*Pure Mathematics* 理论数学, 2013, 3, 107-111
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.32017 Published Online March 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

# The Solutions of Some Inequalities of the Sum of Distinct Divisors Function $\sigma(n)$*

**Li Wu**[1,2], **Shichun Yang**[1]
[1]Department of Mathematics, ABa Teachers College, Wenchuan
[2]College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu
Email: lilihurry@yahoo.com.cn

Received: Dec. 13th, 2012; revised: Jan. 29th, 2013; accepted: Feb. 4th, 2013

**Abstract:** The sum of distinct divisors is a basic and important arithmetical function. In this paper, we extend the conclusions of two open problems proposed by Bencze and prove that, for any given positive integers $k$ and non-zero integers $b$, there exists infinitely many positive integers n such that the following three inequalities hold simultaneously: $\sigma(n)-\sigma(n+b)>kn$, $\sigma(n)>k\sigma(n+1)$ and $\sigma(n)>k\sigma(n-1)$, where $\delta(n)$ denotes the sum of distinct divisors of $n$.

**Keywords:** Sum of Divisors; Positive Integer Solution; Standard Decomposition

# 与约数和函数$\sigma(n)$有关的一些不等式的解*

**吴　莉**[1,2]，**杨仕椿**[1]
[1]阿坝师范高等专科学校数学系，汶川
[2]四川师范大学数学与软件科学学院，成都
Email: lilihurry@yahoo.com.cn

收稿日期：2012 年 12 月 13 日；修回日期：2013 年 1 月 29 日；录用日期：2013 年 2 月 4 日

**摘　要：**约数和函数是一类基本而又重要的数论函数。本文推广了由 Bencze 提出的两个公开问题的结论，证明了对于任意给定的正整数 $k$ 和非零整数 $b$，均存在无穷多个正整数 $n$，使得以下三个不等式同时成立：$\sigma(n)-\sigma(n+b)>kn$，$\sigma(n)>k\sigma(n+1)$，$\sigma(n)>k\sigma(n-1)$，其中$\delta(n)$为任意正整数 $n$ 的不同约数之和。

**关键词：**约数和函数；正整数解；标准分解式

## 1. 引言

对任意 $n\in\mathbf{N}$，设 $n$ 的标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$，令$\sigma(n)$是 $n$ 的约数和，则

$$\sigma(n)=\sigma\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdots\sigma\left(p_2^{\alpha_2}\right)=\prod_{i=1}^{s}\frac{p^{\alpha_i+1}-1_i}{p_i-1}.$$

约数和函数$\sigma(n)$是一类基本而又重要的数论函数，历史上许多著名数学难题都与此函数有关[1,2]，例如，有关完全数的各类问题，$\sigma(n)$与Euler函数$\varphi(n)$的迭代问题等等。在文献[1]中，R. Guy收录了关于约数和函数$\sigma(n)$的一些问题和课题，而P. Erdos[3]，A. Makowski与M. A. Schinzel[4]，柯召、孙琦[5]，G. L. Cohn[6]，D. F. Luca与C. Pomerance[7]，A. Makowski与A. Schinzel[8]，以及C. Pomerance[9]等，分别研究了$\sigma(n)$与$\varphi(n)$的迭代问

*基金项目：四川省应用基础研究项目(2011JYZ0032)，四川省教育厅自然科学研究项目(12ZB002)。

 

题，获得了一系列结果。

2004~2006年，M. Bencze[10,11]提出以下两个公开问题：

**问题 A** 对于任何正整数 $k$，是否都存在无穷多个正整数 $n$，可使不等式

$$\sigma(n) > n + n^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{k}} \tag{1}$$

成立？

**问题 B** 是否存在无穷多个正整数 $n$，可使不等式

$$\sigma(n) > \sqrt{\sigma(n+1)\sigma(n-1)} \tag{2}$$

成立？

随后，乐茂华[12]证明了，对于正整数 $k$，存在无穷多个正整数 $n$ 适合(1)。若令 $p_i$ 为第 $i$ 个素数，由于级数 $\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_i}\right)$ 是发散的，因此文[12]实际上证明了，对于给定的正整数 $k$，均存在无穷多个正整数 $n$ 适合

$$\sigma(n) > kn \tag{3}$$

在文献[13]中，乐茂华证明了，当 $n = 2^p$ 且 $p$ 为素数时，(2)式成立。因此，问题 A、问题 B 的答案都是肯定的。

本文将推广文献[12,13]的结论，研究以下问题：

**问题 1.1** 对于任意给定的正整数 $k$ 和非零整数 $b$，是否存在无穷多个正整数 $n$，使得不等式

$$\sigma(n) - \sigma(n+b) > kn \tag{4}$$

成立？

本文首先给出了问题 1.1 的一个肯定回答，构造性地证明了存在无穷多个正整数 $n$，使得不等式(4)成立。进而，我们提出如下问题：

**问题 1.2** 对于任意给定的正整数 $k$，是否存在无穷多个正整数 $n$，使得不等式

$$\sigma(n) > k\sigma(n+1), \sigma(n) > k\sigma(n-1) \tag{5}$$

同时成立？

本文讨论了问题 1.2，给出了它的一个构造性结果。在最后，我们提出了关于以上问题的进一步加强的一些研究课题。

## 2. 主要结果及证明

**定理 2.1** 对于任意给定的正整数 $k$ 和非零整数 $b$，均存在无穷多个正整数 $n$，使得不等式(4)成立。

**证明** 根据文献[2]的定理1.9.1可知，对于正整数$m$，如果$m$的标准分解式为 $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$，则

$$\sigma(m) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_1^{r_i+1}-1}{p_i - 1} = m\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i}+\cdots+\frac{1}{p_i^{r_i}}\right).$$

令$p_i$为相异的素数，$i = 1,2,\cdots,$ 取 $n = p_1 p_2 \cdots p_s l$，其中$l$为正整数，且 $\gcd(p_1 p_2 \cdots p_s, b) = 1$，使得$n + b$为素数，则

$$\begin{aligned}\sigma(n) - \sigma(n+b) &\ge n\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i}\right) - (n+b+1) \\ &= n\left(\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i}\right) - \left(1+\frac{b+1}{n}\right)\right) > n\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_s}-\frac{b+1}{n}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

根据素数分布的Mertens形式估计的结果，有

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+\beta+O\left(\frac{1}{\log x}\right), \tag{7}$$

其中$\beta$为常数，则级数$\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{p_i}$是发散的，因此对于任意正整数$k$，可取满足$\gcd(p_1p_2\cdots p_s,b)=1$的素数$p_i$，$i=1,2,\cdots,s$，使得

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_s}-\frac{b+1}{n}>k. \tag{8}$$

由(6)、(8)可知，$\sigma(n)-\sigma(n+b)>kn$。又由Dirichlet定理可得[2]，当$\gcd(p_1p_2\cdots p_s,b)=1$时，若$l$为正整数，则形如$p_1p_2\cdots p_sl+b$的素数有无穷多个，因此存在无穷多个正整数$n$，使得不等式(4)成立。

于是定理2.1得证。

在证明定理2.2之前，我们先给出如下引理。

**引理** 若$p$，$q$为素数，$a$为正整数，且$p$满足$p\left|\frac{a^q+1}{a+1}\right.$，或$p\left|\frac{a^q-1}{a-1}\right.$，则$p\equiv 1(\bmod 2q)$。

**证明** 见文献[2]中p22-23。

**定理 2.2** 对于任意给定的正整数 $k$，均存在无穷多个正整数 $n$，使得不等式 $\sigma(n)>k\sigma(n+1)$，$\sigma(n)-\sigma(n-1)>kn$ 同时成立。

**证明** 令 $n=a^q$，其中 $q$ 为奇素数，$p_i$ 为第 $i$ 个素数，$i=1,2,\cdots$，取 $a=p_1p_2\cdots p_m$，且 $a+1$ 的标准分解式为 $a+1=q_1^{\alpha_1}\cdots q_s^{\alpha_s}$，$\frac{n+1}{a+1}$ 的标准分解式为 $\frac{a^q+1}{a+1}=r_1^{\beta_1}\cdots r_t^{\beta_t}$。由引理可得，$q_j\equiv 1(\bmod 2q)$，由于 $\gcd\left(a+1,\frac{a^q+1}{a+1}\right)\Big|q$，则 $\gcd\left(a+1,\frac{a^q+1}{a+1}\right)=1$。于是

$$\begin{aligned}\sigma(n+1)&=\sigma(a+1)\sigma\left(\frac{a^q+1}{a+1}\right)\\&=\left(a^q+1\right)\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{q_i}+\cdots+\frac{1}{q_i^{\alpha_i}}\right)\cdot\prod_{i=1}^{t}\left(1+\frac{1}{r_i}+\cdots+\frac{1}{r_i^{\beta_i}}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

由于$(q_j,a)=1$，则$q_j>p_m$，令$\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_s$，则$a+1>p_m^{\alpha}$，即$a\ge p_m^{\alpha}$，则

$$s\le\alpha<\frac{\log a}{\log p_m}<\frac{\log p_1+\cdots+\log p_m}{\log p_m}<m,$$

因此，

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{q_i}+\cdots+\frac{1}{q_i^{\alpha_i}}\right)<\prod_{i=1}^{s}\frac{q_i}{q_i-1}\\&<\frac{p_{m+1}}{p_{m+1}-1}\cdot\frac{p_{m+1}+2}{p_{m+1}+1}\cdots\frac{p_{m+1}+2m}{p_{m+1}+2m-2}<\frac{p_{m+1}+2m}{p_{m+1}-1}<2.\end{aligned} \tag{10}$$

令$\beta=\beta_1+\cdots+\beta_s$，由于$r_j\ge 2q+1$，则$\frac{a^q+1}{a+1}\ge(2q+1)^{\beta}$，由于$q>a^r$，则

 

$$\beta < \frac{q\log a}{\log(2q+1)} < \frac{q\log a}{\log(a^r+1)} < \frac{q}{r},$$

因此

$$\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{q_i}+\cdots+\frac{1}{q_i^{\alpha_i}}\right) < \prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{q_i}\right)^{\alpha_i} < \left(1+\frac{1}{2q+1}\right)^{\alpha} < \left(1+\frac{1}{2q+1}\right)^{\frac{q}{r}} < \mathrm{e}^{\frac{1}{r}} \tag{11}$$

其中 e 为自然对数的底。于是由(9)~(11)可得，

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)} &= \frac{a^q}{a^q+1}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1+\frac{1}{p_i}\right)}{\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{q_i}+\cdots+\frac{1}{q_i^{\alpha_i}}\right)\cdot\prod_{i=1}^{s}\left(1+\frac{1}{r_i}+\cdots+\frac{1}{r_i^{\beta_i}}\right)} \\ &> \frac{a^q}{a^q+1}\cdot\prod_{i=1}^{m}\left(1+\frac{1}{p_i}\right)\cdot\frac{1}{2\mathrm{e}} > \frac{1}{6}\prod_{i=1}^{m}\left(1+\frac{1}{p_i}\right) > \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i} \end{aligned} \tag{12}$$

由(7)式可得，$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}$ 可以任意大，因此，对于任意给定的正整数 $k$，均存在无穷多个正整数 $n$，使得 $\sigma(n) > k\sigma(n+1)$。

用同样的方法，利用引理同理可证，取 $a = p_1p_2\cdots p_m$，$n = a^q$，其中 $q$ 为奇素数，$p_i$ 为第 $i$ 个素数，$i = 1,2,\cdots$，必有

$$\frac{\sigma(n)}{\sigma(n-1)} > \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i},$$

因此，对于任意给定的正整数 $k$，均存在无穷多个正整数 $n$，使得 $\sigma(n) > k\sigma(n-1)$。

定理 2.2 得证。

## 3. 进一步的问题

由定理 2.1 与定理 2.2 可知，问题 1.1 和问题 1.2 的解答是肯定的。那么，该类问题可否进一步推广呢？我们提出如下进一步的研究问题和课题：

**问题 3.1** 对于任意给定的正整数 $k$ 和非零整数 $b_1$，$b_2$，且 $b_1 \neq b_2$，是否存在无穷多个正整数 $n$，使得不等式

$$\sigma(n) > k\sigma(n+b_1), \sigma(n) > k\sigma(n+b_2) \tag{13}$$

同时成立？

**问题 3.2** 对于任意给定的正整数 $k$ 和非零整数 $b_1$，$b_2$，且 $b_1 \neq b_2$，是否存在无穷多个正整数 $n$，使得不等式

$$\sigma(n) - \sigma(n+b_1) > kn, \sigma(n) - \sigma(n+b_2) > kn \tag{14}$$

同时成立？

## 4. 结论

本文研究 M. Bencze 提出的两个关于约数和函数 $\sigma(n)$的公开问题的进一步推广问题，证明了对于任意给定的正整数 $k$，存在无穷多个正整数 $n$，使得不等式 $\sigma(n) - \sigma(n+b) > kn$ 成立，以及不等式 $\sigma(n) > k\sigma(n+1)$，$\sigma(n) - \sigma(n-1) > kn$ 同时成立。定理 2.1 和 2.2 这两个结论，显然加强了 M. Bencze 的问题 A 和问题 B，获得了关于约数和函数 $\sigma(n)$的一类不等式的相关结论。在最后，我们提出了一些待进一步研究的问题。

## 参考文献 (References)

[1] R. K. Guy. Unsolved problems in number theory. New York: Springer-Verlag, 1981: 25-56.
[2] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1979: 13-14.
[3] P. Erdos. Remarks on number theory II: Some problems on the $\sigma$ function. Acta Arithmetica, 1959, 5: 171-177.
[4] A. Makowski, M. A. Schinzel. On the functions $\sigma(n)$ and $\varphi(n)$. Colloquium Mathematicum, 1964, 113: 95-99.
[5] 柯召, 孙琦. 论一类型积性数论函数方程[J]. 四川大学学报(自然科学版), 1965, 2(1): 1-10.
[6] G. L. Cohn. On a conjecture of Makowski and Schinzel. Colloquium Mathematicum, 1994, 74: 1-8.
[7] D. F. Luca, C. Pomerance. On some problems of Makowski-Schinzel and Erdos concerning the arithmetical functions $\varphi$ and $\sigma$. Colloquium Mathematicum, 2002, 92(1): 111-130.
[8] A. Makowski, A. Schinzel. On the functions $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$. Colloquium Mathematicum, 1965, 13(1): 95-99.
[9] C. Pomerance. On the composition of the arithmetic functions $\varphi$ and $\sigma$. Colloquium Mathematicum, 1989, 58: 11-15.
[10] M. Bencze. Open question 2327. Octogon Mathematical Magazine, 2006, 14(2): 872.
[11] M. Bencze. Proposed problem 4935. Octogon Mathematical Magazine, 2004, 12(2B): 824.
[12] 乐茂华. 关于数论函数 $\delta(n)$的一个公开问题[J]. 广东教育学院学报, 2007, 27(5): 9-10.
[13] 乐茂华. 关于数论函数 $\delta(n)$的一个问题[J]. 周口师范学院学报, 2007, 27(5): 1-2.

 