{C_1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}},\qquad t\to T。 \tag{4.10}$$

由(4.4)和(4.10)知定理得证。

用类似于定理 4.1 的证明方法，可以得到下面的定理。

定理 4.2 若 $f(s)=\mathrm{e}^s$，$\Delta u_0\leq 0$，u_0 充分大，则 IBVP

$$\begin{cases} u_t-\Delta u_t-\Delta u=\int_\Omega \mathrm{e}^u\mathrm{d}x, & (x,t)\in Q_T\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in S_T\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 满足

$$C_4\ln(T-t)\leq\lim_{t\to T}\max u(x,t)\leq C_3\ln(T-t)$$

其中 C_3 和 C_4 是两个正常数。

参考文献 (References)

[1] B. D. Coleman, W. Noll. Approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1960, 6(1): 355-370.

[2] T. W. Ting. Certain non-steady flows of second-order fluids. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1963, 14(1): 1-26.

[3] P. J. Chen, M. E. Gurtin. On a theory of heat conduction involving two temperatures. Zeitschrift Fur Angewandte Mathematics und Physik, 1968, 19(4): 614-627.

[4] T. B. Benjamin, J. L. Bona, and J. J. Mahony. Model equations for long waves in non-linear dispersive systems. Philosophical Transactions of the Royal Society A, 1972, 272(1220): 47-78.

[5] G. Karch. Asymptotic behavior of solution to some pseudo-parabolic equation. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1997, 20(2): 271-289.

[6] A. Elcrat. Coercivity for a third order pseudoparabolic operator with applications to semilinear equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1977, 61(5): 841-849.

[7] A. Bouziani. Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition. Nonlinear Analysis, 2003, 55(7-8): 883-904.

[8] A. Bouziani. Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 291(2): 371-386.

[9] A. Bouziani, N. Merazga. Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral conditions. Electronic Journal of Differential Equations, 2006, 2006(115): 1-18.

[10] Pierre. On the maximum principle for pseudoparabolic equations. Indiana University Mathematics Journal, 1981, 30(6): 821-853.

[11] R. E. Showalter, T. W. Ting. Pseudo-parabolic partial differential equations. SIAM Journal on Mathematic Analysis, 1970, 1(1): 1-26.

