Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 106-109
Published Online July 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.44016

Zabreĭko Lemma Does Not Extend to the Incomplete Normed Space

Xiaomeng Niu

Department of Mathematics and Statistics, Chifeng College, Chifeng
Email: ndnxm@126.com

Received: May 26th, 2014; revised: Jun. 21st, 2014; accepted: Jun. 30th, 2014

Abstract

In this paper, two incomplete normed spaces justify that the Zabreĭko lemma does not extend to the incomplete normed space.

Keywords

Normed Space, Incomplete, Seminorm

Zabreĭko引理不能扩展到不完备的赋范空间上去

牛潇萌

赤峰学院数学与统计学院，赤峰
Email: ndnxm@126.com

收稿日期：2014年5月26日；修回日期：2014年6月21日；录用日期：2014年6月30日

摘　要

在两个不完备的赋范空间上证明了Zabreĭko引理不能扩展到不完备的赋范空间上去。

关键词

赋范空间，不完备，半范数

1. 引言

开映射定理，闭图像定理和一致有界原理是泛函分析中的三个重要定理。Banach 空间的许多理论都是以开映射定理，闭图像定理和一致有界原理这三个相关结果为基础的。它们的结论并不是对任意赋范空间都成立的了。开映射定理，闭图像定理和一致有界原理不能扩展到不完备的赋范空间上去[1]。一般来说，在泛函分析教材中，这三个定理是直接用 Baire 纲定理来推导。文献[2]给出了一致有界原理的一个没有利用 Baire 纲定理任何其他形式去推导的证明。Zabreĭko 引理是 Baire 纲定理的一个弱描述，在文献[3]中利用 Zabreĭko 引理给出了这三个定理的又一种证明方法。

2. Zabreĭko 引理

定义 1[3] 向量空间 X 上的半范数或准范数是 X 上的一个实值函数 P，使得对 X 的所有元素 x 和 y 以及每一个纯量 α 都满足下列条件：

1) $p(\alpha x)=|a|\,p(x)$；

2) $p(x+y)\le p(x)+p(y)$；

条件(2)可以推广为任意有限个元素的形式：任取 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$，有

$$p\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}p(x_i)$$

例如，如果 X 和 Y 是赋范空间并且 T 是从 X 到 Y 的线性算子，则从 X 到 R 中的函数 $x\mapsto\|Tx\|$ 是 X 上的一个半范数，称为由 T 诱导的半范数。

引理 1[3]设 X 是向量空间，p 是 X 上的半范数，则

1) $p(0)=0$。

2) $p(x)\ge 0$。

3) $|p(x)-p(y)|\le p(x-y)$。

4) $G=\{x\in X:p(x)<1\}$ 是凸的，吸收的，平衡的。

从上面的论述可以看出，一个半范数未必是一个范数，但是当一个半范数 p 满足条件：当 $x\ne 0$ 时 $p(x)\ne 0$，则 p 是一个范数。显然，一个向量空间上的范数总是一个半范数，且事实上是由该赋范空间上的恒等算子诱导的半范数。

定义 2[3]从赋范空间 X 到非负实数集中的函数 f，称为是可数次可加的，如果对 X 中的每一个收敛级数 $\sum_n x_n$，有 $f\left(\sum_n x_n\right)\le\sum_n f(x_n)$。

引理 2[3] **(Zabreĭko 引理)** Banach 空间上的每一个可数次可加的半范数都是连续的。

3. Zabreĭko 引理不能扩展到不完备的赋范空间上去

引理 3[1] 设 X 是有限非零序列 $x=(\xi_k)$ 的全体按坐标定义线性运算构成的向量空间。用 $\|\cdot\|_1$ 表示 l^1 范数，$\|\cdot\|_\infty$ 表示 l^∞ 范数。记赋范空间 $(X,\|\cdot\|_1)\equiv X_1$，赋范空间 $(X,\|\cdot\|_\infty)\equiv X_2$。则 X_1,X_2 是不完备的赋范空间。

下面定理中所提到的赋范空间 X_1 和 X_2，指的是引理 3 中所定义的 X_1 和 X_2。

定理 1 (Zabreĭko 引理不能扩展到不完备的赋范空间上去) l^1 范数 $\|\cdot\|_1$ 是赋范空间 X_2 上的一个可数次可加半范数，但是它不是连续的。

证明 首先证明 $\|\cdot\|_1$ 是 X_2 上的一个半范数。

任取 $(a_n),(b_n)\in X_2$，任取 $\alpha\in F$。则存在 N，当 $n>N$ 时，$a_n=b_n=0$。因为，

$$\|\alpha(a_n)\|_1=\|(\alpha\cdot a_n)\|_1=|\alpha a_1|+|\alpha a_2|+\cdots+|\alpha a_n|=|\alpha|\|(a_n)\|_1$$

$$\begin{aligned}\|(a_n)+(b_n)\|_1&=\|(a_n+b_n)\|_1=|a_1+b_1|+|a_2+b_2|+\cdots+|a_N+b_N|\\&\le|a_1|+|a_2|+\cdots|a_N|+|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_N|\\&=\|(a_n)\|_1+\|(b_n)\|_1\end{aligned}$$

所以，$\|\cdot\|_1$ 是 X_2 上的一个半范数。

下面证明 $\|\cdot\|_1$ 在 X_2 上是可数次可加的。

设 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是 X_2 中的收敛级数，所以其部分和 $s_n=\sum_{k=1}^{n}y_k$ 按 l^∞ 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛。即存在 $s\in X_2$，使得 $\|s_n-s\|_\infty\ (n\to\infty)$。

只要证明了 $s_n=\sum_{k=1}^{n}y_k$ 在 l^1 中收敛(即 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 也是 X_1 中的收敛级数)，由引理 3 可知 l^1 范数 $\|\cdot\|_1$ 是 X_1 的范数，根据赋范空间中的范数总是可数次可加的。可以得到 $\left\|\sum_{n=1}^{\infty}y_n\right\|_1\le\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|_1$。

对于每一个 n，由于 $s_n\in X$，则 $s_n=\left(a_m^{(n)}\right)$，存在 N_n，当 $m>N_n$ 时，$a_m^{(n)}=0$。$s\in X$，则 $s=(a_m)$，存在 N_0，当 $m>N_0$ 时，$a_m=0$。取 $M_n=\max\{N_n,N_0\}$，则当 $m>M_n$ 时，$a_m^{(n)}=a_m=0$。

对于每一个 n，$\|s_n-s\|_\infty=\left\|\left(a_m^{(n)}-a_m\right)\right\|_\infty=\max\left\{\left|a_1^{(n)}-a_1\right|,\cdots,\left|a_{M_n}^{(n)}-a_{M_n}\right|\right\}$。

因为当 $n\to\infty$ 时，$\|s_n-s\|_\infty\to 0$。即对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，

$$\max\left\{\left|a_1^{(n)}-a_1\right|,\cdots,\left|a_{M_n}^{(n)}-a_{M_n}\right|\right\}<\varepsilon/M_n\text{。}$$

因此当 $n>N$ 时，

$$\left|a_1^{(n)}-a_1\right|<\varepsilon/M_n,\cdots,\left|a_{M_n}^{(n)}-a_{M_n}\right|<\varepsilon/M_n\text{。}$$

故对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，

$$\|s_n-s\|_1=\left\|\left(a_m^{(n)}-a_m\right)\right\|_1=\left|a_1^{(n)}-a_1\right|+\cdots+\left|a_{M_n}^{(n)}-a_{M_n}\right|<\varepsilon/M_n+\cdots+\varepsilon/M_n=\varepsilon\text{。}$$

即 $\|s_n-s\|_1\to 0\ (n\to\infty)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 也是 X_1 中的收敛级数，因此 $\left\|\sum_{n=1}^{\infty}y_n\right\|_1\le\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|_1$。从而由定义 2 可得出 $\|\cdot\|_1$ 在 X_2 上是可数次可加的。

综上可知，$\|\cdot\|_1$ 是赋范空间 X_2 上的一个可数次可加半范数。

$\|\cdot\|_1$ 在赋范空间 X_2 上不连续，这是因为取 $x_n=\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots\right)\in X_2$，有

$$\|x_n-0\|_\infty=\frac{1}{n}\to 0\ \ (n\to\infty)\text{，}$$

但是 $\|x_n\|_1=1$ 不趋于 $\|0\|_1=0\ (n\to\infty)$。因此 $\|\cdot\|_1$ 在赋范空间 X_2 上不连续。

4. 结束语

定理 1 说明了 Zabreĭko 引理不能扩展到不完备的赋范空间上去，同时也说明了赋范空间上的可数次可加半范数的连续性是区分 Banach 空间与不完备赋范空间的一种重要方式。

参考文献 (References)

[1] 牛潇萌 (2012) 两个不完备赋范空间上的一些结论. *赤峰学院学报*, **6**, 6-7.

[2] 牛潇萌 (2013) 一致有界原理的另一种证法论. *赤峰学院学报*, **1**, 10-11.

[3] Robert, E. (1998) Megginson, An Introduction to Banach Space Theory. Springer-Verlag, New York.