Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 229-232
Published Online November 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.46033

Hans汉斯

Form Analysis of Complementary Subspace

Jie Shen[1], Qin Jiang[2], Li Yuan[2]

[1]Department of Information Engineering, Wuhan Business University, Wuhan
[2]Department of Computer Science, Yunyang Teachers' College, Shiyan
Email: 1515827169@qq.com

Received: Sep. 16th, 2014; revised: Oct. 16th, 2014; accepted: Oct. 21st, 2014

Abstract

Complementary subspace form of finite dimensional vector spaces and the relationship among the residual subspaces are analyzed and classified in class.

Keywords

Vector Space, Complementary Subspace, Matrix, Set Class

余子空间的形式分析

沈　洁[1]，姜　琴[2]，袁　力[2]

[1]武汉商学院信息工程系，武汉
[2]郧阳师范高等专科学校计算机科学系，十堰
Email: 1515827169@qq.com

收稿日期：2014年9月16日；修回日期：2014年10月16日；录用日期：2014年10月21日

摘　要

对有限维向量空间的余子空间形式，以及余子空间之间的关系进行了分析，并用集类进行了分类。

关键词

向量空间，余子空间，矩阵，集类

1. 引言

余子空间的研究已经开展得的相当充分，但余子空间的形式没有完全归约。为讨论方便我们先给出相应的定义和说明。

定义：设 W 是向量空间 V 的一个子空间。V 的子空间 W' 叫做的一个余子空间，如果(i) $V=W+W'$，(ii) $W\cap W'=\{0\}$ [1]。

目前国内所有的代数教科书和文献中主要讨论了余子空间的性质，分别说明了余子空间的不满足唯一性[1]，及存在性[2]，而相关文献[3]和[4]对余子空间也只是做了余子空间的个数及相应的探讨，文献[5]对一些情况下的余子空间的存在性进行了更深入的量性分析。但对余子空间的具体形式与比较还没有很好地回答。

2. 主要结论

文[1]中关于有限维向量空间的余子空间的存在定理指明了构造一个子空间的余子空间的方法。

引理 1：设 v 是一个 n 维向量空间，$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$ 是 V 的子空间，且 $\dim W=t$ 。如果 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\alpha_n\}$ 是 V 的一组基，则 $L(\alpha_{y+1},\alpha_{t+2},\cdots,\alpha_n)$ 是 W 的一个余子空间。

下面的定理则描述了一个子空间的所有余子空间及相互关系。

定理 1：设 V 是一个 n 维向量空间，$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$ 是 V 的一个子空间，且 $\dim=t$ 。如果 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\alpha_n\}$ 是 V 的一组基，则 W 的全部(相对于 V 的)余子空间均具有形式

$$W'=L(\beta_{t+1},\cdots,\beta_n)$$

这里

$$\begin{pmatrix}\beta_{t+1}\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\left(B_{(n-t)\times t},C_{(n-t)\times(n-t)}\right)\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_t & \alpha_{t+1} & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

其中 C 可逆，而且当且仅当 $C_1^{-1}B_1=C_2^{-1}B_2$ 时，由矩阵 (B_1,C_1) 及 (B_2,C_2) 导出的余子空间相同。

这是因为，由引理 $W_0'=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$ 是 W 的一个余子空间。

于是，设 W' 是 W 的任一余子空间，那么由 W' 的任一组基 $\{\beta_{t+1},\cdots,\beta_n\}$ (因为维数定理断定 $\dim W'=t_{n-t}$)可扩充为 V 的一组基 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t,\beta_{t+1},\cdots,\beta_n\}$

这里 $W'=L(\beta_{t+1},\cdots,\beta_n)$

显然有 $W=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

从而存在两组基 $\{\alpha_i\}$，$\{\beta_i\}$ 之间的一可逆过渡矩阵 P 。将 P 适当地分块就有，

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_t\end{pmatrix}=P_{n\times n}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{t\times t} & D_{t\times(n-t)}\\ B_{(n-1)\times n} & C_{(n-1)\times(n-t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

自然有

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{t\times t} & D_{t\times(n-t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_t & \alpha_{t+1} & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

因 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

且 $\dim W=t$

于是$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\alpha_n\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t,\beta_{t+1},\cdots,\beta_n\}$是相互等价的线性无关的向量组，由向量被基底的表示唯一性便知

$$D_{t\times(n-y)}\equiv 0_{t\times(n-t)}$$

此时 $P=\begin{pmatrix} A & D \\ B & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$

由 P 得可逆性可知：A,C 可逆。

因此，W 的任一余子空间W'必有形式

$$W'=L(\beta_{t+1},\cdots,\beta_n)$$

且

$$\begin{pmatrix} \beta_{t+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}=(B,\quad C)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_t \\ \alpha_{t+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

其中C可逆

其次，若W'，W''都是W 的两个余子空间，其中

$$W'=L(\beta_{t+1},\cdots,\beta_n)$$

$$W''=L(\gamma_{t+1},\cdots,\gamma_n)$$

而且可分别由W'，W''的基$\{\beta_i\}$，$\{\gamma_i\}$得到V 的两组基

$$\{\beta_1,\cdots,\beta_t,\beta_{t+1},\cdots,\beta_n\}$$

$$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_t,\gamma_{t+1},\cdots,\gamma_n\}$$

由前面论述可得到

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

其中 A_1C_1 可逆；

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ B_2 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

其中 A_2C_2 可逆；

进而

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ B_2 & C_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2^{-1} & 0 \\ -C_2^{-1}B_3A_2^{-1} & C_2^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

因而有

$$\begin{pmatrix}\beta_{t+1}\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1A_2^{-1}-C_1C_2^{-1}B_2A_2^{-1} & C_1C_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_t\\ \gamma_{t+1}\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}$$

则 $W'=W''$

$\Leftrightarrow \{\beta_{t+1},\cdots,\beta_n\}$ 与 $\{\gamma_{t+1},\cdots,\gamma_n\}$ 是两组等价向量组。

$$\Leftrightarrow B_1A_2^{-1}-C_1C_2^{-1}B_2A_2^{-1}=0$$

$$\Leftrightarrow C_2^{-1}B_2=C_1^{-1}B_1$$

即 $W'\neq W''\Leftrightarrow C_2^{-1}B_2\neq C_1^{-1}B_1$

于是，由定理 1 有：

推论 1： N 维向量空间 V 的子空间 W 的余子空间所成之集与集 D^* 之间有一一对应的关系，这里

$$D^*=\left\langle\overline{\begin{pmatrix}A_{t\times t} & 0\\ B_{(n-t)\times t} & C_{(n-T)\times(n-t)}\end{pmatrix}}\,\middle|\,|A|\cdot|C|\neq 0\right\rangle$$

其中 $\dim W=t$， $\overline{\begin{pmatrix}A & 0\\ B & C\end{pmatrix}}$ 是形如 $\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ B_1 & C_1\end{pmatrix}$ $(|A_1|\cdot|C_1|\neq 0)$ 的矩阵所成的集类，而

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ B_1 & C_1\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}A & 0\\ B & C\end{pmatrix}\Leftrightarrow C_1^{-1}B_1=C^{-1}B$$

最后值得指出的是定理及其推论显然适合于平凡子空间的情形。

3. 结语

前面的结论表明，满足某些条件的余子空间的个数往往有很多，其原因主要是由基的不唯一性和真子空间的不完全覆盖性所引起。因而，有限维空间的余子空间可以通过基之间的矩阵形式表现出来，并可利用集类的形式表达。

基金项目

2014 年武汉商学院教学研究项目 2014Y020，2012 年郧阳师范高等专科学校科研项目 2012B03。

参考文献 (References)

[1] 张禾瑞, 郝鈵新 (2007) 高等代数. 高等教育出版社, 北京, 232-236.
[2] 徐邦腾 (1994) 余子空间的若干性质. *黄冈师专学报*, **1**, 21-23.
[3] 赵振藩 (1985) 余子空间. *哈尔滨师范大学学报*, **1**.
[4] 李家俊, 陈利国 (1989) 余子空间的性质. *徐州师范大学学报(自然科学版)*, **1**, 73-77.
[5] 黄炫冠, 王磊, 邓建斌 (2011) 关于余子空间个数的量性分析. *科技信息*, **24**, I0111.