Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 228-233
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33034 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Researches on Phase and Amplitude of Continuous Circular Analytic Signals*

Lihui Tan

School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou
Email: lihuitan@ymail.com

Received: Mar. 27th, 2013; revised: Apr. 21st, 2013; accepted: May 2nd, 2013

Copyright © 2013 Lihui Tan. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: We will show in this paper that a continuous circular analytic signal can not only be represented as a product of a minimum phase signal and a maximum phase signal, but also a product of a minimum phase signal and an all phase signal. Based on the decomposition theorem, we will give some conditions under which a continuous circular analytic signal can be reconstructed from phase or amplitude. Moreover, we will further discuss under what conditions two disconnect circular analytic signals will have the same amplitude.

Keywords: Circular Analytic Signals; Amplitude Preservation; Signal Reconstruction

连续周期解析信号的相位幅度研究*

谭立辉

广东工业大学应用数学学院，广州
Email: lihuitan@ymail.com

收稿日期：2013 年 3 月 27 日；修回日期：2013 年 4 月 21 日；录用日期：2013 年 5 月 2 日

摘　要：在本文中，我们将指出任意连续的周期解信号不仅可以分解为极小相位信号和极大相位信号的乘积，也可以分解为极小相位信号和全相位信号的乘积。在此基础上，我们给出了连续的周期解析信号可以仅由相位信息或者幅度信息重构的条件。更进一步的，我们研究了具有不连通的频带有限的周期解析信号保持幅度不变的条件。

关键词：连续周期解析信号；幅度不变；信号重构

1. 引言

瞬时幅度和相位是信息论中处理调制信号最基本的概念，求这些概念最经典的方法是通过 Hilbert 变换定义的解析信号获得[1]。令 $L^2(T)$ 表示所有以 2π 为周期且满足 $\left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}$ 的函数 $f\left(e^{it}\right)$ 的集合，其中 T 表示单位圆周 $T=\{z\,|\,|z|=1\}$。对于给定的 $f\in L^2(T)$，它有如下 Fourier 级数展开：

$$f\left(e^{it}\right)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikt},$$

*基金项目：广东省自然科学基金项目(s201104000389)。

其中$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t$表示其对应的第$k$个Fourier系数。那么，其对应的周期Hilbert变换$\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$被定义为

$$\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},$$

其中sgn表示符号函数，当$k\neq 0$，$\mathrm{sgn}(k)=k/|k|$；当$k=0$，$\mathrm{sgn}(k)=0$。因此，通过周期Hilbert变换，$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\in L^2(T)$对应的周期解析信号可定义为$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}):=f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})+\mathrm{i}\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$。根据其表达式，我们知道存在唯一的幅度相位对$[\rho(t),\theta(t)]$使得$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$，其中$\rho(t)=\sqrt{\left|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|^2+\left|\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|^2}$，$\theta(t)=\arctan\left(\frac{\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right)$。在信号处理中，我们把$\rho(t)$，$\theta(t)$分别称为信号的瞬时幅度和相位，而相位$\theta(t)$的导数$\theta'(t)$被认为是信号的瞬时频率。因此，研究周期解析信号中的相位和幅度的关系，是科学界一个比较重要的问题[2-6]。比如说，当$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\in L^2(T)$为频带有限的周期函数时，即$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\sum_{k=-m}^{n}c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$，其中$m,n>0$，$c_n(f)\neq 0$和$c_{-m}(f)\neq 0$，那么其对应的周期解析信号可表示为$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=c_0(f)+2\sum_{k=1}^{n}c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$。根据$n$阶多项式具有$n$个根的性质，频带有限的周期解析信号$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$可分解为：

$$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=2c_n(f)\prod_{j=1}^{p}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a_j)\prod_{j=1}^{q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-b_j),$$

其中$p+q=n$，$a_1,a_2,\cdots,a_p$和$b_1,b_2,\cdots,b_q$分别为其对应的Z变换$f_a(z)=c_0(f)+2\sum_{k=1}^{n}c_k(f)z^k$在单位圆内和单位圆外的零点序列(其重点按重数排列)。在离散时间系统理论中[6]，有限频带的周期解析信号$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=c_0(f)+2\sum_{k=1}^{n}c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$被认为是有限脉冲响应对应的频率响应，而由在单位圆外的零点确定的分解因子$f_{\min}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}):=\prod_{j=1}^{q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-b_j)$称之为极小相位信号，由单位圆内的零点确定的分解因子$f_{\max}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}):=\prod_{j=1}^{p}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a_j)$称之为极大相位信号，他们分别对应于离散系统中的极小相位系统和极大相位系统对应的有限脉冲响应的频率响应。根据系统论的知识我们知道，极小相位信号的相位是其对数幅度的周期Hilbert变换，即

$$f_{\min}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=c'\mathrm{e}^{\ln\left|f_{\min}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|+\mathrm{i}\tilde{H}\ln\left|f_{\min}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|},$$

而极大相位信号也可表示为

$$f_{\max}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=c''\mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}\mathrm{e}^{\ln\left|f_{\max}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|-\mathrm{i}\tilde{H}\ln\left|f_{\max}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|}。$$

其中c'、c''是模为1的复常数。由于$\tilde{H}^2f=-f+c_0(f)$，所以极小相位信号和极大相位能在一个常数因子范围内被其相位或者幅度唯一重构出来。事实上，具有频带有限的周期解析信号不仅可以分解为一个极大相位信号和极小相位信号的乘积，也可以分解为一个极小相位信号与全相位信号的乘积：

$$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=2c_n(f)\left[\prod_{j=1}^{q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-b_j)\prod_{j=1}^{p}(1-\bar{a}_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right]\prod_{j=1}^{p}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a_j}{1-\bar{a}_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}},$$

其中$O_{f_a}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}):=\prod_{j=1}^{q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-b_j)\prod_{j=1}^{p}(1-\bar{a}_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$的所有零点在单位圆外，为极少相位信号，它可表示为

$$\prod_{j=1}^{q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-b_j)\prod_{j=1}^{p}(1-\bar{a}_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\mathrm{e}^{\ln\left|f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|+\mathrm{i}\tilde{H}\ln\left|f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|},$$

而由互反的零点a_j和极点$1/\bar{a}_j$对确定的$B_{f_a}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}):=\prod_{j=1}^{p}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a_j}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\bar{a}_j}$称之为全相位信号，其中$c$是模为1的复常数。令

Copyright © 2013 Hanspub

$a_j = |a_j| e^{it_j}$，我们有

$$B_{f_a}\left(e^{it}\right) = e^{i\theta_{B_a}(t)} = \exp\left\{ i\sum_{j=1}^{p}\int \frac{1-|a_j|^2}{1-2|a_j|\cos(t-t_j)+|a_j|^2} dt \right\}, \quad \theta_{B_a}(2\pi)-\theta_{B_a}(0) = 2p\pi$$

且其对应的瞬时频率 $\sum_{k=1}^{p}\frac{1-|z_k|^2}{1-2|z_k|\cos(t-t_k)+|z_k|^2}$ 非负。根据频带有限的周期解析信号的分解特征，在[2,3]等文献中给出了频带有限的周期解析信号由相位或幅度信息对信号进行重构的研究，更进一步地，在文献[4]中给出了将频带有限的周期解析信号分解为全相位信号和极小相位信号的算法。

作为上述的结论推广，在本文的第二段中，我们将指出任意连续的周期解析信号也可以分解为极小相位信号和极大相位信号的乘积或极小相位信号和全相位信号的乘积。根据此结论，我们也研究了在什么情况下，连续的周期解析信号可以由相位信息或者幅度信息重构的条件。更进一步的，我们研究了具有不连通的频带有限的周期解析信号保持幅度不变的条件。

2. 主要结论

对于 $f\left(e^{it}\right)\in L^2(T)$，根据周期 Hilbert 变换的定义，我们知其对应周期解析信号 $f_a\left(e^{it}\right) = f\left(e^{it}\right) + i\tilde{H}f\left(e^{it}\right)$ 具有 Fourier 级数展开式：$f_a\left(e^{it}\right) \sim c_0(f) + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e^{ikt}$。根据 F.和 M. Riesz 定理[7]，我们知周期解析信号 $f_a\left(e^{it}\right) = f\left(e^{it}\right) + i\tilde{H}f\left(e^{it}\right)$ 对应的 Z 变换 $f_a(z) \sim c_0(f) + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) z^k$ 属于 $H^2(D)$ 且对于几乎处处的 $t\in[0,2\pi]$，有 $f_a\left(e^{it}\right) = \lim_{r\to 1^-} f_a(z), z = re^{it}\in D$，其中 $H^2(D)$ 表示在单位圆 $D := \{z \mid |z|<1\}$ 内解析且满足 $\sup_{0\le r<1}\left(\int_0^{2\pi}|f(z)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty$ 的函数 $f(z)$ 的集合。特别地，当周期解析信号 $f_a\left(e^{it}\right) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ 连续且 $\rho(t)>0$ 时，由于 $f_a(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f_a\left(e^{it}\right) dt$，其中 $z = re^{i\theta}\in D$，那么根据 Poisson 核 $\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$ 的性质，我们知 $f_a(z)$ 在闭圆盘 $cl\{D\} := \{z \mid |z|\le 1\}$ 内连续。根据 Hardy 函数的分解定理，对于这样一类特殊的信号，我们有：

$$f_a(z) = c\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}-z}{e^{it}+z}\ln\left|f_a\left(e^{it}\right)\right| dt\right\}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-z\overline{z}_k}, z\in D,$$

其中 c 是模为 1 的复常数，$\{z_1,\cdots,z_n\}$ 是 $f_a(z)$ 在单位圆内零点序列(其重点按重数排列)，参见[7,8]。自然，对于连续的周期解析信号：

引理 1 如果周期解析信号 $f_a\left(e^{it}\right) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ 连续且 $\rho(t)>0$。那么 $f_a\left(e^{it}\right)$ 有如下分解：

$$f_a\left(e^{it}\right) = ce^{\ln\rho(t)+iH\ln\rho(t)}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{it}-z_k}{1-e^{it}\overline{z}_k} = c'e^{int}e^{\ln\left|f_{\min}\left(e^{it}\right)\right|+iH\ln\left|f_{\min}\left(e^{it}\right)\right|}e^{\ln\left|f_{\max}\left(e^{it}\right)\right|-iH\ln\left|f_{\max}\left(e^{it}\right)\right|},$$

其中 c、c' 是模为 1 的复常数，$f_{\max}\left(e^{it}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(e^{it}-z_k\right)$，$\ln\left|f_{\min}\left(e^{it}\right)\right| = \ln|\rho(t)| - \ln\left|f_{\max}\left(e^{it}\right)\right|$，$\{z_1,\cdots,z_n\}$ 是 $f_a\left(e^{it}\right)$ 对应的 Z 变换 $f_a(z)$ 在单位圆内零点序列(其重点按重数排列)。■

根据上面的分解结论，我们将给出连续的周期解析信号由相位信息或者幅度信息进行重构的条件：

定理 2 假设周期解析信号 $f_a\left(e^{it}\right) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ 连续且 $\rho(t)>0$。如果其对应的 Z 变换是 $f_a(z)$ 为整函数且不

Copyright © 2013 Hanspub

具有互反的零点对时。那么周期解析信号 $f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)$ 可以在一个常数因子内被其相位 $\theta(t)$ 重构出来。

证明： 如果我们已知相位 $\theta(t)$，利用 $\theta(2\pi)-\theta(0)=2n\pi$，其中 n 表示 $f_a(z)$ 在单位圆内的零点个数 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ (其重点按重数排列)。令 $f_{\max}\left(\mathrm{e}^{it}\right):=\prod_{j=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{it}-z_j\right)$，根据引理 1，我们有

$$f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)=c\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{e}^{\ln\left|f_{\min}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|+\mathrm{i}H\ln\left|f_{\min}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|}\mathrm{e}^{\ln\left|f_{\max}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|-\mathrm{i}H\ln\left|f_{\max}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|},$$

其中 c 是模为 1 的常数，

$$\ln\left|f_{\min}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|=\ln\left|\rho(t)\right|-\ln\left|f_{\max}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|。$$

又因为

$$\theta(t)-nt=\tilde{H}\ln\left|f_{\min}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|-\tilde{H}\ln\left|f_{\max}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|,$$

那么根据周期 Hilbert 变换的性质 $\tilde{H}^2 f=-f+c_0(f)$，我们由相位 $\theta(t)$ 可得到

$$g\left(\mathrm{e}^{it}\right):=\mathrm{e}^{-\tilde{H}[\theta(t)-nt]+\mathrm{i}[\theta(t)-nt]}=c''\mathrm{e}^{\ln\left|f_{\min}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|+\mathrm{i}\tilde{H}\ln\left|f_{\min}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|-\ln\left|f_{\max}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|-\mathrm{i}\tilde{H}\ln\left|f_{\max}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|}=c''\frac{f_{\min}\left(\mathrm{e}^{it}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mathrm{e}^{it}\overline{z}_j\right)}$$

其中 c'' 是某复常数。显然，如果 $f_a(z)$ 为整函数且不具有互反的零点对时，那么由相位信息得到的 $g\left(\mathrm{e}^{it}\right)$ 对应的 Z 变换 $g(z)$ 有且只有极点 $\left\{\frac{1}{\overline{z}_1},\cdots\frac{1}{\overline{z}_n}\right\}$。自然，全相位信号 $B_{f_a}(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-z\overline{z}_k}$ 能从 $g(z)$ 的极点序列 $\left\{\frac{1}{\overline{z}_1},\cdots\frac{1}{\overline{z}_n}\right\}$ 重构出来。因此，在上述条件下，周期解析信号 $f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)$ 可以在一个常因子范围内由其幅度 $\theta(t)$ 重构。■

定理 2 假设周期解析信号 $f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)=\rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ 连续且 $\rho(t)>0$。如果其对应的 Z 变换 $f_a(z)$ 在复平面不具有互反的零点极点对，$f_a(0)\neq 0$ 且 $f_a(z)$ 的所有零点要么在单位圆内要么在单位圆外，那么周期解析信号 $f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)$ 可以在一个常数范围内由其幅度 $\rho(t)$ 重构。

证明： 因为周期解析信号 $f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)=\rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ 连续且 $\rho(t)>0$，根据引理 1，我们知道其对应的 Z 变换 $f_a(z)$ 可表示为

$$f_a(z)=c\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{it}+z}{\mathrm{e}^{it}-z}\ln\left|f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|\mathrm{d}t\right\}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-z\overline{z}_k} \text{ 且 } \lim_{r\to 1^-}f_a(z)=f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right),$$

其中 $z=r\mathrm{e}^{it}$，c 是模为 1 的常数，$\{z_1,\cdots,z_n\}$ 是 $f_a(z)$ 在单位圆内的零点序列。显然，如果 $f_a(z)$ 的所有零点位于单位圆外，那么 $f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)=c\mathrm{e}^{\ln\left|f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|+\mathrm{i}\tilde{H}\ln\left|f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|}$ 为极小相位信号，那么周期解析信号能在一个常因子范围内由幅度重构出来。如果 $f_a(z)$ 的所有零点位于单位圆内，$f_a(0)\neq 0$ 且在复平面内不具有互反的零点极点对，那么极小相位对应的 Z 变换为

$$O_{f_a}(z):=c\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{it}+z}{\mathrm{e}^{it}-z}\ln\left|f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|\mathrm{d}t\right\}=\frac{f_a(z)}{\prod_{j=1}^{n}\left(z-z_j\right)}\prod_{j=1}^{n}\left(1-z\overline{z}_j\right)$$

在复平面内有且只有零点序列 $\left\{\frac{1}{\overline{z}_1},\cdots\frac{1}{\overline{z}_n}\right\}$。自然，其对应的全相位信号 $B_{f_a}(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-z\overline{z}_k}$ 能从极小相位 $O_{f_a}(z)$ 的零点序列 $\left\{\frac{1}{\overline{z}_1},\cdots\frac{1}{\overline{z}_n}\right\}$ 重构出来。因此，在这种情况下，连续的周期解析信号 $f_a\left(\mathrm{e}^{it}\right)$ 可以由在一个常数因子范围内由其幅度 $\rho(t)$ 重构。■

Copyright © 2013 Hanspub

关于解析信号保持幅度不变的研究主有针对的是非周期的频带有限解析信号的研究[9-11]，而作为文献[9]对应的周期解析信号的考虑，我们将给出具有不连通的频带有限的周期解析信号保持幅度不变的条件。

令 $P_{m,n}(T)$ 表示所有 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\in L^2(T)$ 且 $Supp\left[f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right]:=\left[\inf\{n,c_n(f)\neq 0\},\sup\{n,c_n(f)\neq 0\}\right]\subseteq[m,n]$ 的函数 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 的集合，其中 m,n 为有限整数。$Z(f)$ 表示 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\in P_{m,n}(T)$ 对应的 Z 变换 $f(z)$ 在复平面的零点序列(其重点按重数排列)。假设 $I_i=[m_i,n_i]$ 是互不相交的区间序列，其中 $i=1,2,\cdots,N$，$m_i\geq 0$ 且满足下面的可分条件：$(I_i-I_j)\bigcap(I_m-I_n)=\varnothing$，其中 $I_i-I_j=\left[m_i-n_j,n_i-m_j\right]$，$1\leq m,n,i,j\leq N$，$m\neq n$，$(n,m)\neq(i,j)$，$(m,n)$ 表示一个有序对，则我们有下面的结论成立：

定理 3 假设 $f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\sum_{i=1}^{N}f_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$，$g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\sum_{i=1}^{N}g_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$，其中 $f_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}),g_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\in P_{m_i,n_i}(T)$，$N\geq 3$。如果闭区间 $I_i=[m_i,n_i]$ 满足上面的可分条件，那么 $\left|f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|=\left|g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|$ 当且仅当 $g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=c\prod_{a\in B_0}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\overline{a}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}),\ a\in B_0$，其中 c 是模为 1 的复数，B_0 是 $\bigcap_{k=1}^{n}Z(f_k)$ 中的任意子序列。

证明：因为 $\left|f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|=\left|g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|$，那么

$$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}f_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}g_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}。$$

因为 $Supp\left[f_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right],Supp\left[g_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right]\subseteq I_i-I_j$，那么由闭区间 I_i 的可分条件，我们有

$$f_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=g_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})},$$

其中 $i\neq j$。

如果 $N\geq 3$，那么对于任意三个不同的整数 $1\leq n_1,n_2,n_3\leq N$，我们有

$$f_{n_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_{n_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}f_{n_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_{n_3}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=g_{n_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_{n_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}g_{n_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_{n_3}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} \text{ 和 } f_{n_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_{n_3}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=g_{n_1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_{n_3}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}。$$

因此，当 $N\geq 3$ 时，对任意的 $1\leq n\leq N$，有 $f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=g_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}$。因为 $f_n(z)$，$g_n(z)$ 为整函数，那么根据引理 1，我们易知 $f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=g_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}$ 当且仅当 $g_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=c_nB_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})f_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$,其中 c_n 是模为 1 的复常数，$g_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 是由 $f_n(z)$ 在复平面的部分零点序列 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ 构成的全相位信号 $\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\overline{z_k}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z_k}$。又因为

$$g_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=c_if_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})B_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{c_jf_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})B_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}=f_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{f_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})},$$

所以 $c_iB_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=c_jB_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$，$1\leq i,j\leq N$。因此，$\left|f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|=\left|g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|$ 当且仅当 $g_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=c\prod_{a\in B_0}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\overline{a}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$，其中 c 是模为 1 的复数，B_0 是 $\bigcap_{k=1}^{n}Z(f_k)$ 中的任意子序列。■

从本文的内容我们可以看出，我们将针对频带有限的周期函数的分解结论推广到连续周期解析信号的情形，即任意连续的周期解信号不仅可以分解为极小相位信号和极大相位信号的乘积，也可以分解为极小相位和全相位的乘积。在此基础上，我们也研究了在什么情况下，连续的周期解析信号可以由相位信息或者幅度信息重构的条件。这些结论的给出不仅使我们对周期解析信号的结构有了更深入的了解，也为其应用奠定了理论基础。

参考文献 (References)

[1] D. Gabor. Theory of communications. Journal Institute of Electrical Engineers, 1946, 93: 429-457.

[2] M. H. Hayes, J. S. Lim and A. V. Oppenheim. Signal reconstruction from phase or amplitude. IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing, 1980, 28(6): 672-680.

[3] S. Cirtis, A. Oppenheim and J. Lim. Signal reconstruction from Fourier sign information. Journal of the Optical Society of America, 1983, 73(11): 1413-1420.

Copyright © 2013 Hanspub

[4] A. Kumaresan, A. Rao. Model-based approach to envelope and positive instantaneous frequency estimation of signals with speech applications. The Journal of the Acoustical Society of America, 1999, 105(3): 1912-1924.
[5] B. Picinbono. On instantaneous amplitude and phase of signals. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 45(3): 552-560.
[6] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer. Discrete-time signal processing. Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1989.
[7] J. B. Garnett. Bounded analytic function. New York: Academic Press, 1987.
[8] L. H. Tan, L. H. Yang and D. R. Huang. The structure of instantaneous frequencies of periodic analytic signals. Science China: Series A, 2010, 53(2): 347-355.
[9] T. R. Crimmins, J. R. Fienup. Uniqueness of phase retrieval for functions with sufficiently disconnected support. Journal of the Optical Society of America, 1983, 73(2): 218-221.
[10] E. M. Hofstetter. Construction of time-limited functions with specified autocorrelation functions. IEEE Transactions on Information Theory, 1963, 51: 868-869.
[11] P. Jaming. Phase retrieval techniques for radar ambiguity problems. Journal of Fourier Analysis and Applications, 1999, 5: 309-329.

Copyright © 2013 Hanspub