Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 136-143
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12027 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

General Viscosity Iterative Methods and Applications*

Ming Tian, Xin Jin
College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin
Email: tianming1963@126.com; bzjx1988@126.com
Received: Mar. 31th, 2011; revised Apr. 27th, 2011, accepted May 3rd, 2011.

Abstract: The main core of this work is to clarify the profound relationships between several kinds of iterative methods for a fixed point of a given nonexpansive mapping.Concerning about the fact that the research focus has changed from the existence and uniqueness of the fixed piont to how to construct effective iterative methods.We begin with the viscosity iterative algorithm proposed by Moudafi.In order to provide a reference for future workers,we elaborate the development and evolution. The paper also deeply summarizes concrete applications of such methods.We focus not only on the modification processes of Mann iteration,but also concern about relevant conclusions about the variational inequalities and equilibrium problems.

Keywords: Nonexpansive Mappings; Iterative Method; Variational Inequality; Fixed Point; Viscosity Approximation; Equilibrium Problem

一般粘滞迭代方法及其应用*

田 明，金 鑫
中国民航大学理学院，天津
Email: tianming1963@126.com; bzjx1988@126.com
收稿日期：2011 年 3 月 31；修回日期：2011 年 4 月 27 日；录用日期：2011 年 5 月 3 日

摘 要：本文研究内容的核心之一在于，针对非扩张映射 T 的不动点问题，我们深刻阐明几种求解其不动点的迭代方法的相互关系。结合目前该类问题研究重点的转变，即从不动点的存在性和唯一性转变到如何构造有效迭代方法。我们系统阐述了 Moudafi 提出的粘滞迭代算法的发展演变过程，为以后的工作者提供参考。对于该类方法的具体应用进行深入的总结是本文的另一重心，主要围绕 Mann 迭代算法的修正及关于变分不等式以及均衡问题的联立求解获得相关结论。

关键词：扩张映像；迭代算法；变分不等式；不动点；粘滞逼近；均衡问题

1. 简介

不动点理论是非线性泛函分析理论的重要组成部分，它与近代数学的许多分支有着紧密的联系，特别是在建立各类方程——其中包括各类线性或非线性的，确定或非确定性的微分方程，积分方程以及各类算子方程解的存在性、唯一性问题中起着重要作用。在科学研究和工程中，微分方程、积分方程的求解过程都可以转化为算子的不动点问题。

1967 年，Halpern 提出迭代算法：$x_{n+1}=\alpha_n\mu+(1-\alpha_n)Tx_n$，其中 Ω 是 Hilbert 空间 H 或 Banach 空间 X 中的闭凸子集，$T:\Omega\to\Omega$ 为非扩张映像，证明了 Halpern 迭代在满足条件(1) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 和(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 时，强收敛于 T 的不动点。

近十年来，非线性算子不动点迭代算法的研究获得蓬勃发展，成果非常丰硕。从最基本粘滞迭代：

*基金项目：中央高校基本科研业务费资助项目：几类非线性算子不动点迭代算法及其应用(ZXH2009D021)；中国民航大学校级科研项目(No.2010kys02)。

$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Tx_n$，发展到最一般迭代格式：$x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\mu F)Tx_n$。我们将对其发展过程以及相互联系进行深刻的阐述。

Mann 迭代用于逼近非扩张映像的不动点, 但是 Mann 迭代序列具有弱收敛性而不具有强收敛性。为了克服 Mann 迭代的弱收敛性，许多学者对 Mann 迭代进行修正，得到了强收敛性。我们将对各种修正算法进行系统的说明。在实际应用中，粘滞迭代已被广泛用于求解均衡问题、变分不等式问题及严格伪压缩算子不动点的公共元素。这也是我们的一个工作重心。

2. 主要结论

2.1. 粘滞迭代格式

2000 年，Moudafi 发表一篇题为“Viscosity Approximation Methods for Fixed-Point Problems” [1]的文章，旨在对已知非扩张自映射求解其不动点提供一个有效的迭代方法。

其大意如下：设 H 为实 Hilbert 空间，$C\subset H$ 为非空闭凸集，$T:C\to C$ 非扩张，f 是集合 C 上的压缩映射，$\{x_n\}$ 由如下迭代方法产生：

$$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Tx_n,\quad n\ge 0$$

其中 $\{\alpha_n\}\subset[0,1]$。当 α_n 满足一定条件时，对于任取的 $x_0\in C$，迭代格式产生的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的不动点。

2004 年，Hong-Kun Xu 针对 Moudafi 提出的粘滞迭代, 在“Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings” [2]中对 $\{x_n\}$ 的强收敛性给出了经典证明。这篇论文有两方面的贡献: 首先，Hong-Kun Xu 延伸了 Moudafi[1]在 Hilbert 空间下的结果；另外，还证明了在一直光滑 Banach 空间下，$\{x_n\}$ 强收敛的的事实。

我们对 Hong-Kun Xu 关于粘滞迭代方法相关结论简要阐述。

2.1.1. 在 Hilbert 空间下的收敛

定理 2.1.1[2] 设 H 为 Hilbert 空间，$\{x_t\}$ 由 $x_t=tf(x_t)+(1-t)Tx_t$ 产生，且满足：$C\subset H$ 为非空闭凸集，$T:C\to C$ 非扩张映像，f 是集合 C 上的压缩映射，$\{\alpha_n\}\subset[0,1]$，$x_0\in C$ 任意取定。我们有如下结论：

(a) $\|x_t-x^*\|\to 0$，且 $x^*\in C$；

(b) $x^*=P_S f(x^*)$ 或者 x^* 是以下变分不等式在 $Fix(T)$ 上的唯一解：

$$\langle (I-f)x^*, x-x^*\rangle\ge 0,\quad x\in C$$

其中，$S=Fix(T)$，P_S 是 H 到 S 上的度量投影。

定理 2.1.2[2] 设 H 为 Hilbert 空间，C 是 H 的非空闭凸子集，$T:C\to C$的非扩张映射，并且 $Fix(T)\ne\varnothing$，$f:C\to C$ 为压缩映射。$\{x_n\}$ 由如下格式得到：

$$\begin{cases} x_0\in C \\ x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Tx_n,\quad n\ge 0\end{cases}$$

其中 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$, 并且满足：

(a) $\alpha_n\to 0$；

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$ 或者 $\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}/\alpha_n)=1$。

那么，$x_n\to x^*$, 其中 x^* 是变分不等式 $\langle (I-f)x^*, x-x^*\rangle\ge 0$，$x\in C$ 的唯一解。

2.1.2. 在 Banach 空间下的收敛

设 X 是 Banach 空间，C 是 X 的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是非扩张映射，且 $Fix(T)\ne\varnothing$，$\langle (I-f)Q(f), J(Q(f)-p)\rangle\le 0,\ p\in Fix(T)$，$f:C\to C$ 的压缩映射。设 $x_t\in C$ 是压缩映射 $x\to tf(x)+(1-t)Tx$ 在 C 上的不动点，则：

$$x_t=tf(x_t)+(1-t)Tx_t。$$

定理 2.1.3[2] 设 X 是一致光滑的 Banach 空间，C 是 X 的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是非扩张映射，且 $Fix(T)\ne\varnothing$，$f:C\to C$ 是压缩映射，由上式产生的 $\{x_t\}$ 强收敛于 $Fix(T)$ 中的一点。定义

$$Q: f\to Fix(T)：\ Q(f):=\lim_{t\to 0}x_t$$

$Q(f)$ 用于求解变分不等式：
$\langle Q(u)-u, J(Q(u)-p)\rangle\le 0, u\in C, p\in Fix(T)$。

特别地，如果 $f=u\in C$ 是连续的，那么 $Q(f)$ 从 C 收敛到不动点集合 $Fix(T)$ 上，并且满足：
$\langle Q(u)-u, J(Q(u)-p)\rangle\le 0, u\in C, p\in Fix(T)$。

定理 2.1.4[2] 设 X 是一致光滑的 Banach 空间，C 是 X 的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 的非扩张映射，并且 $Fix(T)\neq\varnothing$， $f:C\to C$ 是压缩映射，当 $\{x_n\}$ 序列由如下格式产生：

$$\begin{cases} x_0\in C \\ x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Tx_n, \quad n\geq 0 \end{cases}$$

其中 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$，并且满足：

$(a)\ \alpha_n\to 0$； $(b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；

$(c)\ \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$ 或者 $\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}/\alpha_n)=1$。

那么，$\{x_n\}$ 强收敛于 $Q(f)$。

2.2. 粘滞迭代方法的进一步发展

2005 年 Giuseppe Marino 和 Hong-Kun Xu 在“A general iterative method for nonexpansive mappings in Hilbert spaces” [3]中提出了迭代算法：

$$x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n A)Tx_n, \quad n\geq 0$$

当 γ, f, A 满足一定约束条件，得到 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x^*\in Fix(T)$ 的结论。不仅如此，x^* 也是变分不等式的解：$\langle(\gamma f-A)x^*, x-x^*\rangle\leq 0, \quad \forall x\in Fix(T)$。

粘滞迭代已经被应用到凸优化问题。比较典型的是：在实 Hilbert 空间中，针对非扩张映射不动点集合，求解二次函数的最优解[4]：

$$\min_{x\in C}\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-\langle x,b\rangle$$

其中，C 是非扩张映射 T 到 H 上的不动点集合，$b\in H$ 是取定的，A 是强正有界线性的算子，即：$\langle Ax,x\rangle\geq\bar{\gamma}\|x\|^2, \forall x\in H$。由下面的迭代格式产生的 $\{x_n\}$ 强收敛于上述二次函数的最优解：

$$\begin{cases} x_0\in H \\ x_{n+1}=\alpha_n b+(I-\alpha_n A)Tx_n, \quad n\geq 0 \end{cases}$$

Giuseppe Marino 和 Hong-Kun Xu 将上述迭代算法与 Moudafi 提出的粘滞迭代结合起来，提出了如下一般迭代格式[3]：

$$\begin{cases} x_0\in H \\ x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n A)Tx_n, \quad n\geq 0 \end{cases}$$

当 $0<\gamma<\bar{\gamma}/\alpha$，$A$ 满足 $\langle Ax,x\rangle\geq\bar{\gamma}\|x\|^2, \forall x\in H$，并且参数 $\{\alpha_n\}$ 满足下述条件：

$(a)\ \alpha_n\to 0$； $(b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；

$(c)\ \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$ 或者 $\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}/\alpha_n)=1$。

那么，由上述迭代格式产生的 $\{x_n\}$ 强收敛于变分不等式的唯一解：

$$\langle(A-\gamma f)x^*, x-x^*\rangle\geq 0, \quad x\in C$$

同时也满足问题的最优化条件：$\min_{x\in C}\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-h(x)$。

其中：h 是 γf 的势函数($h'(x)=\gamma f(x), \forall x\in H$)。

2.3. 混合最速下降法与粘滞迭代

2001 年，Yamada 为了求解变分不等式：

$$\langle Fx^*, x-x^*\rangle\geq 0, \ \forall x\in Fix(T)$$

提出了如下混合最速下降法[4]：

$x_{n+1}=Tx_n-\mu\alpha_n FT(x_n)$。回顾粘滞迭代：

$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Tx_n$。

不难发现，混合最速下降法和粘滞迭代算法所需的参数类似，以及在类似的条件假设下，有相似的结论——都强收敛于对应变分不等式的唯一解。因此，我们联想到二种方法之间是不是有什么内在的联系，然而这个问题一直没有得到解决。直到 2010 年，Ming Tian 经过认真研究，发现了他们之间的联系——混合最速下降法本质上属于粘滞迭代。

我们在此对这个结论简单进行说明。

定理 2.3.1 设 H 是实 Hilbert 空间，$F:H\to H$ 为 $k-Lipschitz$ 连续映射，也是 η−强单调映像，其 $k>0$，$\eta>0$，$0<\mu<\frac{2\eta}{k^2}$，则混合最速下降法隶属于粘滞迭代。

证明：我们对混合最速下降法作如下变型：

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=Tx_n-\mu\alpha_n FT(x_n) \\ &=Tx_n-\mu\alpha_n FT(x_n)+\alpha_n Tx_n-\alpha_n Tx_n \\ &=\alpha_n(I-\mu F)Tx_n+(1-\alpha_n)Tx_n \end{aligned}$$

将 $(I-\mu F)T$ 用 G 表示，即是：$G=(I-\mu F)T$。

要证明混合最速下降法属于粘滞迭代，只需证明 G 是一个压缩映射。不难验证：

$$\begin{aligned}\|Gx-Gy\|^2 &= \|(I-\mu F)Tx-(I-\mu F)Ty\|^2 \\ &= \langle Tx-Ty-\mu(FTx-FTy), \\ &\quad Tx-Ty-\mu(FTx-FTy)\rangle \\ &\le \left(1-\mu\left(2\eta-\mu k^2\right)\right)\|x-y\|^2\end{aligned}$$

我们得到：$\|Gx-Gy\|\le\left(1-\mu\left(2\eta-\mu k^2\right)\right)^{1/2}\|x-y\|$。

已知有：$k>0$，$\eta>0$，$0<\mu<\dfrac{2\eta}{k^2}$，

因此:

$$\begin{aligned}&\langle x-y,(\mu F-\lambda f)x-(\mu F-\lambda f)y\rangle \\ &\ge(\mu\eta-\gamma\alpha)\|x-y\|^2,\quad \forall x,y\in H\end{aligned}$$

所以，G 是一个压缩映射，得证。

2.4. 最一般粘滞迭代格式

基于混合最速下降法与粘滞迭代的关系，以及对上述结果的总结, 2010 年，Ming Tian 对混合最速下降法和 G. Marino 和 Hong-Kun Xu 提出的方法综合考虑，提出了关于非扩张算子最一般迭代算法[5]：$x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\mu\alpha_n F)Tx_n$。

当迭代格式中参数$\{\alpha_n\}$满足一定条件时，迭代格式产生的$\{x_n\}$强收敛于变分不等式的唯一解 $x^*:\langle(\gamma f-\mu F)x^*,x-x^*\rangle\le 0,\forall x\in Fix(T)$。

要得到上述结论，需要下述引理：

引理 2.4.1[6] 设$\{\alpha_n\}$是非负实数，满足：$a_{n+1}\le(1-\gamma_n)a_n+\delta_n$。其中，$\gamma_n\in(0,1)$，$\{\delta_n\}\in R^1$，并且满足：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\infty$；

(2) $\limsup_{n\to\infty}\delta_n/\gamma_n\le 0$或者$\sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n|<\infty$。

那么，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

引理 2.4.2[7] 设H为 Hilbert 空间，C是H的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是非扩张映射，并且 $Fix(T)\ne\varnothing$。如果$\{x_n\}\in C$弱收敛于x，$\{(I-T)x_n\}$强收敛于y，则：$(I-T)x=y$。

引理 2.4.3[5] 设H是实 Hilbert 空间，$F:H\to H$ 的 $k-Lipschitz$ 连续映射，也是$\eta-$强单调映像。$f:H\to H$ 的压缩映像，压缩系数为α。其中：

$$k>0,\quad \eta>0,\ 0<\mu<\frac{2\eta}{k^2}$$

$$\forall\ 0<\gamma<\mu\left(\eta-\frac{\mu k^2}{2}\right)\Big/\alpha=\tau/\alpha$$

那么：

$$\begin{aligned}&\langle x-y,(\mu F-\gamma f)x-(\mu F-\gamma f)x\rangle \\ &\ge(\mu\eta-\gamma\alpha)\|x-y\|^2,\quad \forall x,y\in H\end{aligned}$$

即：$\mu F-\gamma f$ 是 $\mu\eta-\gamma\alpha$ 的强单调映射。

引理 2.4.4 设H为 Hilbert 空间，C是H的非空闭凸子集。取$x\in H$，$y\in K$，那么$y=P_K x$当且仅当$\langle x-y,y-z\rangle\ge 0$，$\forall z\in K$。

其中：$P_C x$ 定义为$\|x-P_K x\|=\inf\{\|x-y\|:y\in K\}$。

引理 2.4.5[5] 设 $S_t x=t\gamma f(x)+(I-t\mu F)Tx$，$\forall x\in H$。其中：$\gamma$，$f$，$F$，$T$ 满足引理 2.4.2，引理 2.4.3 中的条件。经过简单推导，可以发现：

$$\begin{aligned}\|S_t x-S_t y\| &= t\gamma\|f(x)-f(y)\| \\ &\quad+\|(I-t\mu F)Tx-(I-t\mu F)Ty\| \\ &\le\left(1-t(\tau-\gamma\alpha)\right)\|x-y\|\end{aligned}$$

即：S_t 是压缩映像。

2.4.1. 基本结论

定理 2.4.1[5] 设$\{x_n\}$由

$$x_t=t\gamma f(x)+(I-t\mu F)Tx_t$$

迭代产生，当$t\to 0$时，T 的不动点是变分不等式的解：

$$\langle(\gamma f-\mu F)x^*,z-x^*\rangle\le 0,\quad \forall z\in Fix(T)$$

我们还可以得到：$P_{Fix(T)}(I-A+\gamma f)x^*=x^*$。

定理 2.4.2[5] 设迭代序列$\{x_n\}$由如下迭代格式得到：

$$\begin{cases}x_0\in C \\ x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n\mu F)Tx_n,n\ge 0\end{cases}$$

其中：$\{\alpha_n\}\subset(0,1)$，并且满足：

$(a)\ \alpha_n\to 0$；$(b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；

$(c)\ \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$ 或者 $\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}/\alpha_n)=1$。

当γ，f，F，T 满足引理 2.4.2，引理 2.4.3 中的性质，且$\{\alpha_n\}$符合以上 3 个条件，则$\{x_n\}$强收敛于定理 2.4.1 中得到的 x^*。

2.4.2. 一般性推广

推论 1 令 $F=A$，$\mu=1$，我们得到如下形式:

$$\left\langle (A-\gamma f)\hat{x}, z-\hat{x}\right\rangle \ge 0,\quad z\in Fix(T)$$

并且有：$P_{Fix(T)}(I-A+\gamma f)\hat{x}=\hat{x}$。

这是 Giuseppe Marino 和 Hong-Kun Xu 提出的粘滞迭代的一般性结论。

推论 2 令 $F=I$，$\mu=1,\gamma=1$。设 $x_t\in H$ 是压缩映像 $x=tf(x)+(1-t)Tx$ 的不动点，当 $t_n\to 0$ 时，x_t 强收敛于变分不等式的唯一解 $x^*\in Fix(T)$：

$$\left\langle (I-f)x^*, x^*-x\right\rangle \le 0,\quad \forall x\in Fix(T)$$

这是最基本粘滞迭代方法求解的变分不等式。

3. 主要应用

3.1. 对非扩张算子 Mann 迭代方法的修正

Mann 迭代于 1953 年由 Mann 引入，之后人们一直关注 Mann 迭代的强收敛性。1975 年，以色列一位数学家在 l^2 中找到一个反例，Mann 迭代具有弱收敛性而不具备强收敛性。此后，一些学者的工作围绕如何对 Mann 迭代进行适当的修正以便得到迭代序列的强收敛性。

为了克服标准 Mann 迭代格式逼近非扩张映像不动点只有弱收敛性的缺陷，经过多年的研究，科研工作者对非扩张算子 Mann 迭代格式的修正过程如下：

Nakajo 和 Takahashi 提出[12]：

设 H 为 Hilbert 空间，$C\subset H$ 为非空闭凸集，$T:C\to C$ 为非扩张映射，并且 T 有不动点，迭代序列 $\{x_n\}$ 有如下格式产生：

$$\begin{cases} x_0\in C & \text{任意取定}\\ y_n=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)Tx_n \\ C_n=\left\{z\in C \,\middle|\, \|y_n-z\|\le\|x_n-z\|\right\} \\ Q_n=\left\{z\in C \,\middle|\, \langle z-x_n, x_0-x_n\rangle\le 0\right\} \\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}(x_0),\quad n\ge 0\end{cases}$$

若存在 α 满足 $0\le\alpha<1$，使得 $\{\alpha_n\}\subset[0,\alpha]$，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的不动点 $P_{F(T)}(x_0)$。这种算法的思想性很强，几何直观鲜明，缺点是每一步迭代增加了投影算法，计算量较大，且算法不容易实现。

Kim 和 Hong-Kun Xu 提出[8]：

设 H 为 Hilbert 空间，$C\subset H$ 为非空闭凸集，$T:C\to C$ 为非扩张映射，并且 T 有不动点，$u\in C$ 任意取定。他们证明，当$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$满足一定条件时，如下格式产生的$\{x_n\}$强收敛于 T 的一个不动点：

$$\begin{cases} x_0=x\in C & \text{任意取定}\\ y_n=\beta_n x_n+(1-\beta_n)Tx_n \\ x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)y_n,\quad n\ge 0\end{cases}$$

Kim 和 Hong-Kun Xu 提出一个简单对 Mann 迭代的修改。修改后的 Mann 迭代是一个固定的点凸组合，避免了[9]中所涉及的投影，计算量大大减少, 并且结论在 Banach 空间也成立，但是[9]中算法并没有完全推广到 Banach 空间。

Yao et al.[10]对 Mann 迭代进行了如下修正：

设 H 为实 Hilbert 空间，$T:K\to K$ 的非扩张映像，f 是 K 上的压缩映射。当$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$满足一定条件时，他们得到$\{x_n\}$强收敛的结论：

$$\begin{cases} x_0=x\in K & \text{任意取定}\\ y_n=\beta_n x_n+(1-\beta_n)Tx_n \\ x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)y_n,\quad n\ge 1\end{cases}$$

Yao et al.将 Mann 迭代和由 Moudafi 提出的粘滞迭代方法结合起来，作出上述修正，并且证明了$\{x_n\}$强收敛于 T 的不动点。当 f 是一个常值函数，则上述迭代方式退化为 Kim 和 Hong-Kun Xu 提出的修正算法。

Giuseppe Marino 和 Hong-Kun Xu 提出[3]：

设 H 为实 Hilbert 空间, T 是 $H\to H$ 的非扩张映像，并且不动点集合非空，A 是 H 上强正有界线性的算子。他们得出，下述定义的$\{x_n\}$强收敛于 T 的不动点，同时，T 不动点也是下述变分不等式的唯一解：

$$\left\langle (\gamma f-A)x^*, x-x^*\right\rangle \le 0,\quad \forall x\in Fix(T)$$

同时也是某些最优化问题的最优解：

$$\begin{cases} x_0\in H \\ x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n A)Tx_n,\quad n\ge 0\end{cases}$$

在[11]中，下述格式产生的$\{x_n\}$强收敛于最优化问题$\min_{x\in C}\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-\langle x,b\rangle$的唯一解：

$$x_{n+1}=\alpha_n b+(I-\alpha_n A)Tx_n,\quad \forall n\ge 0$$

Giuseppe Marino 和 Hong-Kun Xu 巧妙地将上述迭代方法和 Moudafi 提出的粘滞迭代结合起来，证明$\{x_n\}$不仅仅是变分不等式的解：

$$\langle(\gamma f-A)x^*,x-x^*\rangle\le 0,\quad \forall x\in Fix(T)$$

同时也是最优化问题$\min_{x\in C}\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-\langle x,b\rangle$的最佳元。

为了阐述下面提到的修正方法，我们给出k−严格伪压缩映像定义：设T是 Hilbert 空间的非空集合，$T:K\to H$的k−严格伪压缩映像是指，若存在$k\in[0,1)$使得下式成立，

$$\|Tx-Ty\|^2\le\|x-y\|^2+k\|(I-T)x-(I-T)y\|^2,\forall x,y\in K$$

Zhou[12]修正了标准 Mann 迭代，他得出：当T为k−严格伪压缩映像，$\{x_n\}$在 Hilbert 空间下强收敛。不难验证非扩张映像属于k−严格伪压缩映像。 Zhou 的修正算法大大扩展了标准 Mann 迭代的适用范围。

Xiaolong Qin，Meijuan Shang，Shin Min Kang 提出了如下复合迭代方案[13]：

设H为实 Hilbert 空间，$T:K\to H$的k−严格伪压缩映像，并且$Fix(T)\ne\varnothing$，f是C上的压缩映射。A是H上强正有界线性算子，当$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$满足一定条件时，$\{x_n\}$如下格式得到：

$$\begin{cases}x_1=x\in K\\ y_n=P_k\left[\beta_n x_n+(1-\beta_n)Tx_n\right]\\ x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(x_n)+(I-\alpha_n A)y_n,\quad n\ge 1\end{cases}$$

则：$\{x_n\}$强收敛到T不动点，并且可以求解变分不等式：

$$\langle(\gamma f-A)x^*,x-x^*\rangle\le 0,\quad \forall x\in Fix(T)$$

此算法是对 ZHOU 以及 Giuseppe Marino 和 Hong-Kun Xu 提出的修正 Mann 迭代的进一步修正，他们都可以作为此算法的一个特例。很显然，一个映射T是非扩张的，当且仅当T是0−严格伪压缩映像。当$\{\beta_n\}=0$时，修正算法退化为 Giuseppe Marino 和 Hong-Kun Xu 提出的修正方案。

3.2. 粘滞迭代求解均衡问题、变分不等式及严格伪压缩算子不动点的公共元素

定义 3.2.1 设H为 Hilbert 空间，C是H的非空闭凸子集，$S:C\to C$是非扩张映射。记S的不动点集合为$F(S)$。设$F:C\times C\to R$的二元函数。均衡问题：是指对于二元函数F，寻找$x\in C$，使得下面不等式成立：

$$F(x,y)\ge 0,\quad \forall y\in C$$

记均衡问题的解集为$EP(F)$。其中，F满足下列条件：

$(A1)$ $F(x,x)=0,\forall x\in C$；

$(A2)$ F单调，即：$F(x,y)+F(y,x)\le 0,\forall x,y\in C$；

$(A3)$ $\forall x,y,z\in C,\lim_{t\to 0}F(tz+(1-t)z,y)\le F(x,y)$；

$(A4)$ $\forall x\in C,\ y\to F(x,y)$是凸下半连续；

变分不等式问题：设$A:C\to H$非线性映射，寻找$x\in C$满足$\langle Ax,y-x\rangle\ge 0$，$\forall y\in C$。

记变分不等式问题为$VI(A,C)$。

给定映射$T:C\to H$，我们令$F(x,y)=\langle Tx,y-x\rangle$对任意的$x,y\in C$成立。那么$z\in EP(F)$当且仅当$\langle Tz,y-z\rangle\ge 0$对任意的$y\in C$，则$z$是变分不等式的解。因此，均衡问题和变分不等式在满足一定条件时，存在公共元素。我们知道，粘滞迭代算法可用于变分不等式的求解。因此，针对均衡问题、变分不等式及严格伪压缩算子不动点的公共元素，近年来，一些学者提出下述迭代算法：

引理 3.2.1[14] 设$F:C\times C\to R$的二元函数，且满足定义 3.2.1 中的$(A1)$ $(A2)$ $(A3)$ $(A4)$，那么$\forall r>0$和$x\in H$，存在$z\in C$，使得：

$$F(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,z-x\rangle\ge 0,\quad \forall y\in C$$

如果

$$T_r x=\left\{z\in C:F(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,z-x\rangle\ge 0,\forall y\in C\right\}$$

则：

(1) T_r是单值；

(2) T_r是强非扩张的，即是：

$$\left\|T_r x - T_r y\right\| \le \left\langle T_r x - T_r y, x - y\right\rangle, \forall x, y \in H$$

(3) $F\left(T_r\right) = EP\left(F\right)$；

(4) $EP\left(F\right)$是闭凸集；

Satoru Takahashi，Wataru Takahashi 提出如下迭代算法[15]：

设 C 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集。$F: C\times C \to R$ 二元函数，并且满足 $(A1)$ $(A2)$ $(A3)$ $(A4)$，S 是 C 到 H 非扩张映射，$F\left(S\right)\cap EP\left(F\right)\ne\varnothing$。$f$ 是 H 上的压缩映射。$\left\{x_n\right\}$ 和 $\left\{u_n\right\}$ 由如下格式产生：

$$\begin{cases} x_1 \in H \\ F\left(u_n, y\right) + \dfrac{1}{r_n}\left\langle y - u_n, u_n - x_n\right\rangle \ge 0, \quad \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f\left(x_n\right) + \left(1-\alpha_n\right) S u_n, \quad \forall n \in N \end{cases}$$

当 $\left\{\alpha_n\right\} \subset [0,1]$，$\left\{r_n\right\} \subset (0,\infty)$，并满足：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\alpha_{n+1} - \alpha_n\right| < \infty$；

(4) $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n > 0$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|r_{n+1} - r_n\right| < \infty$。

那么，$\left\{x_n\right\}$ 和 $\left\{u_n\right\}$ 强收敛于 $z \in F\left(S\right)\cap EP\left(F\right)$，$z = P_{F(S)\cap EP(F)} f\left(z\right)$。

Ying Liu 提出如下迭代算法[16]：

设 C 是 Hilbert 空间 H 上非空的闭凸集。$F: C\times C \to R$ 的二元函数，并且满足 $(A1)$ $(A2)$ $(A3)$ $(A4)$，$S: C \to H$ 的 k −严格伪压缩映像，$F\left(S\right)\cap EP\left(F\right)\ne\varnothing$。$f$ 是 H 上的压缩映射。B 是 H 上的强正有界线性算子满足 $\left\langle Bx, x\right\rangle \ge \overline{\gamma}\left\|x\right\|^2$，且 $0 < \gamma < \overline{\gamma}/\beta$。$\left\{x_n\right\}$ 和 $\left\{u_n\right\}$ 由如下格式产生：

$$\begin{cases} x_1 \in H \\ F\left(u_n, y\right) + \dfrac{1}{r_n}\left\langle y - u_n, u_n - x_n\right\rangle \ge 0, \quad \forall y \in C \\ y_n = \beta_n u_n + \left(1-\beta_n\right) S u_n \\ x_{n+1} = \alpha_n \gamma f\left(x_n\right) + \left(1 - \alpha_n B\right) y_n, \quad \forall n \in N \end{cases}$$

其中，$u_n = T_{\lambda_n} x_n$，$y_n = S_n u_n$，若 $\left\{\alpha_n\right\}$ 和 $\left\{\beta_n\right\}$ 满足如下条件：

$$\begin{cases} \left\{\alpha_n\right\} \subset \left(0,1\right); \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0;\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty;\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\alpha_{n+1} - \alpha_n\right| < \infty \\ 0 \le k \le \beta_n \le \lambda < 1; \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \lambda;\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\beta_{n+1} - \beta_n\right| < \infty \\ \left\{\lambda_n\right\} \subset \left(0,\infty\right), \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0;\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\lambda_{n+1} - \lambda_n\right| < \infty \end{cases}$$

那么，$\left\{x_n\right\}$ 和 $\left\{u_n\right\}$ 强收敛于 $q \in F\left(S\right)\cap EP\left(F\right)$，同时 q 也是变分不等式的解：

$$\left\langle \left(B - \gamma f\right) q, p - q\right\rangle \ge 0, p \in F\left(S\right)\cap EP\left(F\right)$$

可以看出：当 S 是非扩张映射，当然也是严格伪压缩映射的特例，$\left\{\beta_n\right\} = 0$，$\gamma = 1$，$B = 1$时，上述格式退化为 Satoru Takahashi，Wataru Takahashi 格式。

参考文献 (References)

[1] A. Moudafi. Viscosity approximation methods for fixed-points problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 241: 45-55.

[2] H. K. Xu. Viscosity approximation methods for nonexpansive mapping. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 298: 279-291.

[3] G. Marino, H. K. Xu. An general iterative method for nonexpansivemappings in Hilbert spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 318: 43-52.

[4] I. Yamada. The hybrid steepest descent method for the inequalityproblem of the intersection of fixed point sets of nonexpansivemappings, in: D. Butnariu, Y. Censor, S. Reich Eds., Inherently Parallel Algorithm for Feasibility and Optimization, Elsevier, 2001: 473-504.

[5] M. Tian. A general iterative algorithm for nonexpansive mappingsin Hilbert spaces. Nonlinear Analysis, 2010, 73: 689-694.

[6] H. K. Xu. Iterative algorithms for nonlinear operators. Journal of the London Mathematical Society, 2002, 66: 240-256.

[7] K. Geobel, W. A. Kirk. Topics in metric fixed point theory, Cambridge study advance mathematics. Cambridge University Press, 1990.

[8] T. H. Kim, H. K. Xu. Strong convergence of modified Mann iterations. Nonlinear Analysis, 2005, 61: 51-60.

[9] K. Nakajo, W. Takahashi. Strong convergence theorems for nonex pansive mappings and none xpansive semigroups. Nonlinear Analysis, 2003, 279: 372-397.

[10] Y. Yao, R. Chen, J. C. Yao. Strong convergence and certain control conditions for modified Mann iteration. Nonlinear Analysis, 2007.

[11] H. K. Xu. An iterative approach to quadratic optimization. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 116: 659-678.

[12] H. Zhou. Convergence theorems of fixed points for k-strict pseudo-contractionins Hilbert space. Nonlinear Analysis, 2007

[13] X. L. Qin, M. J. Shang, and S. M. Kang. Strong convergencetheorems of modified Mann I terative process for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces. Nonlinear Analysis, 2009, 70: 1257-1264.

[14] P. L. Combettes, S. A. Hirstoaga. Equilibrium programming in Hilbert spaces. Nonlinear Analysis, 2005, 6: 117-136.

[15] S. Takahashi, W. Takahashi. Viscosity approximation methods

for eq-uilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces. Nonlinear Analysis, 2007, 33(1): 506-515.
[16] Y. Liu. A general iterative method for equilibrium problems and strict pse udo-contractions in Hilbert spaces. Nonlinear Analysis, 2009.