

A Class of Explicit Solutions for the Damped Euler-Poisson System

Yonggang Yin, Xiaoning Liu, Piaopiao Wu, Xiaotong Li, Chennan Wang

Department of Mathematics, College of Mathematics, Physics and Information Engineering,
Jiaxing University, Jiaxing
Email: qi.aogian@163.com

Received: May 13th, 2014; revised: Jun. 15th, 2014; accepted: Jun. 22nd, 2014

Copyright © 2014 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

We study the damped Euler-Poisson system with a negative cosmological constant in this paper. Some explicit solutions, including both blow-up solutions and global solutions, are explored. Meanwhile, we examine our results numerically with the help of the MATLAB software, and find that the numeric results are coincide with the theoretic results.

Keywords

Euler-Poisson System, Global Solutions, Blow-Up Solutions

带阻尼项Euler-Poisson方程的一类解析解

尹永刚, 刘晓宁, 吴飘飘, 李晓桐, 汪晨楠

嘉兴学院数理与信息工程学院数学系, 嘉兴
Email: qi.aogian@163.com

收稿日期: 2014年5月13日; 修回日期: 2014年6月15日; 录用日期: 2014年6月22日

摘要

本文对带阻尼项封闭型Euler-Poisson方程展开了研究, 给出了一类具体的解析解, 这类具体解包括了爆破

解和整体解。同时利用MATLAB数学软件,文中对相应结果给出了数值验证,并与理论分析结果完全吻合。

关键词

Euler-Poisson方程, 整体解, 爆破解

1. 引言

带有阻尼项的 Euler-Poisson 方程可表示为

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ (\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \beta \rho \mathbf{u} + \nabla P = -\rho \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi = 4\pi(\rho - \Lambda), \end{cases} \quad (1)$$

其中函数 ρ 代表密度, \mathbf{u} 代表速度, $P = K\rho^\gamma$ ($\gamma \geq 1$) 代表压力, Φ 是位势函数, $\beta > 0$ 是已知常数[1]。方程(1)用来描述三维空间中星际气体的流体运动规律, 其中的 Λ 表示宇宙常数, 当 $\Lambda > 0$ 时, 称宇宙空间为“开放”的; $\Lambda = 0$ 时, 称宇宙空间为“平坦的”; $\Lambda < 0$ 时, 称宇宙空间为“封闭”的。本文主要目的是讨论方程(1)的具体解析解, 包括爆破解和整体解。在这类问题的研究上, 已有文献多数是讨论 $\Lambda = 0$ 的情形, 如文献[2]-[4]及其后所列的参考文献。但是, $\Lambda < 0$ 时的情形讨论甚少。在文献[5]中, Yuen 最早讨论了 $\Lambda < 0$ 时无阻尼效应情形下(即 $\beta = 0$ 方程(1)的解析解形式。本文在文献[5]所做工作的基础上, 进一步讨论了含阻尼效应时方程(1)的一类具体解。

为了便于计算, 下文取 $\beta = 1$ 和 $\Lambda = -\frac{3}{4\pi}$, 这种特殊取法并不影响解的本质特征。本文的主要结果是下面这个定理。

定理 1 设 $\gamma = \frac{4}{3}$, 则封闭型 Euler-Poisson 方程(1)存在形如

$$\rho(t, r) = \begin{cases} \frac{1}{a^3(t)} y^3\left(\frac{r}{a(t)}\right), & \frac{r}{a(t)} < Z_\nu \\ 0, & \frac{r}{a(t)} \geq Z_\nu \end{cases}, \quad \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{a'(t)}{a(t)} \mathbf{x}, \quad (2)$$

的具体解。上式中的 $a(t)$ 满足如下方程

$$a''(t) + a'(t) + a(t) = -\frac{\lambda}{a^2(t)}, \quad t > 0, \quad 0 < a(0) = a_0, \quad a'(0) = a_1 \quad (3)$$

另外, (2)中的函数 $y(z)$ 满足 Lane-Emden 方程

$$y''(z) + \frac{2}{z} y'(z) + \frac{\pi}{K} y^3(z) = \nu, \quad z > 0, \quad 0 < y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 0 \quad (4)$$

其中 $K > 0$, $\nu = \frac{3\lambda}{4K}$, Z_ν 是函数 $y(z)$ 的第一个零点。同时, (2)式给出的解有如下性质:

- 1) 当 $\lambda \geq 0$ 时, 该解一定会在有限时刻爆破(此时解是局部解);
- 2) 当 $\lambda < 0$ 时, 该解是整体存在的, 并且收敛于某个稳态解。

顺便指出, 文章开头取 $\Lambda = -\frac{3}{4\pi}$ 的主要原因是为了计算简便。事实上, 如果 Λ 不取该值, 而取其它

负的常数, 那么(3)式中的方程就会变成[5]

$$a''(t) + a'(t) - \frac{4\pi\Lambda}{3}a(t) = -\frac{\lambda}{a^2(t)}$$

可以看到, 这时方程左边 $a(t)$ 项的系数就不再是 1。于是对于一般的负值 Λ , 只需对(3)式中的方程作一下修改, 定理 1 的结论仍旧成立, 同时, 定理 1 的证明方法是一样的。

定理 1 给出了带有阻尼项封闭型 Euler-Poisson 方程的一类具体解, 从而进一步完善了封闭型 Euler-Poisson 方程解析解的讨论。仔细分析(2)中给出的函数, 可知如果在某个时刻 T 有 $a(T)=0$, 则(2)式的解会在时刻 T 爆破。于是, 方程(1)的解是否会发生爆破现象的关键就是分析函数 $a(t)$ 是否会出现零点, 针对该问题的讨论见本文第二部分。第三部分给出定理 1 的证明。最后是总结部分。

2. 对 $a(t)$ 所满足的方程进行深入分析

这一部分主要是对方程(3)进行深入分析。考虑到方程(3)的解会随着参数 $\lambda=0$, $\lambda>0$ 和 $\lambda<0$ 的不同而变化。下面就这三类情形进行具体分析。

引理 1 若 $\lambda=0$, 那么方程(3)的解可表示为

$$a(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(a_0 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(a_1 + \frac{1}{2}a_0 \right) \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)。$$

证明 当 $\lambda=0$ 时, (3)式变为

$$a''(t) + a'(t) + a(t) = 0, \quad 0 < a(0) = a_0, \quad a'(0) = a_1 \quad (5)$$

由齐次线性常微分方程的特征根法[6], 得对应的特征方程为 $r^2 + r + 1 = 0$, 相应的特征根为 $r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 于是原方程的通解为

$$a(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)。$$

再根据 $a(0) = c_1 = a_0$ 和 $a'(0) = -\frac{1}{2}c_1 + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = a_1$, 可得

$$c_1 = a_0, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(a_1 + \frac{1}{2}a_0 \right)。$$

代入 $a(t)$ 的表达式即可得到所需结果。引理 1 证毕。

引理 2 若 $\lambda > 0$, 那么方程(3)的解 $a(t)$ 的最大存在区间一定是有限区间 $[0, T)$, 其中 $T < +\infty$, 且满足 $\lim_{t \rightarrow T^-} a(t) = 0$ 。

证明 采用反证法来证明。假设解 $a(t)$ 的最大存在区间是 $[0, +\infty)$, 那么 $\forall t > 0$, 都有 $a(t) > 0$ 。根据方程(3), 有

$$a''(t) + a'(t) = -\frac{\lambda}{a^2(t)} - a(t) < 0。 \quad (6)$$

不等式两边同乘以 e^t , 有 $e^t (a''(t) + a'(t)) < 0$, 即 $(e^t a'(t))' < 0$, 这表明函数 $e^t a'(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调递减的, 因此有 $e^t a'(t) < e^0 a'(0) = a_1$, 即 $a'(t) < a_1 e^{-t}$ 。在 $[0, t)$ 上积分得 $a(t) < a_0 + a_1 (1 - e^{-t}) \leq c_3$, 其中 c_3 为一正常数(这表明 $a(t)$ 有上界), 利用这个事实, 可知

$$a''(t) + a'(t) = -\frac{\lambda}{a^2(t)} - a(t) \leq -\frac{\lambda}{c_3^2},$$

对上述不等式积分得

$$a'(t) + a(t) \leq -\frac{\lambda}{c_3^2}t + a_0 + a_1,$$

再积分得

$$a(t) - a_0 + \int_0^t a(s) ds \leq -\frac{\lambda}{2c_3^2}t^2 + (a_0 + a_1)t,$$

即

$$a(t) \leq -\frac{\lambda}{2c_3^2}t^2 + (a_0 + a_1)t + a_0 - \int_0^t a(s) ds.$$

因为 $a(t) > 0$, 所以积分 $\int_0^t a(s) ds > 0$ 。另外, 函数 $-\frac{\lambda}{2c_3^2}t^2 + (a_0 + a_1)t + a_0$ 为关于 t 的含参变量 λ 的抛物线, 当 $\lambda > 0$ 时, 显然有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\lambda}{2c_3^2}t^2 + (a_0 + a_1)t + a_0 \right) = -\infty,$$

故在 $[0, +\infty)$ 上总会有一时刻 T , 当 $t > T$ 时, 满足

$$a(t) \leq -\frac{\lambda}{2c_3^2}t^2 + (a_0 + a_1)t + a_0 - \int_0^t a(s) ds < -\frac{\lambda}{2c_3^2}t^2 + (a_0 + a_1)t + a_0 < 0,$$

这与原假设产生矛盾, 故引理 2 证毕。

引理 3 若 $\lambda < 0$, 那么方程(3)的解 $a(t)$ 的最大存在区间一定为 $[0, +\infty)$, 且存在一个常数 A , 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = A$ 。

证明 对(3)式两边同乘以 $a'(t)$ 得

$$a''(t)a'(t) + (a'(t))^2 = -\frac{\lambda}{a(t)^2}a'(t) - a(t)a'(t), \quad (7)$$

对(7)式两边从 0 到 t 积分, 可得

$$\frac{1}{2}a'(t)^2 \Big|_0^t + \int_0^t (a'(s))^2 ds = \frac{\lambda}{a(t)} \Big|_0^t - \frac{1}{2}a(t)^2 \Big|_0^t,$$

再利用(3)中的两个初值条件 $a(0) = a_0$ 和 $a'(0) = a_1$, 化简并移项得

$$(a'(t))^2 + a^2(t) - \frac{2\lambda}{a(t)} + 2 \int_0^t (a'(s))^2 ds = -\frac{2\lambda}{a_0} + a_0^2 + a_1^2. \quad (8)$$

先证明解 $a(t)$ 的存在区间为 $[0, +\infty)$ 。

反证法 现不妨假设解 $a(t)$ 的最大存在区间为有限区间 $[0, T_*)$, 则当 $t \rightarrow T_*$ 时, 必有 $\lim_{t \rightarrow T_*} a(t) = 0$, 在

(8)式中令 $t \rightarrow T_*$, 并利用 $\lambda < 0$, 得 $\lim_{t \rightarrow T_*} a(t) = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow T_*} \left(-\frac{2\lambda}{a(t)} \right) = +\infty$ 这些事实, 易见(8)式的等号左边趋于 $+\infty$, 而等号右边却恒为常数, 出现矛盾, 所以解 $a(t)$ 的最大存在区间一定为无穷区间 $[0, +\infty)$ 。

接着证明存在一个常数 A , 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = A$ 。令 $\mu = -2\lambda$, 由于 $\lambda < 0$, 则 $\mu > 0$, 且(8)式可化为

$$(a'(t))^2 + a^2(t) + \frac{\mu}{a(t)} + 2 \int_0^t (a'(s))^2 ds = \frac{\mu}{a_0} + a_0^2 + a_1^2 \quad (9)$$

再令 $c_4 = \frac{\mu}{a_0} + a_0^2 + a_1^2 > 0$, 显然由(9)式可得 $a^2(t) \leq c_4$, $\frac{\mu}{a(t)} \leq c_4$, 故有 $\frac{\mu}{c_4} \leq a(t) \leq \sqrt{c_4}$, 所以解 $a(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界。同理可得

$$(a'(t))^2 \leq c_4, \quad \int_0^t (a'(s))^2 ds \leq \frac{c_4}{2},$$

所以 $|a'(t)| \leq \sqrt{c_4}$ 有, 且积分 $\int_0^{+\infty} (a'(s))^2 ds$ 收敛。再利用方程(3)得

$$|a''(t)| = \left| -\frac{\lambda}{a(t)} - a'(t) - a(t) \right|,$$

根据上述估计可得 $|a''(t)| \leq c_5$, 于是函数 $(a'(t))^2$ 是一致连续的, 故积分 $\int_0^{+\infty} (a'(s))^2 ds$ 中的被积函数满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} (a'(t))^2 = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} a'(t) = 0$ 。

现假设 $a(t)$ 不收敛, 那么必可构造出两个不同的子列 $\{a(t_k^1)\}$, $\{a(t_k^2)\}$, 使得

$$\lim_{t_k^1 \rightarrow +\infty} a(t_k^1) = A_1, \quad \lim_{t_k^2 \rightarrow +\infty} a(t_k^2) = A_2 \circ$$

在(9)式中一方面令 $t = t_k^1$ 并取极限, 另一方面令 $t = t_k^2$ 并取极限, 通过比较易知 $A_1 = A_2$, 所以必存在常数 A , 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = A$ 。于是在(3)式中令 $t \rightarrow \infty$, 得 $\frac{\lambda}{A^2} = -A$, 即 $A = \sqrt[3]{-\lambda}$ 。故引理 3 证毕。

3. 定理 1 的证明

首先可以按照文献[5]的方法证明形如(2)式的解确实满足方程(1), 因验证方法类似, 故此处略去具体细节。

然后对参数 λ 进行如下分类讨论:

当 $\lambda = 0$ 时, 由引理 1 知有

$$a(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(a_0 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(a_1 + \frac{1}{2} a_0 \right) \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)。$$

因此可以看出必存在 $T > 0$ 满足 $a(T) = 0$, 相应地就有 $\lim_{t \rightarrow T^-} \rho(t, 0) = +\infty$, 即形如(2)式的解会在有限时刻爆破。

当 $\lambda > 0$ 时, 根据引理 2 同样可知解会在有限时刻爆破。

当 $\lambda < 0$ 时, 由引理 3 可以发现形如(2)式的解会在阻尼作用下逐渐趋向于某个稳态解, 即存在某个仅依赖于 r 的函数 $\varphi(r)$ 满足当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $\rho(t, r) \rightarrow \varphi(r)$, $u(t, x) \rightarrow 0$ 。

最后, 通过 MATLAB 软件, 我们对方程(3)进行了数值验证, 发现模拟结果与上面所得理论完全吻合, $\lambda > 0$ 时的数值图像见图 1, $\lambda < 0$ 时的数值图像见图 2。

注: 利用 MATLAB 进行数值验证时, 图 1 选取数据如下: $\lambda = 1$, $a_0 = 10$, $a_1 = 5, 0, -5$, 从图形上可以看出, 曲线走势与引理 2 结论吻合且与 t 轴必有交点。若图 2 选取数据如下: $\lambda = -20$, $a_0 = 10$, $a_1 = 5, 0, -5$, 曲线最终趋向于 $\sqrt[3]{-\lambda} = \sqrt[3]{20}$ 。

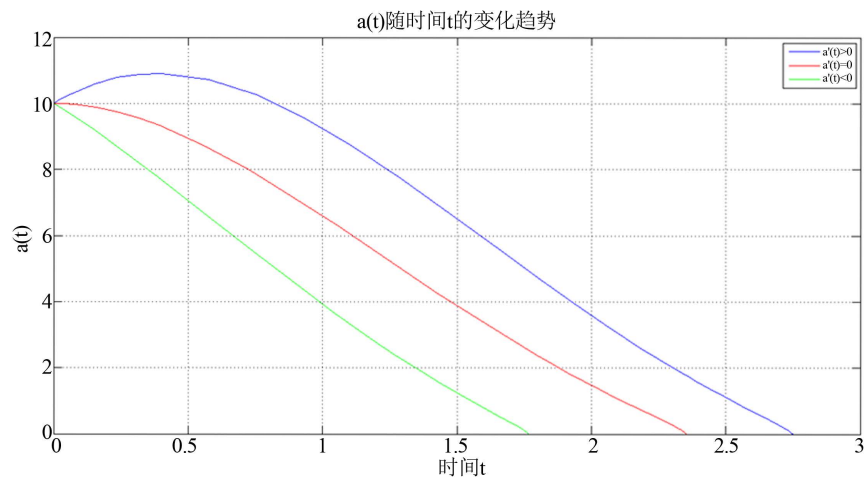


Figure 1. Numeric graph for $a(t)$ while $\lambda > 0$

图 1. $a(t)$ 在 $\lambda > 0$ 时的数值模拟图

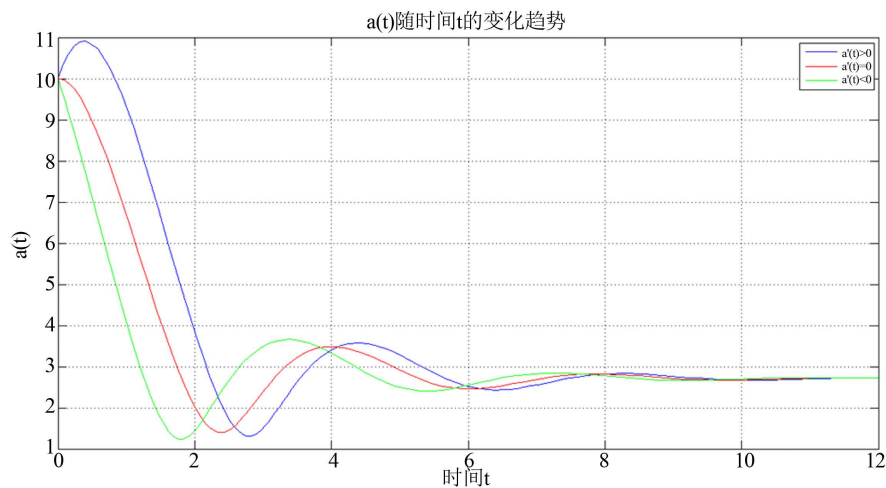


Figure 2. Numeric graph for $a(t)$ while $\lambda < 0$

图 2. $a(t)$ 在 $\lambda < 0$ 时的数值模拟图

4. 总结

本文通过探讨宇宙常数为负值时的 Euler-Poisson 方程，证明了当 $\lambda \geq 0$ 时，方程(1)都存在形如(2)式的爆破解；当 $\lambda < 0$ 时(2)式的解必整体存且趋向于某个稳态解。文献[5]对无阻尼效应封闭型 Euler-Poisson 方程给出了类似的解析解，其中考虑了 $\lambda = 0, a_1 = 0$ 和 $\lambda > 0, a_1 \leq 0$ 以及 $\lambda < 0$ 情形，特别是 $\lambda < 0$ 时文献[5]中得到的解是关于时间的周期函数。而本文考虑的是带阻尼项封闭型 Euler-Poisson 的解析解，对 a_1 没有符号条件限制，更重要的是 $\lambda < 0$ 时解会趋向于某个稳态解，这是加了阻尼效应之后产生的特殊现象，符合现实物理规律。另外，利用 MATLAB 数学软件，文中对方程(3)的解做了数值验证，数值结果与理论分析完全吻合。因此，本文进一步完善了关于“封闭”宇宙空间中 Euler-Poisson 方程解析解的相关理论。

致 谢

本文受国家级大学生创新训练计划项目资助，并在张景军和马柏林两位老师的悉心指导下完成本工

作，作者在此表示衷心的感谢。

基金项目

国家级大学生创新训练项目 201310354015。

参考文献 (References)

- [1] Binney, J. and Tremaine, S. (1994) *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, Trenton.
- [2] Deng, Y.B., Xiang, J.L. and Yang, T. (2003) Blowup Phenomena of Solutions to Euler-Poisson Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **286**, 295-306.
- [3] Yuen, M.W. (2007) Blowup Solutions for a Class of Fluid Dynamical Equations in \mathbb{R}^N . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **329**, 1064-1079.
- [4] Yuen, M.W. (2008) Analytical Blowup Solutions to the 2-Dimensional Isothermal Euler-Poisson Equations of Gaseous Stars. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 445-456.
- [5] Yuen, M.W. (2009) Analytically Periodic Solutions to the Three-Dimensional Euler-Poisson Equations of Gaseous Stars. *Classical and Quantum Gravity*, **26**, 235011 (8pp).
- [6] 王高雄, 周之铭, 朱思铭 (2006) 常微分方程. 第三版, 高等教育出版社, 北京.