Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 254-256
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.34039 Published Online July 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

On Boundedness of the Nonlinear Difference Equation $x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$*

Liyan Duan, Dong Lu, Shaogao Deng

College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu
Email: 1048572487@qq.com, 493789268@qq.com, sgdeng@swjtu.edu.cn

Received: Apr. 27th, 2013; revised: May 16th, 2013; accepted: May 28th, 2013

Abstract: In this paper, we consider the nonlinear difference equation $x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$ and the boundness of its solutions is obtained.

Keywords: Difference Equation; Nonlinear; Boundedness

非线性差分方程 $x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$ 解的有界性*

段礼燕，鲁　东，邓绍高

西南交通大学数学学院，成都
Email: 1048572487@qq.com, 493789268@qq.com, sgdeng@swjtu.edu.cn

收稿日期：2013 年 4 月 27 日；修回日期：2013 年 5 月 16 日；录用日期：2013 年 5 月 28 日

摘　要：在这篇文章中，我们研究了一类非线性差分方程 $x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$ 解的有界性。

关键词：差分方程；非线性；有界性

1. 引言

近年来，各种类型的非线性差分方程得到了广泛的研究[1-3]。本文将研究非线性差分方程

$$x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2} \quad (n \in N), \tag{1}$$

其初值为 $x_0 = a, x_{-1} = b$。其中 $p > 0, q > 0, a > 0, b > 0, N = \{1, 2, 3, \cdots\}$。

受文献[1]的启发，运用类似于[1]的变换技巧

$$y_n = x_n x_{n-1} \quad \left(n \in N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}\right) \tag{2}$$

我们将方程(1)化为线性差分方程

$$y_n = py_{n-1} + q \quad (n \in N) \tag{3}$$

从而得到方程(1)的解及其解的有界性。

在本文中，为了表达的方便我们约定：当 $i < j$ 时，$\sum_{m=j}^{i} \bullet = 0, \prod_{m=j}^{i} \bullet = 1$。

*基金项目：四川省基础研究计划(2011JYZ002)；西南交通大学中央高校基本科研业务费专项资金项目(SWJTU12ZT13)；西南交通大学大学生科研训练项目(SRTP121204)。

2. 主要结果

首先，我们来求解方程(3)。由(2)和(3)， $y_0 = ab$ ，我们得到

$$y_n = abp^n + q\sum_{m=0}^{n-1} p^m \quad \left(n \in N_0\right) \tag{4}$$

其次，我们通过(4)来讨论方程(1)的解。在本文的假设条件下，对所有的 $n \in N_0$ ， $y_n > 0, x_n > 0$ 。由(2)可得：

$$x_{2n} = a\prod_{j=1}^{m} \frac{y_{2j}}{y_{2j-1}} = a\prod_{j=1}^{n} \frac{abp^{2j} + q\sum_{m=0}^{2j-1} p^m}{abp^{2j-1} + q\sum_{m=0}^{2j-2} p^m} \quad \left(n \in N_0\right), \tag{5}$$

$$x_{2n-1} = b\prod_{j=0}^{n-1} \frac{y_{2j+1}}{y_{2j}} = b\prod_{j=0}^{n-1} \frac{abp^{2j+1} + q\sum_{m=0}^{2j} p^m}{abp^{2j} + q\sum_{m=0}^{2j-1} p^m} \quad \left(n \in N_0\right). \tag{6}$$

定理 2.1 方程(1)的解由(5)或(6)表出。

下面，我们来讨论方程(1)的解的有界性。由(2)可知，当 $\{x_n\}$ 有界时， $\{y_n\}$ 也有界，由此可得到：

引理 2.1 在本文的假设条件下，方程(1)的解有界的必要条件是 $0 < p < 1$ 。

为了得到方程(1)的解有界的充分条件，我们首先对 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$ 的通项表达式进行分析可知：

$$x_{2n} = a\prod_{j=1}^{n} \frac{abp^{2j} + q\sum_{m=0}^{2j-1} p^m}{abp^{2j-1} + q\sum_{m=0}^{2j-2} p^m} = a\prod_{j=1}^{n} \frac{\frac{q}{1-p} + \left(ab - \frac{q}{1-p}\right)p^{2j}}{\frac{q}{1-p} + \left(ab - \frac{q}{1-p}\right)p^{2j-1}} \quad \left(n \in N_0\right)$$

$$x_{2n-1} = b\prod_{j=0}^{n-1} \frac{abp^{2j+1} + q\sum_{m=0}^{2j} p^m}{abp^{2j} + q\sum_{m=0}^{2j-1} p^m} = b\prod_{j=0}^{n-1} \frac{\frac{q}{1-p} + \left(ab - \frac{q}{1-p}\right)p^{2j+1}}{\frac{q}{1-p} + \left(ab - \frac{q}{1-p}\right)p^{2j}} \quad \left(n \in N_0\right)$$

易知，当 p^m 的系数为零时，即 $q = ab(1-p)$ 时， x_{2n} 和 x_{2n-1} 均为常数。其实，在下面的证明中我们会看到：这里的分界点 $q = ab(1-p)$ 是 $\{y_n\}$ 单调与否的分界线。

现在我们先考虑特殊情形 $q = ab(1-p)$ 。通过直接计算可得到：

引理 2.2 设 $0 < p < 1$ ，当 $q = ab(1-p)$ 时，方程(1)的解有界且可表示为：

$$x_{2n} = a > 0, x_{2n-1} = b > 0$$

引理 2.3 设 $0 < p < 1$ ，当 $0 < q < ab(1-p)$ 时，则 $\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{x_{2n-1}\}_{n=0}^{\infty}$ 分别是单调递减的子列且收敛于非零极限，从而方程(1)的解有界。

证明：因为 $0 < q < ab(1-p)$ ，所以 $q + abp - ab < 0$ 。由(4)得：

$$y_{n+1} - y_n = abp^n(p-1) + qp^n = p^n(abp - ab + q) < 0 \quad \left(n \in N_0\right)；\quad x_{2(n+1)} = \frac{y_{2(n+1)}}{y_{2n+1}} x_{2n} < x_{2n} \le a \quad \left(n \in N_0\right)；$$

$$x_{2(n+1)} = a\prod_{j=1}^{n+1} \frac{y_{2j}}{y_{2j-1}} = a\frac{y_{2(n+1)}}{y_1}\prod_{j=1}^{n} \frac{y_{2j}}{y_{2j+1}} \ge a\frac{y_{2(n+1)}}{y_1} = a\frac{abp^{2n+2} + q\sum_{m=0}^{2n+1} p^m}{abp + q}$$

$$> a\frac{\frac{q}{1-p}p^{2n+2} + q\frac{1-p^{2n+2}}{1-p}}{ab} = \frac{q}{b(1-p)} > 0 \quad \left(n \in N_0\right).$$

同理可得：$b \ge x_{2n-1} > x_{2n+1} > \dfrac{q}{a(1-p)} > 0 \quad (n \in N_0)$，即，$\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$ 分别是单调递减的子列且收敛于非零极限。证毕。

引理 2.4 设 $0 < p < 1$，当 $q > ab(1-p)$ 时，则 $\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{x_{2n-1}\}_{n=0}^{\infty}$ 分别是单调递增的子列且收敛于非零极限，从而方程(1)的解有界。

证明：因为 $q > ab(1-p)$，类似引理 4 的证明有 $y_{n+1} > y_n > 0 \quad (n \in N_0)$.

$$x_{2(n+1)} = \frac{y_{2(n+1)}}{y_{2n+1}} x_{2n} > x_{2n} \ge a > 0 \qquad (n \in N_0);$$

$$\begin{aligned} x_{2(n+1)} &= a\prod_{j=1}^{n+1}\frac{y_{2j}}{y_{2j-1}} = a\frac{y_{2(n+1)}}{y_1}\prod_{j=1}^{n}\frac{y_{2j}}{y_{2j+1}} \le a\frac{y_{2(n+1)}}{y_1} = a\frac{abp^{2n+2} + q\sum_{m=0}^{2n+1} p^m}{abp+q} \\ &< a\frac{\dfrac{q}{1-p}p^{2n+2} + q\dfrac{1-p^{2n+2}}{1-p}}{ab} = \frac{q}{b(1-p)} \qquad (n \in N_0). \end{aligned}$$

同理可得：$0 < b \le x_{2n-1} < x_{2n+1} < \dfrac{q}{a(1-p)} \qquad (n \in N_0)$。即，$\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$ 分别是单调递增的子列且收敛于非零极限。证毕。

最后，我们综合上述四个引理即可得出结论：

定理 2.2 在本文的假设条件下，方程(1)的解有界的充分必要条件是 $0 < p < 1$。此时，$\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{x_{2n-1}\}_{n=0}^{\infty}$ 分别单调收敛于非零极限。

至此，对于我们所研究的非线性差分方程 $x_n = qx_{n-1}^{-1} + px_{n-2}$ 得到了非常完美的结果，即方程的解有界的充要条件。但该差分方程的解 $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 是震荡的。

在这篇文章中，我们只研究了系数 p,q 是常数的情形。如果将系数 p,q 换成变系数或周期系数 p_n, q_n，即差分方程推广为 $x_n = p_n x_{n-1}^{-1} + q_n x_{n-2}$，其解在什么条件下才有界的问题就难多了。

参考文献 (References)

[1] S. Stevic. On the difference equation $x_n = x_{n-2}/(b_n + c_n x_{n-1} x_{n-2})$. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(8): 4507-4513.

[2] T. Sun, H. Xi and Q. He. On boundedness of the difference equation $x_{n+1} = p_n + x_{n-3s+1}/x_{n-s+1}$ with period-k coefficients. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(12): 5994-5997.

[3] 赵玉萍. 一类非线性差分方程的有界性[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2011, 37(4): 525-529.

