Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 95-98
Published Online May 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.43014

Hans汉斯

Proof Methods of Dirichlet Integral Based on Complex Function and Integral Transform

Wenbo Wang[1], Xiaobing Chang[2], Min Yu[1]

[1]College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan
[2]Wuhan Foreign Languages School, Wuhan
Email: wwb178@163.com

Received: Mar. 3rd, 2014; revised: Apr. 1st, 2014; accepted: Apr. 10th, 2014

Abstract

This article introduced three proof methods of Dirichlet integral through complex function and integral transform, and gave another method for proving Dirichlet integral using symmetrical property of Fourier transform.

Keywords

Dirichlet Integral, Formula of Laplace Transform, Formula of Fourier Transform

基于复变函数和积分变换的狄利克雷积分证法简介

王文波[1]，常晓兵[2]，喻　敏[1]

[1]武汉科技大学理学院，武汉
[2]武汉外校，武汉
Email: wwb178@163.com

收稿日期：2014年3月3日；修回日期：2014年4月1日；录用日期：2014年4月10日

摘　要

本文介绍了复变函数和积分变换里狄利克雷积分的三种证法，并利用傅里叶变换的对称性质证明出了狄

利克雷积分。

关键词

狄利克雷积分，拉普拉斯变换，傅里叶变换

1. 引言

狄利克雷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在工程技术，阻尼振动中有广泛的应用，其被积函数不能用初等函数表示，不能直接计算[1]-[3]。文[4]介绍了 9 种算法，大致是通过二重积分、级数、等式、收敛因子法计算出 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$。本文介绍了四种狄利克雷积分证明方法，其中证法一和二是两种经典的证明方法[5]，本文对证法二进行了适当的改进，在一定程度上简化了其证明的复杂度；证法三和四是本文在传统证明方法的基础上，将复变函数与积分变化、傅里叶变换相结合提出的两种新的证明方法，与传统的证明方法相比，本文提出的方法较好的改善了狄利克雷积分证明的复杂度，而且在不同条件下都可进行有效的推广。本文介绍的狄利克雷积分的四种证明方法详细证明过程如下。

2. 传统的狄利克雷积分证明方法与改进

第一个证明方法是利用 $f(t)=\begin{cases}1,|t|\le 1\\0,|t|>1\end{cases}$ 傅里叶积分表达式来证明。

证明一：函数 $f(t)=\begin{cases}1,|t|\le 1\\0,|t|>1\end{cases}$ 的傅里叶积分表达式为：

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-iw\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{iwt}\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}(\cos w\tau-i\sin w\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{iwt}\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{1}\cos w\tau\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{iwt}\mathrm{d}w=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin w}{w}(\cos wt+i\sin wt)\mathrm{d}w\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin w\cos wt}{w}\mathrm{d}w\quad(|t|\ne 1).\end{aligned}$$

$|t|=1, f(t)=\frac{1}{2}$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin w\cos wt}{w}\mathrm{d}w=\begin{cases}\frac{\pi}{2}f(t),|t|\ne 1\\\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2},|t|=1\end{cases}=\begin{cases}\frac{\pi}{2},|t|<1\\\frac{\pi}{4},|t|=1,\\0,|t|>1\end{cases}$$

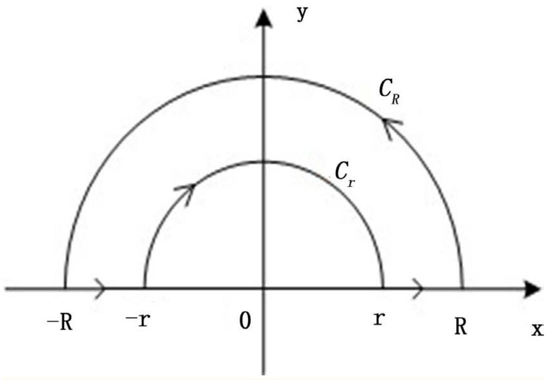
当 $t=0$，就有 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin w}{w}\mathrm{d}w=\frac{\pi}{2}$。

下面要介绍的第二种证法是用柯西－古萨定理和约当引理来证明。

证明二：
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x}\mathrm{d}x=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

先考虑$\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$沿着下图的积分路径



由柯西－古萨定理，有

$$\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{-R}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x+\int_{c_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{r}^{R}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x=0$$

令 $x=-t$, 则有 $\int_{-R}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x=\int_{R}^{r}\frac{\mathrm{e}^{-it}}{t}\mathrm{d}t=-\int_{r}^{R}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x$，

所以 $\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{c_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{r}^{R}\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{x}\mathrm{d}x=0$， 即

$$\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{c_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+2i\int_{r}^{R}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0, \tag{1}$$

由约当引理二可知 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0$，剩下只要求出 $\int_{c_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z$ 的值就可以了。$\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$ 的洛朗展式为：

$$\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}=\frac{1}{z}+i-\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{i^n z^{n-1}}{n!}+\cdots=\frac{1}{z}+\varphi(z),$$

$\varphi(z)=\frac{1}{z}+i-\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{i^n z^{n-1}}{n!}+\cdots$ 在 $z=0$ 是解析的，

$$\int_{c_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=\int_{c_r}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\int_{c_r}\varphi(z)\mathrm{d}z=\int_{\pi}^{0}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta+\int_{c_r}\varphi(z)\mathrm{d}z=-i\pi+\int_{c_r}\varphi(z)\mathrm{d}z$$

$\varphi(0)=i$， 当$|z|$充分小时， $|\varphi(z)|\le 2$， 当 r 充分小时，

$$\left|\int_{c_r}\varphi(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_{c_r}|\varphi(z)|\mathrm{d}s\le 2\int_{c_r}\mathrm{d}s=2\pi r\xrightarrow{r\to 0}0,$$

故 $\lim\limits_{r\to0}\int_{c_r}\varphi(z)\mathrm{d}z=0$， 即 $\lim\limits_{r\to0}\int_{c_r}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z=-i\pi$， 代入(2)式中有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

该证明方法比较复杂，上述证明中 $\lim\limits_{r\to0}\int_{c_r}\varphi(z)\mathrm{d}z=0$ 可以改良为如下证明：

证明：因为$\varphi(z)$在整个复平面上处处解析，故其和积分路径无关，只与起点和终点有关，则

$$\int_{C_r}\varphi(z)\mathrm{d}z=\int_{-r}^{+r}\varphi(z)\mathrm{d}z\xrightarrow{r\to 0}0.$$

3. 基于复变函数与积分变换的狄利克雷积分证明

第三种证明方法是本文新提出的方法，利用像函数的积分性质进行证明，证明方法如下：

证明三：像函数的性质为：如果$f(t)$的拉普拉斯变换$L\left[f(t)\right]=F(s),\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s$收敛，则

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s \tag{2}$$

上式中令$s=0$得到：$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}F(s)\mathrm{d}s$，利用这个式子，令$f(t)=\sin t$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}F(s)\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}L(\sin t)\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\arctan s\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

可以看出，基于像函数的性质进行证明非常简单，很大程度上简化了狄利克雷积分证明的复杂度。

4. 基于复变函数与积分变换的狄利克雷积分证明

本文提出的另一种方法是基于复变函数和傅里叶变换进行证明的，方法如下：

证法四：$f(t)=\begin{cases}1,|t|<1\\0,|t|>1\end{cases}$的傅里叶变换为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-iwt}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{+1}(\cos wt+i\sin wt)\mathrm{d}t=2\int_0^1\cos wt\mathrm{d}t=\frac{2\sin wt}{w}=F(w)$$

由傅里叶变换的对称性质：$F\left(\frac{2\sin t}{t}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin t}{t}\mathrm{e}^{-iwt}\mathrm{d}t=2\pi f(-w)=\begin{cases}2\pi,|w|<1\\0,|w>1|\end{cases}$

令$w=0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin t}{t}\mathrm{d}t=2\pi$，即$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$。

5. 结论

狄利克雷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$是积分学中著名的积分，许多重要积分的计算最后都化为此积分，本文在传统的狄利克雷积分证明进行了改进，并在此基础上，将复变函数与积分变换、傅里叶变换相结合，提出了两种新的狄利克雷积分证明的方法，较好的简化了狄利克雷积分证明的复杂度。

基金项目

国家自然科学基金(11201354)。

参考文献 (References)

[1] 张瑰，张梅 (2005) 对 Dirichlet 积分的几种简便证明. *高等数学研究*, **4**, 28-29, 30.

[2] 张元林 (2003) 积分变换. 高等教育出版社，北京, 9-10, 83-84, 38-39.

[3] 西安交通大学高等数学研究室 (2003) 复变函数. 高等教育出版社，北京, 168-170.

[4] 匡继昌 (2012) Dirichlet 积分九种解法的思路分析. *高等数学研究*, **4**, 61-66.

[5] 范金华 (2012) Dirichlet 积分的两种计算方法. *高等数学研究*, **1**, 69-70.