Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 270-276
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.34041 Published Online July 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Martingale Transforms between Weak Orlicz-Hardy Spaces

Lin Yu, Huan Yin

School of Science, China Three Gorges University, Yichang
Email: yulin@ctgu.edu.cn

Received: May 13th, 2013; revised: May 27th, 2013; accepted: Jun. 5th, 2013

Abstract: Using the technique of Burkholder's martingale transforms, we investigate the correlations between two weak Orlicz-Hardy spaces of martingales. Let Φ_1 and Φ_2 in Δ_2 be two Young functions and $\Phi_1 \prec \Phi_2$ in some sense, a constructive proof is obtained of that the elements in weak Orlicz-Hardy space wH_{Φ_1} are none other than the martingale transforms of those in weak Orlicz-Hardy space wH_{Φ_2}, and vice versa.

Keywords: Martingale; Weak Orlicz-Hardy Space; Martingale Transform

弱 Orlicz-Hardy 空间之间的鞅变换

于　林，尹　环

三峡大学理学院，宜昌
Email: yulin@ctgu.edu.cn

收稿日期：2013 年 5 月 13 日；修回日期：2013 年 5 月 27 日；录用日期：2013 年 6 月 5 日

摘　要：利用 Burkholder 的鞅变换为工具，刻画了弱 Orlicz-Hardy 鞅空间之间的相互关系，构造性地证明了：对于任意的两个 Young 函数 $\Phi_1,\Phi_2 \in \Delta_2$，且 $\Phi_1 \prec \Phi_2$ (某种意义下)，则弱 Orlicz-Hardy 空间 wH_{Φ_1} 中的鞅是 wH_{Φ_2} 中元素的鞅变换；反过来，弱 Orlicz-Hardy 鞅空间 wH_{Φ_2} 中的鞅也是 wH_{Φ_1} 中元素的鞅变换。

关键词：鞅；弱 Orlicz-Hardy 空间；鞅变换

1. 引言

近年来，在泛函分析与鞅论中，弱型空间(例如：弱 Lebesgue 空间 wL_p、Lorentz 空间 $L_{p,q}$、弱 Orlicz 空间 wL_Φ 等)的研究引起人们的广泛关注。在鞅空间理论中，Weisz[1,2]首先引入了鞅的弱 Hardy 空间和弱 BMO 空间的概念，建立了弱 Hardy 鞅空间的原子分解定理并以之为工具研究了其共轭空间；随后，Y. L. Hou 和 Y. B. Ren[3]，Y. Jiao 和 L. H. Peng[4]进一步研究了 Banach 空间值鞅的弱 Hardy 空间的原子分解定理以及鞅变换算子的有界性；Y. Jiao[5]研究了弱 Orlicz 鞅空间之间的相互嵌入关系；最近，P. D. Liu[6]则进一步将上述研究推广到弱 Orlicz 鞅空间。关于各类弱型鞅空间，近年来的主要研究成果可详见 P. D. Liu[7]的综述文章，已有的成果表明将弱型空间应用于鞅论中，以拟范数代替范数，经典鞅论中的许多不等式都可以系统地加以改造。这样不仅把经典结论从赋范空间拓展到拟赋范空间，而且有时甚至还可以使不等式更加精确。

鞅变换最早是由 Burkholder[8]引入的，它不仅是鞅论的一个重要研究对象而且也是泛函分析和调和分析理论研究中的一种分析重要工具。Garsia[9]，Chao 和 Long[10]，Weisz[11]分别运用鞅变换刻画了鞅 Hardy 空间之间的相互关系，而 Iahak-Mogyorodi[12]，W. W. Meng 和 Lin Yu[13]，Lin Yu[14]则将之推广到 Orlicz-Hardy 空间。

本文旨在利用鞅变换刻画弱 Orlicz-Hardy 鞅空间之间的相互关系，构造性地证明了如下结论：对于任意的两个 Young 函数 $\Phi_1,\Phi_2\in\Delta_2$，且 $\Phi_1\prec\Phi_2$ (见定义 1)，则弱 Orlicz-Hardy 空间 wH_{Φ_1} 中的鞅是 wH_{Φ_2} 中鞅的鞅变换；反过来，弱 Orlicz-Hardy 鞅空间 wH_{Φ_2} 中的鞅也是 wH_{Φ_1} 中元素的鞅变换。

2. 概念及引理

设 (Ω,F,P) 是完备的概率空间，设 $\{F_n;n\ge1\}$ 是 F 的非降子 $\sigma-$ 代数序列，$f=\{f_n;n\ge1\}$ 是关于 $\{F_n;n\ge1\}$ 适应的实值鞅，$df=\{df_n;n\ge1\}$ 是其鞅差序列，其中 $df_n=f_n-f_{n-1}$，$n\ge1$，并且规定 $f_0\equiv0$，$F_0=\{\phi,\Omega\}$。定义鞅的条件均方函数如下：

$$s_n(f)=\left(\sum_{k=1}^{n}E\left(\left|df_k\right|^2\mid F_{k-1}\right)\right)^{1/2},\quad s(f)=\sup_{n\ge1}s_n(f)。$$

设 $\Phi(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的 Young 函数，即满足条件

$$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t,\ x\ge0。$$

其中 $\varphi(x)$ 是左连续、非减函数，且 $\varphi(0)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$。

定义 $\varphi(t)$ 的左连续逆函数为：$\psi(s)=\inf\{t:\varphi(t)\ge s\}$，并称 $\Psi(x)=\int_0^x\psi(t)\mathrm{d}t$ 为 $\Phi(x)$ 的 Young 补函数。定义 Φ 的上、下指标分别如下：

$$p_\Phi=\sup_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)},\quad q_\Phi=\inf_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}。$$

称 Φ 满足 Δ_2 条件(简记为 $\Phi\in\Delta_2$)，如果对于每个 $\lambda>1$，存在常数 C_λ 使得 $\Phi(\lambda t)\le C_\lambda\Phi(t)$，$\forall t>0$，实际上此条件等价于 Φ 的上指标有限，即 $p_\Phi<+\infty$。此时，$\Phi(x)$ 函数的逆函数 $\Phi^{-1}(x)$ 存在，且有下面的形式：$\Phi^{-1}(x)=\int_0^x m(t)\mathrm{d}t$，$x\ge0$，其中 $m(t)$ 是一个减函数，且容易得到

$$m(t)=\frac{1}{\varphi\left(\Phi^{-1}(t)\right)},\ t>0。$$

对于任意的 Young 函数 $\Phi(x)$，考虑定义在完备概率空间 (Ω,F,P) 上的可测函数类：

$$wL_\Phi=\left\{f:\exists c>0,\Phi\left(\frac{t}{c}\right)\cdot P(|f|>t)\le1,\forall t>0\right\},$$

并且定义其上的 Luxemburg 拟范数如下：

$$\|f\|_{wL_\Phi}=\inf\left\{c>0:\exists c>0,\Phi\left(\frac{t}{c}\right)\cdot P(|f|>t)\le1,\forall t>0\right\}。$$

称 wL_Φ 为弱 Orlicz 空间。特别地，若 $\Phi(t)=t^p$，则 $wL_\Phi=wL_p$。与经典的 Orlicz 空间相比，严格的包含关系 $L_\Phi\subset wL_\Phi$ 成立。一般情况下，wL_Φ 是拟赋范空间且是序列完备的。

定义鞅的弱 Orlicz-Hardy 空间如下：

$$wH_\Phi=\left\{f=\{f_n;n\ge1\}:\|f\|_{wH_\Phi}=\|s(f)\|_{wL_\Phi}<+\infty\right\}$$

注 2.1：若$\|f\|_{wL_\Phi}<\infty$，则显然有$\sup\limits_{t>0}\Phi\left(\dfrac{t}{\|f\|_{wL_\Phi}}\right)P\left(|f|>t\right)\le 1$。

我们在[14]中对 Young 函数引入了如下偏序关系，并得到一些后续讨论中所必需的性质。

定义 2.1[14]：设$\Phi_1,\Phi_2\in\Delta_2$是两个 Young 函数，若$\Phi_{1,2}(x)=\Phi_1^{-1}\circ\Phi_2(x)$是凸函数，则称$\Phi_2$是比$\Phi_1$更加凸的，并记作$\Phi_1\prec\Phi_2$。

本文以下总假设$\Phi_1\prec\Phi_2$是两个 Young 函数，且分别具有有限的上指标p_{Φ_1}，p_{Φ_2}和下指标q_{Φ_1}，q_{Φ_2}；分别有密度函数φ_1，φ_2，使得$\Phi_i(x)=\int_0^x\varphi_i(t)\mathrm{d}t$，$x>0$，$(i=1,2)$。记$\Phi_{1,2}(x)=\Phi_1^{-1}\circ\Phi_2(x)$的 Young 补函数为$\Psi_{1,2}(x)$。

注 2.2：设$\Phi_1(x)=x^{p_1}$，$\Phi_2(x)=x^{p_2}$，$1\le p_1<p_2<+\infty$，则$\Phi_{1,2}(x)=x^{\frac{p_2}{p_1}}$是凸函数，即$\Phi_1\prec\Phi_2$。

引理 2.1[14]：设$\Phi_1,\Phi_2\in\Delta_2$是两个 Young 函数，$\Phi_1\prec\Phi_2$，且分别具有有限的上指标p_{Φ_1}，p_{Φ_2}和下指标q_{Φ_1}，q_{Φ_2}。则$\Phi_{1,2}(x)=\Phi_1^{-1}\circ\Phi_2(x)$的上指标$p_{\Phi_{1,2}}$有限，且有$\dfrac{p_{\Phi_2}}{p_{\Phi_1}}\le p_{\Phi_{1,2}}\le\dfrac{p_{\Phi_2}}{q_{\Phi_1}}$。

注 2.3：既然$\Phi_{1,2}(x)$仍然是 Young 函数，所以下文中分别以$\varphi_{1,2}(x)$和$\psi_{1,2}(x)$记作$\Phi_{1,2}(x)$和它的 Young 补函数$\Psi_{1,2}(x)$的密度函数，即分别有$\Phi_{1,2}(x)=\int_0^x\varphi_{1,2}(t)\mathrm{d}t$，$\Psi_{1,2}(x)=\int_0^x\psi_{1,2}(t)\mathrm{d}t$。

注 2.4：据引理 1.1 知$\Phi_{1,2}(x)$的上指标有限，因此其逆函数$\Phi_{1,2}^{-1}(x)=\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1(x)$存在，且有

$$\Phi_{1,2}^{-1}(x)=\int_0^x m_{\Phi_{1,2}}(t)\mathrm{d}t\quad x>0\text{。}$$

因$\Phi_{1,2}(x)$凸，故其逆$\Phi_{1,2}^{-1}(x)$是凹函数，则$m_{\Phi_{1,2}}(x)$单调不增，且$m_{\Phi_{1,2}}(x)=\dfrac{1}{\varphi_{1,2}\circ\Phi_{1,2}^{-1}(x)}$。

引理 2.2[6]：(弱型 Minkowski 不等式)。设 Young 函数$\Phi\in\Delta_2$，则存在常数$K_\Phi\ge 1$，使得

$$\|f+g\|_{wL_\Phi}\le K_\Phi\left(\|f\|_{wL_\Phi}+\|g\|_{wL_\Phi}\right),\ \forall f,g\in wL_\Phi\text{。}$$

3. 主要结论及其证明

首先证明一个引理，即广义弱型 Hölder 不等式，该不等式具有独立的意义。

引理 3.1：设Φ_1，Φ_2是两个 Young 函数，且$\Phi_1\prec\Phi_2$。则对任意的鞅$f\in wL_{\Phi_2}$，$g\in wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}$，成立不等式

$$\|f\cdot g\|_{wL_{\Phi_1}}\le 2K_{\Phi_1}\|f\|_{wL_{\Phi_2}}\cdot\|g\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}\text{。}\tag{1}$$

证明：对任意的鞅$f\in wL_{\Phi_2}$，$g\in wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}$，若$\|f\|_{wL_{\Phi_2}}\cdot\|g\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}=0$，则(1)显然成立。所以，以下设$\|f\|_{wL_{\Phi_2}}\cdot\|g\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}>0$。为了方便，记$\|f\|_{wL_{\Phi_2}}=A$，$\|g\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}=B$。因为$\Phi_{1,2}$是凸函数$\Phi_{1,2}$的 Young 补函数，故由 Young 不等式得

$$\frac{|f\cdot g|}{A\cdot B}\le\Phi_1^{-1}\circ\Phi_2\left(\frac{|f|}{A}\right)+\Psi_{1,2}\left(\frac{|g|}{B}\right)$$

据弱型 Minkowski 不等式及拟范数$\|\cdot\|_{wL_{\Phi_1}}$的齐次性得

$$\frac{\|f\cdot g\|_{wL_{\Phi_1}}}{A\cdot B}\le K_{\Phi_1}\left(\left\|\Phi_1^{-1}\circ\Phi_2\left(\frac{|f|}{A}\right)\right\|_{wL_{\Phi_1}}+\left\|\Psi_{1,2}\left(\frac{|g|}{B}\right)\right\|_{wL_{\Phi_1}}\right)\tag{2}$$

因$0<A=\|f\|_{wL_{\Phi_2}}<\infty$，则$\Phi_2\left(\dfrac{t}{A}\right)P\left(|f|>t\right)\le 1$，$\forall t>0$。因$\Phi_1$，$\Phi_2$均为$(0,+\infty)\to(0,+\infty)$的双射，所以，

对任意的$s>0$，存在相应的$t>0$，使得$\Phi_1(s)=\Phi_2(t/A)$。于是，对任意的$s>0$，有

$$\Phi_1(s)P\left(\Phi_1^{-1}\circ\Phi_2(|f|/A)>s\right)=\Phi_1(s)P\left(\Phi_2(|f|/A)>\Phi_1(s)\right)$$
$$=\Phi_1(s)P\left(\Phi_2(|f|/A)>\Phi_2(t/A)\right)=\Phi_2\left(\frac{t}{A}\right)P\left(|f|>t\right)\le 1$$

由此证明了$\left\|\Phi_1^{-1}\circ\Phi_2\left(\frac{|f|}{A}\right)\right\|_{wL_{\Phi_1}}\le 1$。同理可证，$\left\|\Psi_{1,2}\left(\frac{|g|}{B}\right)\right\|_{wL_{\Phi_1}}\le 1$，以此代入(2)即得(1)。

定理 3.1：设$\Phi_1,\Phi_2\in\Delta_2$是两个 Young 函数，且$\Phi_1\prec\Phi_2$，对任意的鞅$f=\{f_n;n\ge 1\}\in wH_{\Phi_1}$，定义鞅变换：

$$Tf_0=0\text{，a.e.，}\quad Tf_n=\sum_{i=1}^{n}m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i(f)\right)\cdot df_i\text{，}\quad n\ge 1\text{。}$$

则鞅$Tf=\{Tf_n;n\ge 1\}\in wH_{\Phi_2}$，且成立$\|Tf\|_{wH_{\Phi_2}}\le\left\|\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1\left(s(f)\right)\right\|_{wL_{\Phi_2}}\le\|f\|_{wH_{\Phi_1}}$。

证明：约定$s_0(f)=0$，则$\forall i\ge 1$，有$E\left(|df_i|^2\mid F_{i-1}\right)=s_i^2(f)-s_{i-1}^2(f)$，且

$$E\left(\left|d(Tf_i)\right|^2\mid F_{i-1}\right)=E\left(m_{\Phi_{1,2}}^2\left(s_i(f)\right)|df_i|^2\mid F_{i-1}\right)=m_{\Phi_{1,2}}^2\left(s_i(f)\right)\cdot E\left(|df_i|^2\mid F_{i-1}\right)$$

于是，对任意的$n\ge 1$，有

$$s_n^2(Tf)=\sum_{i=1}^{n}E\left(\left|d(Tf_i)\right|^2\mid F_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}m_{\Phi_{1,2}}^2\left(s_i(f)\right)\left(s_i^2(f)-s_{i-1}^2(f)\right)\text{。}$$

根据序列$\{s_n(f)\}$的非负不减性和函数$m_{\Phi_{1,2}}(x)$的非负不增性，对任意$i\ge 1$，有

$$\begin{aligned}
&m_{\Phi_{1,2}}^2\left(s_i(f)\right)\left(s_i^2(f)-s_{i-1}^2(f)\right)\\
&=\left(m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i(f)\right)\left(s_i(f)-s_{i-1}(f)\right)\right)\cdot\left(m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i(f)\right)\left(s_i(f)+s_{i-1}(f)\right)\right)\\
&\le\left(m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i(f)\right)\left(s_i(f)-s_{i-1}(f)\right)\right)\cdot\left(m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i(f)\right)s_i(f)+m_{\Phi_{1,2}}\left(s_{i-1}(f)\right)s_{i-1}(f)\right)\\
&\le\int_{s_{i-1}(f)}^{s_i(f)}m_{\Phi_{1,2}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\cdot\left(\int_0^{s_i(f)}m_{\Phi_{1,2}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda+\int_0^{s_{i-1}(f)}m_{\Phi_{1,2}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right)\\
&=\left(\int_0^{s_i(f)}m_{\Phi_{1,2}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda-\int_0^{s_{i-1}(f)}m_{\Phi_{1,2}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right)\left(\int_0^{s_i(f)}m_{\Phi_{1,2}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda+\int_0^{s_{i-1}(f)}m_{\Phi_{1,2}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right)\\
&=\left[\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_i(f)\right)-\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_{i-1}(f)\right)\right]\cdot\left[\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_i(f)\right)+\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_{i-1}(f)\right)\right]\\
&=\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_i(f)\right)\right)^2-\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_{i-1}(f)\right)\right)^2
\end{aligned}$$

从而，对任意的$n\ge 1$，有

$$s_n^2(Tf)\le\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_i(f)\right)\right)^2-\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_{i-1}(f)\right)\right)^2\right)\le\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_n(f)\right)\right)^2\text{。}$$

于是，$s(Tf)\le\Phi_{1,2}^{-1}\left(s(f)\right)$，a.e.，因$f\in wH_{\Phi_1}$，故$\|s(f)\|_{wL_{\Phi_1}}<\infty$。根据拟范数的齐次性，不妨设$\|s(f)\|_{wL_{\Phi_1}}=1$，则

$$\sup_{t>0}\Phi_1(t)P\left(s(f)>t\right)=\sup_{t>0}\Phi_1\left(\frac{t}{\|s(f)\|_{wL_{\Phi_1}}}\right)P\left(s(f)>t\right)\le 1\text{。}$$

因Φ_1，Φ_2均为$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$的双射，故对任意的$s\in(0,+\infty)$，存在$t\in(0,+\infty)$，使得$\Phi_1(t)=\Phi_2(s)$。于是

$$\Phi_2(s)P\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s(f)\right)>s\right)=\Phi_2(s)P\left(\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1\left(s(f)\right)>s\right)=\Phi_2(s)P\left(\Phi_1\left(s(f)\right)>\Phi_2(s)\right)$$
$$=\Phi_1(t)P\left(\Phi_1\left(s(f)\right)>\Phi_1(t)\right)=\Phi_1(t)P\left(s(f)>t\right)\le 1$$

这说明 $\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\in wL_{\Phi_2}$，且 $\left\|\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_2}}\le\left\|s\left(f\right)\right\|_{wL_{\Phi_1}}$。又因

$$\Phi_2\left(\frac{t}{\left\|\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_2}}}\right)\cdot P\left(s\left(Tf\right)>t\right)\le\Phi_2\left(\frac{t}{\left\|\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_2}}}\right)\cdot P\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)>t\right)\le 1$$

故 $\left\|s\left(Tf\right)\right\|_{wL_{\Phi_2}}\le\left\|\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_2}}\le\left\|s\left(f\right)\right\|_{wL_{\Phi_1}}$，此即

$$\left\|Tf\right\|_{wH_{\Phi_2}}\le\left\|\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1\left(s\left(f\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_2}}\le\left\|f\right\|_{wH_{\Phi_1}}$$

定理 3.2：设 Φ_1，Φ_2 与鞅 f，Tf 如定理 1 中所定义，则有

$$\frac{1}{2\sqrt{2}K_{\Phi_1}\left\|\varphi_{1,2}\circ\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}}\left\|f\right\|_{wH_{\Phi_1}}\le\left\|Tf\right\|_{wH_{\Phi_2}}。$$

证明：约定 $s_0\left(Tf\right)=0$，则 $\forall i\ge 1$，有 $E\left(\left|dTf_i\right|^2\mid F_{i-1}\right)=s_i^2\left(Tf\right)-s_{i-1}^2\left(Tf\right)$。因为，$\left|df_i\right|=\dfrac{\left|dTf_i\right|}{m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i\left(f\right)\right)}$，$i\ge 1$。(若 $m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i\left(f\right)\right)=0$，则先以 $m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i\left(f\right)+\varepsilon\right)$ 替代 $m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i\left(f\right)\right)$，最后再令 $\varepsilon\to 0^+$ 即可)于是，运用 Abel 重排得

$$\begin{aligned}s_n^2\left(f\right)&=\sum_{i=1}^n E\left(\left|df_i\right|^2\mid F_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^n E\left[\left(\frac{\left|dTf_i\right|}{m_{\Phi_{1,2}}\left(s_i\left(f\right)\right)}\right)^2\middle| F_{i-1}\right]\\&=\sum_{i=1}^n\frac{s_i^2\left(Tf\right)-s_{i-1}^2\left(Tf\right)}{m_{\Phi_{1,2}}^2\left(s_i\left(f\right)\right)}=\sum_{i=1}^n\left(s_i^2\left(Tf\right)-s_{i-1}^2\left(Tf\right)\right)\cdot\varphi_{1,2}^2\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_i\left(f\right)\right)\right)\\&=s_n^2\left(Tf\right)\cdot\varphi_{1,2}^2\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_i\left(f\right)\right)\right)-\sum_{i=1}^{n-1}s_i^2\left(Tf\right)\cdot\left[\varphi_{1,2}^2\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_{i+1}\left(f\right)\right)\right)-\varphi_{1,2}^2\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_i\left(f\right)\right)\right)\right]\end{aligned}$$

注意到，$\left\{s_n\left(Tf\right)\right\}_{n\ge 0}$ 及 $\left\{\varphi_{1,2}\circ\Phi_{1,2}^{-1}\left(\left(s_n\right)f\right)\right\}_{n\ge 0}$ 均为非负、单调不减序列，从而

$$\begin{aligned}s_n^2\left(f\right)&\le s_n^2\left(Tf\right)\cdot\varphi_{1,2}^2\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_n\left(f\right)\right)\right)+\sum_{i=1}^{n-1}s_n^2\left(Tf\right)\cdot\left[\varphi_{1,2}^2\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_{i+1}\left(f\right)\right)\right)-\varphi_{1,2}^2\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_i\left(f\right)\right)\right)\right]\\&\le 2s_n^2\left(Tf\right)\cdot\varphi_{1,2}^2\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_n\left(f\right)\right)\right)\end{aligned}$$

于是得到

$$s_n^2\left(f\right)\le\sqrt{2}s_n\left(Tf\right)\cdot\varphi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_n\left(f\right)\right)\right),\quad n\ge 0。$$

既然，$\left\{\sqrt{2}s_n\left(Tf\right)\cdot\varphi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_n\left(f\right)\right)\right)\right\}_{n\ge 0}$ 是一个非负不减且关于 $\left\{F_{n-1}\right\}_{n\ge 0}$ 适应的序列，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}s_n\left(Tf\right)\cdot\varphi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_n\left(f\right)\right)\right)=\sqrt{2}s\left(Tf\right)\cdot\varphi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right)$$

进而，由引理 3.1 得

$$\begin{aligned}\left\|f\right\|_{wH_{\Phi_1}}&\le\sqrt{2}\left\|s\left(Tf\right)\cdot\varphi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_1}}\\&\le 2\sqrt{2}K_{\Phi_1}\left\|s\left(Tf\right)\right\|_{wL_{\Phi_2}}\cdot\left\|\varphi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}\\&\le 2\sqrt{2}K_{\Phi_1}\left\|Tf\right\|_{wH_{\Phi_2}}\cdot\left\|\varphi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}\end{aligned}$$

于是结论得证。

注 3.1：据引理 2.1，知 $\Phi_{1,2}$ 具有有限的上指标 $p_{\Phi_{1,2}}$，且

$$\left\|\varphi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s\left(f\right)\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}\le\max\left\{1,\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)\left\|f\right\|_{wH_{\Phi_1}}\right\}。$$

事实上，因为

$$\begin{aligned}&\Psi_{1,2}\left(\varphi_{1,2}\circ\Phi_{1,2}^{-1}\left(s(f)\right)\right)\\&\le\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)\Phi_{1,2}\left(\psi_{1,2}\left(\varphi_{1,2}\circ\Phi_{1,2}^{-1}\left(s(f)\right)\right)\right)\\&=\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)\Phi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s(f)\right)\right)\\&=\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)s(f)\end{aligned}$$

而 $f\in wH_{\Phi_1}$，即 $\Phi_1\left(s(f)\right)\in wL_1$，于是

$$\left\|\Phi_1\left(\Psi_{1,2}\left(\varphi_{1,2}\circ\Phi_{1,2}^{-1}\left(s(f)\right)\right)\right)\right\|_{wL_1}\le\left\|\Phi_1\left(\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)s(f)\right)\right\|_{wL_1}<+\infty\text{。}$$

另一方面，容易验证

$$\left\|\Phi_1\left(\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)s(f)\right)\right\|_{wL_1}\le\max\left\{1,\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)\left\|\Phi_1\left(s(f)\right)\right\|_{wL_1}\right\}=\max\left\{1,\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)\|f\|_{wH_{\Phi_1}}\right\}$$

进而得

$$\left\|\varphi_{1,2}\left(\Phi_{1,2}^{-1}\left(s(f)\right)\right)\right\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}=\left\|\Phi_1\left(\Psi_{1,2}\left(\varphi_{1,2}\circ\Phi_{1,2}^{-1}\left(s(f)\right)\right)\right)\right\|_{wL_1}\le\left\|\Phi_1\left(\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)s(f)\right)\right\|_{wL_1}\le\max\left\{1,\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)\|f\|_{wH_{\Phi_1}}\right\}\text{。}$$

综合定理 3.1 和定理 3.2，立即可得如下结论：

推论 3.1：设 $\Phi_1,\Phi_2\in\Delta_2$ 是两个 Young 函数，且 $\Phi_1\prec\Phi_2$，$\Phi_{1,2}(x)=\Phi_1^{-1}\circ\Phi_2(x)$，$\Psi_{1,2}$ 是 $\Phi_{1,2}$ 的 Young 补函数。则对任意的鞅 $f=\{f_n;n\ge1\}\in wH_{\Phi_1}$，存在鞅 $g=\{g_n;n\ge1\}\in wH_{\Phi_2}$，使得 f 是 g 的鞅变换。即

$$f_0=0\text{，a.e.，}\quad f_n=\sum_{i=1}^{n}T_{i-1}\cdot dg_i\text{，}\quad n\ge1\text{。}$$

其中，$T_i=\varphi_{1,2}\circ\Phi_{1,2}^{-1}\left(s_{i+1}(f)\right)\ (i=1,2,\cdots)$，并且有

$$\|T_\infty\|_{wL_{\Phi_1\circ\Psi_{1,2}}}\le\max\left\{1,\left(p_{\Phi_{1,2}}-1\right)\|f\|_{wH_{\Phi_1}}\right\}\text{，}\quad\|g\|_{wH_{\Phi_2}}\le\left\|\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1\left(s(f)\right)\right\|_{wL_{\Phi_2}}\le\|f\|_{wH_{\Phi_1}}\text{。}$$

注 3.2：此结论表明，对于任意的 Young 函数 Φ_1，$\Phi_2\in\Delta_2$，且 $\Phi_1\prec\Phi_2$，则弱 Orlicz-Hardy 空间 wH_{Φ_1} 中的鞅是 wH_{Φ_2} 中鞅的鞅变换；反之，弱 Orlicz-Hardy 鞅空间 wH_{Φ_2} 中的鞅也是 wH_{Φ_1} 中元素的鞅变换。这样，不仅将原有的关于强型 Hardy 鞅空间和强型 Orlicz-Hardy 鞅空间上的相关结论推广到弱型 Orlicz-Hardy 鞅空间上来，而且还得到了鞅变换算子的与原有的范数不等式相对应的若干拟范数不等式。所以，对于鞅论的研究而言，由强型鞅空间拓展到弱型鞅空间，由鞅的范数不等式拓展到鞅的拟范数不等式有一定的意义。

参考文献 (References)

[1] F. Weisz. Weak martingale Hardy spaces. Probability and Mathematical Statistics, 1998, 18(1): 133-148.
[2] F. Weisz. Bounded operators on weak Hardy spaces and applications. Acta Mathematica Hungarica, 1998, 80(3): 249-264.
[3] Y. L. Hou, Y. B. Ren. Vector-valued weak martingale Hardy spaces and atomic decompositions. Acta Mathematica Hungarica, 2007, 115(3): 235-246.
[4] Y. Jiao, L. H. Peng and P. D. Liu. Atomic decompositions of Lorentz martingale spaces and applications. Journal of Function Spaces and Applications, 2009, 7(2): 153-166.
[5] Y. Jiao. Embeddings between weak Orlicz martingale spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 378(1): 220-229.
[6] P. D. Liu, Y. L. Hou and M. F. Wang. Weak Orlicz spaces and its applications to the martingale theory. Science China Mathematics, 2010, 53(4): 905-916.
[7] P. D. Liu. The martingale inequalities in weak-type spaces and their applications. Acta Mathematica Scientia, 2010, 30A(5): 1291-1305.
[8] D. L. Burkholder. Martingale transforms. The Annals of Mathematical Statistics, 1966, 37: 1494-1504.
[9] A. M. Garsia. Martingale inequalities: seminar notes on recent progress. Mathematics Lecture Notes Series (London), Reading: W. A. Berrjamin, Inc, 1973.
[10] J. A. Chao, R. L. Long. Martingale transforms and Hardy spaces. Probability Theory and Related Fields, 1992, 91: 399-404.

[11] F. Weisz. Hardy spaces of predictable martingales. Analysis Mathematica, 1994, 20: 225-233.
[12] S. Ishak, J. Mogyorodi. On the P_Φ-spaces and the generalization of Herz's and Fefferman's inequality I. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 1982, 17: 229-234.
[13] W. W. Meng, L. Yu. Martingale transform between Q_1 and Q_Φ of martingale spaces. Statistics and Probability Letters, 2009, 79: 2328-2333.
[14] L. Yu. Martingale transforms between Hardy-Orlicz spaces Q_{Φ_1} and Q_{Φ_2} of martingales. Statistics and Probability Letters, 2011, 81: 1086-1093.