Pure Mathematics 理论数学, **2014, 4, 261-267**
Published Online November 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.46038

Hans 汉斯

Asymptotic Properties for the Parameter Estimator in the Near-Explosive Autoregressive Process

Mingming Yu, Jiao Meng

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing
Email: mengyilianmeng@163.com, zbmengjiao@sina.com

Received: Oct. 13th, 2014; revised: Nov. 11th, 2014; accepted: Nov. 20th, 2014

Abstract

In this paper, we focus our attention on the following near-explosive autoregressive process: $\begin{cases} X_{k,n} = \theta_n X_{k-1,n} + \varepsilon_{k,n} \\ \varepsilon_{k,n} = \rho_n \varepsilon_{k-1,n} + V_k \end{cases}$. When $\theta_n \to 1$ and $\rho_n \to 1$ in the near-explosive case, the asymptotic distributions for the least squares estimator of θ_n can be obtained.

Keywords

Autoregressive Process, Least Squares Estimator, Near-Explosive

近爆炸性自回归序列中参数估计量的渐近性质

于明明，孟　娇

南京航空航天大学，南京
Email: mengyilianmeng@163.com, zbmengjiao@sina.com

收稿日期：2014年10月13日；修回日期：2014年11月11日；录用日期：2014年11月20日

摘　要

本论文的目的是研究近爆炸性自回归序列 $\begin{cases} X_{k,n}=\theta_n X_{k\text{-}1,n}+\varepsilon_{k,n} \\ \varepsilon_{k,n}=\rho_n\varepsilon_{k\text{-}1,n}+V_k \end{cases}$ 中，当 $\theta_n\to 1$，$\rho_n\to 1$ 时参数 θ_n 最小二乘估计量的渐近分布。

关键词

自回归序列，最小二乘法估计量，近爆炸

1. 介绍

本文我们讨论下面自回归序列:

$$\begin{cases} X_{k,n}=\theta_n X_{k-1,n}+\varepsilon_{k,n} \\ \varepsilon_{k,n}=\rho_n\varepsilon_{k-1,n}+V_k \end{cases}, \quad 1\le k\le n, \quad n\ge 1. \tag{1}$$

并且满足下列假设：

(1) θ_n，ρ_n 是未知参数，并且满足 $\theta_n=1+\frac{\gamma_1}{k_n}$，$\rho_n=1+\frac{\gamma_2}{k_n}$，$\gamma_1>\gamma_2>0$，其中 $k_n\to+\infty$ 且 $k_n=o(n)$；

(2) $\{V_k,k=1,2,\cdots,n\}$ 是独立同分布 $(i.i.d.)$ 随机变量，且 $EV_k=0$，$EV_k^2=\sigma^2$；

(3) $X_0=\varepsilon_0=0$。

为了估计未知参数 θ_n，我们通过使 $\Delta_n(\theta_n)=\sum_{k=1}^{n}\left(X_{k,n}-\theta_n X_{k-1,n}\right)^2$ 的值达到最小得到 θ_n 的最小二乘估计为 $\widehat{\theta}_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_{k,n}X_{k-1,n}}{\sum_{k=1}^{n}X_{k-1,n}^2}$，$n\ge 1$。

首先，当 θ_n 是一个固定的常数 θ 且 $\rho_n\equiv 0$ 时，这种情况下 $\widehat{\theta}_n$ 的渐近分布已经被很多科研者证明出来，我们可以参考文献[1] [2]，情况再复杂一点，当 ρ_n 也是一个固定的常数 ρ 时，在[3]中，作者证出了 $\widehat{\theta}_n$ 的渐近正态性。其次，科研者们不再满足于研究 θ_n 固定时的情况，假设 θ_n 是一个可变的序列，$\rho_n\equiv 0$，Chan 和 Wei 在[4]中证出了在 $\theta_n=1+\frac{\gamma_1}{n}$ 时，$\widehat{\theta}_n-\theta_n$ 渐近于一个布朗运动，当 $\rho_n=1+\frac{\gamma_2}{n}$，在[5]中，作者给出了 $\widehat{\theta}_n-\theta_n$ 的渐近分布。

最后，在这篇文章中我们来考虑 $\theta_n=1+\frac{\gamma_1}{k_n}$，$\rho_n=1+\frac{\gamma_2}{k_n}$，$\gamma_1>\gamma_2>0$ 时 $\widehat{\theta}_n-\theta_n$ 的渐近性质。我们有如下主要的结论：

定理 1：当 n 充分大时

$$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2\gamma_1(\gamma_1-\gamma_2)}k_n\theta_n^n\rho_n^{-n}\left(\widehat{\theta}_n-\theta_n\right)\xrightarrow{L}\frac{\xi_\rho}{\xi_\theta},$$

这里 $\xrightarrow{L}$ 表示依分布收敛，$(\xi_\theta,\xi_\rho)\sim N(0,\Lambda)$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{2\gamma_1} & \frac{\sigma^2}{\gamma_1+\gamma_2} \\ \frac{\sigma^2}{\gamma_1+\gamma_2} & \frac{\sigma^2}{2\gamma_2} \end{pmatrix}$。

2. 定理的证明

下面为了计算方便，对所有的$1 \le l \le n$，我们令

$$P_{l,n} = \sum_{k=1}^{l} X_{k,n} X_{k-1,n}，\quad S_{l,n} = \sum_{k=1}^{l} X_{k,n}^2，$$

$$M_{l,n} = \sum_{k=1}^{l} X_{k-1,n} V_k，\quad N_{l,n} = \sum_{k=2}^{l} X_{k-2,n} V_k，$$

计 $P_{n,n} = P_n$， $S_{n,n} = S_n$， $M_{n,n} = M_n$， $N_{n,n} = N_n$，这样我们得到

$$\widehat{\theta}_n - \theta_n = \frac{P_n - \theta_n S_{n-1,n}}{S_{n-1,n}}。$$

另外，定义一些新的序列

$$\xi_{\theta_n} = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{l=1}^{n} \theta_n^{-l} V_l，\quad \eta_{\theta_n} = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{l=1}^{n} \theta_n^{-(n-l)-1} V_l，$$

$$\xi_{\rho_n} = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{l=1}^{n} \rho_n^{-l} V_l，\quad \eta_{\rho_n} = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{l=1}^{n} \rho_n^{-(n-l)-1} V_l。$$

为了证明定理内容，我们引入下面引理

引理 2.1：对于模型(1)，我们得到

$$X_{n,n}^2 = \frac{\theta_n^2}{(\theta_n - \rho_n)^2} \theta_n^{2n} k_n \xi_{\theta_n}^2 + \frac{\rho_n^2}{(\theta_n - \rho_n)^2} \rho_n^{2n} k_n \xi_{\rho_n}^2 - \frac{2\theta_n \rho_n}{(\theta_n - \rho_n)^2} \theta_n^n \rho_n^n k_n \xi_{\theta_n} \xi_{\rho_n}$$

以及 $X_{n,n}\varepsilon_{n,n} = \frac{\theta_n}{(\theta_n - \rho_n)} \theta_n^n \rho_n^n k_n \xi_{\theta_n} \xi_{\rho_n} - \frac{\rho_n}{\theta_n - \rho_n} \rho_n^{2n} k_n \xi_{\rho_n}^2$， $\varepsilon_{n,n}^2 = k_n \rho_n^{2n} \xi_{\rho_n}^2$。

证明：由 Phillips 和 Magdalinos [6]，我们知 $X_{k,n} = \sum_{l=1}^{k} \theta_n^{k-l} \varepsilon_{l,n}$，$\varepsilon_{k,n} = \sum_{l=1}^{k} \rho_n^{k-l} V_{l,n}$， 故对所有的$1 \le k \le n$，有

$$X_{k,n} = \frac{\theta_n}{\theta_n - \rho_n} \theta_n^k \sum_{l=1}^{k} \theta_n^{-l} V_l - \frac{\rho_n}{\theta_n - \rho_n} \rho_n^k \sum_{l=1}^{k} \rho_n^{-l} V_l，\tag{2}$$

通过简单的计算，我们可以得到

$$\begin{aligned} X_{n,n}^2 &= \frac{\theta_n^2}{(\theta_n - \rho_n)^2} \theta_n^{2n} \left(\sum_{l=1}^{n} \theta_n^{-l} V_l \right)^2 + \frac{\rho_n^2}{(\theta_n - \rho_n)^2} \rho_n^{2n} \left(\sum_{l=1}^{n} \rho_n^{-l} V_l \right)^2 - \frac{2\theta_n \rho_n}{(\theta_n - \rho_n)^2} \theta_n^n \rho_n^n \sum_{l=1}^{n} \theta_n^{-l} V_l \sum_{l=1}^{n} \rho_n^{-l} V_l \\ &= \frac{\theta_n^2}{(\theta_n - \rho_n)^2} \theta_n^{2n} k_n \xi_{\theta_n}^2 + \frac{\rho_n^2}{(\theta_n - \rho_n)^2} \rho_n^{2n} k_n \xi_{\rho_n}^2 - \frac{2\theta_n \rho_n}{(\theta_n - \rho_n)^2} \theta_n^n \rho_n^n k_n \xi_{\theta_n} \xi_{\rho_n}, \end{aligned}$$

另外，通过公式(2)和 $\varepsilon_{n,n} = \rho_n^n \sum_{l=1}^{n} \rho_n^{-l} V_l$， 我们可以得到

$$X_{n,n}\varepsilon_{n,n} = \frac{\theta_n}{(\theta_n - \rho_n)} \theta_n^n \rho_n^n k_n \xi_{\theta_n} \xi_{\rho_n} - \frac{\rho_n}{\theta_n - \rho_n} \rho_n^{2n} k_n \xi_{\rho_n}^2 \text{ 以及 } \varepsilon_{n,n}^2 = k_n \rho_n^{2n} \xi_{\rho_n}^2。$$

引理 2.2：当 n 无穷大时，我们得到

$$\left(\xi_{\theta_n}, \eta_{\theta_n}, \xi_{\rho_n}, \eta_{\rho_n} \right)^{\mathrm{T}} \xrightarrow{L} \left(\xi_\theta, \eta_\theta, \xi_\theta, \eta_\theta \right)^{\mathrm{T}}，\text{ 其中} \left(\xi_\theta, \eta_\theta, \xi_\theta, \eta_\theta \right)^{\mathrm{T}} \sim N(0, \Sigma),$$

并且

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\frac{\sigma^2}{2\gamma_1} & 0 & \frac{\sigma^2}{\gamma_1+\gamma_2} & 0\\ 0 & \frac{\sigma^2}{2\gamma_1} & 0 & \frac{\sigma^2}{\gamma_1+\gamma_2}\\ \frac{\sigma^2}{\gamma_1+\gamma_2} & 0 & \frac{\sigma^2}{2\gamma_2} & 0\\ 0 & \frac{\sigma^2}{\gamma_1+\gamma_2} & 0 & \frac{\sigma^2}{2\gamma_2}\end{pmatrix}$$

证明：通过[7]中的推论 5.5，我们只需要证明：对任意的非零向量$v=(v_1,v_2,v_3,v_4)$，有$v\left(\xi_{\theta_n},\eta_{\theta_n},\xi_{\rho_n},\eta_{\rho_n}\right)^{\mathrm{T}}\xrightarrow{L}v\left(\xi_\theta,\eta_\theta,\xi_\theta,\eta_\theta\right)^{\mathrm{T}}$，对任意的$1\le l\le n$，令

$\xi_{nl}=\frac{1}{\sqrt{k_n}}\left(v_1\theta_n^{-l}+v_2\theta_n^{-(n-l)-1}+v_3\rho_n^{-l}+v_4\rho_n^{-(n-l)-1}\right)V_l$，有$v\left(\xi_{\theta_n},\eta_{\theta_n},\xi_{\rho_n},\eta_{\rho_n}\right)^{\mathrm{T}}=\sum_{l=1}^{n}\xi_{nl}$。

一方面，因为$\{\xi_{nl},1\le l\le n\}$是一个独立非同分布随机变量列，通过一些简单的计算可得到

$$E\left(\sum_{l=1}^{n}\xi_{nl}\right)^2=vE\left(\left(\xi_{\theta_n},\eta_{\theta_n},\xi_{\rho_n},\eta_{\rho_n}\right)^{\mathrm{T}}\left(\xi_{\theta_n},\eta_{\theta_n},\xi_{\rho_n},\eta_{\rho_n}\right)\right)v^{\mathrm{T}}=v\Sigma_nv^{\mathrm{T}}\to v\Sigma v^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\Sigma_n=\frac{\sigma^2}{k_n}\sum_{l=1}^{n}\begin{pmatrix}\theta_n^{-2l} & \theta_n^{-n-1} & (\theta_n\rho_n)^l & \rho_n^{-n-1}(\theta_n/\rho_n)^{-l}\\ \theta_n^{-n-1} & \theta_n^{-2n-2+2l} & \theta_n^{-n-1}(\theta_n/\rho_n)^l & (\theta_n\rho_n)^{-n-1+l}\\ (\theta_n\rho_n)^l & \theta_n^{-n-1}(\theta_n/\rho_n)^l & \rho_n^{-2l} & \rho_n^{-n-1}\\ \rho_n^{-n-1}(\theta_n/\rho_n)^{-l} & (\theta_n\rho_n)^{-n-1+l} & \rho_n^{-n-1} & \rho_n^{-2n-2+2l}\end{pmatrix}$$

另一方面，因为当n无穷大时，存在一个足够大的数K，有

$$\frac{8}{k_n}\sum_{l=1}^{n}\left(v_1^2\theta_n^{-2l}+v_2^2\theta_n^{-2n-2+2l}+v_3^2\rho_n^{-2l}+v_4^2\rho_n^{-2n-2+2l}\right)\to\frac{4\left(v_1^2+v_2^2\right)}{\gamma_1}+\frac{4\left(v_3^2+v_3^2\right)}{\gamma_2}\le K$$

并且

对任意的$\delta>0$，我们有

$$\sum_{l=1}^{n}E\left(\xi_{nl}^2\right)I_{\{|\xi_{nl}|>\delta\}}$$
$$\le\frac{8}{k_n}\sum_{l=1}^{n}\left(\left(v_1^2\theta_n^{-2l}+v_2^2\theta_n^{-2n-2+2l}+v_3^2\rho_n^{-2l}+v_4^2\rho_n^{-2n-2+2l}\right)\cdot E\left(V_l^2I_{\left\{8\left(v_1^2\theta_n^{-2l}+v_2^2\theta_n^{-2(n-l)-2}+v_3^2\rho_n^{-2l}+v_4^2\rho_n^{-2(n-l)-2}\right)V_l^2>\delta^2k_n\right\}}\right)\right)$$

因为$\theta_n>1$，$\rho_n>1$故有$8\left(v_1^2\theta_n^{-2l}+v_2^2\theta_n^{-2(n-l)-2}+v_3^2\rho_n^{-2l}+v_4^2\rho_n^{-2(n-l)-2}\right)<8\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2\right)$，所以我们可以得到

$$E\left(V_l^2I_{\left\{8\left(v_1^2\theta_n^{-2l}+v_2^2\theta_n^{-2(n-l)-2}+v_3^2\rho_n^{-2l}+v_4^2\rho_n^{-2(n-l)-2}\right)V_l^2>\delta^2k_n\right\}}\right)\le E\left(V_1^2I_{\left\{8\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2\right)V_1^2>\delta^2k_n\right\}}\right)$$

即有$\sum_{l=1}^{n}E\left(\xi_{nl}^2\right)I_{\{|\xi_{nl}|>\delta\}}\le KE\left(V_1^2I_{\left\{V_1^2>\frac{\delta^2k_n}{8\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2\right)}\right\}}\right)$，又因为$V_1^2$的可积性及$k_n\to\infty$，所以有

$E\left(V_1^2 I_{\left\{V_1^2>\frac{\delta^2 k_n}{8\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2\right)}\right\}}\right)\to 0$，因此我们可以得到 Lindeberg 条件 $\sum_{l=1}^{n} E\left(\xi_{nl}^2 I_{\{|\xi_{nl}|>\delta\}}\right)\to 0$；

基于上面两方面的原因，我们可以得到这个引理的证明。

引理 2.3： 当 n 无穷大时，我们可以得到

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1,n}V_k}{k_n\rho_n^n}=\xi_{\rho_n}\eta_{\rho_n}+o_p(1),\quad \frac{\varepsilon_{n,n}^2}{k_n\rho_n^{2n}}=\xi_{\rho_n}^2,\quad \frac{X_{n,n}^2}{k_n^3\theta_n^{2n}}=\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}\xi_{\theta_n}^2+o_p(1)，以及$$

$$\frac{M_n}{k_n^2\theta_n^n}=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}\xi_{\theta_n}\eta_{\theta_n}+o_p(1),\quad \frac{X_{n,n}\varepsilon_{n,n}}{k_n^2\theta_n^n\rho_n^n}=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}\xi_{\theta_n}\xi_{\rho_n}+o_p(1)。$$

证明： 首先，我们通过 Phillip 和 Magdalions 在[6]中对公式(10)的证明以及引理 2.1 可以得到 $\frac{\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1,n}V_k}{k_n\rho_n^n}=\xi_{\rho_n}\eta_{\rho_n}+o_p(1)$ 以及 $\frac{\varepsilon_{n,n}^2}{k_n\rho_n^{2n}}=\xi_{\rho_n}^2$。

其次，通过引理 2.1，引理 2.2 以及 $\frac{\rho_n^n}{\theta_n^n}=o(1)$，我们可以得到

$$\frac{X_{n,n}^2}{k_n^3\theta_n^{2n}}=\frac{\theta_n^2}{(\theta_n-\rho_n)^2k_n^2}\xi_{\theta_n}^2+\frac{\rho_n^{2n+2}}{(\theta_n-\rho_n)^2k_n^2\theta_n^{2n}}\xi_{\rho_n}^2-\frac{2\theta_n\rho_n^{n+1}}{(\theta_n-\rho_n)^2k_n^2\theta_n^n}\xi_{\theta_n}\xi_{\rho_n}=\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}\xi_{\theta_n}^2+o_p(1)$$

另外

$$\begin{aligned}\frac{M_n}{k_n^2\theta_n^n}=&\frac{\theta_n}{(\theta_n-\rho_n)k_n^2}\sum_{k=2}^{n}\theta_n^{-(n-k)-1}V_k\cdot\sum_{l=1}^{n}\theta_n^{-l}V_l-\frac{\rho_n^n}{\theta_n^n}\cdot\frac{\rho_n}{(\theta_n-\rho_n)k_n^2}\sum_{k=2}^{n}\rho_n^{-(n-k)-1}V_k\cdot\sum_{l=1}^{n}\rho_n^{-l}V_l\\&-\frac{\theta_n}{(\theta_n-\rho_n)k_n^2\theta_n^n}\sum_{k=2}^{n}\theta_n^{k-1}V_k\cdot\sum_{l=k}^{n}\theta_n^{-l}V_l+\frac{\rho_n^n}{\theta_n^n}\cdot\frac{\theta_n}{(\theta_n-\rho_n)k_n^2\rho_n^n}\sum_{k=2}^{n}\rho_n^{k-1}V_k\cdot\sum_{l=k}^{n}\rho_n^{-l}V_l,\end{aligned}$$

易知：

$$\frac{\theta_n}{(\theta_n-\rho_n)k_n^2}\sum_{k=2}^{n}\theta_n^{-(n-k)-1}V_k\cdot\sum_{l=1}^{n}\theta_n^{-l}V_l=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}\xi_{\theta_n}\eta_{\theta_n}+o_p(1)\tag{3}$$

$$\frac{\rho_n}{(\theta_n-\rho_n)k_n^2}\sum_{k=2}^{n}\rho_n^{-(n-k)-1}V_k\cdot\sum_{l=1}^{n}\rho_n^{-l}V_l=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}\xi_{\rho_n}\eta_{\rho_n}+o_p(1)\tag{4}$$

又因为

$$\frac{\theta_n^{-n}}{k_n^2(\theta_n-\rho_n)}\sum_{k=2}^{n}V_k^2=O_p\left(\theta_n^{-n}\frac{n}{k_n}\right)=o_p(1),\quad E\left(\frac{\theta_n^{1-n}}{k_n^2(\theta_n-\rho_n)}\sum_{k=2}^{n}\theta_n^{k-1}V_k\cdot\sum_{l=k+1}^{n}\theta_n^{-l}V_l\right)^2=o(1)$$

故

$$\frac{\theta_n}{(\theta_n-\rho_n)k_n^2\theta_n^n}\sum_{k=2}^{n}\theta_n^{k-1}V_k\cdot\sum_{l=k}^{n}\theta_n^{-l}V_l=\frac{\theta_n^{-n}}{k_n^2(\theta_n-\rho_n)}\sum_{k=2}^{n}V_k^2+\frac{\theta_n^{1-n}}{k_n^2(\theta_n-\rho_n)}\sum_{k=2}^{n}\theta_n^{k-1}V_k\cdot\sum_{l=k+1}^{n}\theta_n^{-l}V_l=o_p(1)\tag{5}$$

同理可知：

$$\frac{\theta_n}{(\theta_n-\rho_n)k_n^2\rho_n^n}\sum_{k=2}^{n}\rho_n^{k-1}V_k\cdot\sum_{l=k}^{n}\rho_n^{-l}V_l=o_p(1)\tag{6}$$

结合(3) (4) (5) (6)得：

$$\frac{M_n}{k_n^2\theta_n^n}=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}\xi_{\theta_n}\eta_{\theta_n}+o_p(1)\text{。}$$

最后，易知 $\frac{X_{n,n}\varepsilon_{n,n}}{k_n^2\theta_n^n\rho_n^n}=\frac{\theta_n}{k_n(\theta_n-\rho_n)}\xi_{\theta_n}\xi_{\rho_n}-\frac{\rho_n^{n+1}}{k_n\theta_n^n(\theta_n-\rho_n)}\xi_{\rho_n}^2=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}\xi_{\theta_n}\xi_{\rho_n}+o_p(1)$。

引理 2.4：当 n 无穷大时，我们有 $\frac{S_{n-1,n}}{k_n^4\theta_n^{2n}}=\frac{1}{2\gamma_1(\gamma_1-\gamma_2)^2}\xi_{\theta_n}^2+o_p(1)$。

证明：由[3]中(A.14)和(A.23)式，令 $L_n=\sum_{l=1}^{n}V_l^2$，得到

$$\begin{aligned}&\left(1-(\theta_n+\rho_n)^2-(\theta_n\rho_n)^2\right)S_{n-1,n}\\&=-X_{n,n}^2-(\theta_n\rho_n)^2X_{n-1,n}^2+L_n-2\theta_n\rho_n(\theta_n+\rho_n)P_{n-1,n}+2(\theta_n+\rho_n)M_n-2\theta_n\rho_nN_n\text{；}\end{aligned}\tag{7}$$

又

$$P_n=\frac{\theta_n+\rho_n}{1+\theta_n\rho_n}S_{n-1,n}+\frac{1}{1+\theta_n\rho_n}M_n+\frac{\theta_n\rho_n}{1+\theta_n\rho_n}X_{n,n}X_{n-1,n}\text{，}\tag{8}$$

并且

$$N_n=\frac{M_n-\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1,n}V_k}{\theta_n}\text{，}\quad X_{n-1,n}^2=\frac{X_{n,n}^2+\varepsilon_{n,n}^2-2X_{n,n}\varepsilon_{n,n}}{\theta_n}\text{，}\quad X_{n,n}X_{n-1,n}=\frac{X_{n,n}^2-X_{n,n}\varepsilon_{n,n}}{\theta_n}\text{，}$$

因此根据(7)式我们可以得到 $S_{n-1,n}=\frac{1}{\theta_n^2-1}X_{n,n}^2+R_{n1}$，其中

$$\begin{aligned}R_{n1}=&\frac{2\theta_n\rho_n}{(1-\theta_n\rho_n)(\theta_n^2-1)}X_{n,n}\varepsilon_{n,n}-\frac{\rho_n^2(1+\theta_n\rho_n)}{(1-\theta_n\rho_n)(1-\theta_n^2)(1-\rho_n^2)}\varepsilon_{n,n}^2+\frac{2\theta_n}{(1-\theta_n\rho_n)(1-\theta_n^2)}M_n\\&+\frac{1+\theta_n\rho_n}{(1-\theta_n\rho_n)(1-\theta_n^2)(1-\rho_n^2)}L_n+\frac{2\rho_n(1+\theta_n\rho_n)}{(1-\theta_n\rho_n)(1-\theta_n^2)(1-\rho_n^2)}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1,n}V_k\text{，}\end{aligned}$$

由引理 2.3 得 $\frac{1}{\theta_n^2-1}X_{n,n}^2=\frac{k_n^4\theta_n^{2n}}{2\gamma_1(\gamma_1-\gamma_2)^2}\xi_{\theta_n}^2+o_p\left(k_n^4\theta_n^{2n}\right)$ 及 $R_{n1}=o_p\left(k_n^4\theta_n^{2n}\right)$，引理得证。

定理 1 的证明

由(7) (8)式得，$P_n-\theta_nS_{n-1,n}=-\frac{\rho_n}{1-\theta_n\rho_n}X_{n,n}\varepsilon_{n,n}-\frac{\rho_n^3}{(1-\theta_n\rho_n)(1-\rho_n^2)}\varepsilon_{n,n}^2+R_{n2}$，

其中 $R_{n2}=\frac{\rho_n}{(1-\theta_n\rho_n)(1-\rho_n^2)}L_n+\frac{1}{1-\theta_n\rho_n}M_n+\frac{2\rho_n^2}{(1-\theta_n\rho_n)(1-\rho_n^2)}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1,n}V_k$。

由引理 2.1 和引理 2.3 得

$$-\frac{\rho_n}{1-\theta_n\rho_n}X_{n,n}\varepsilon_{n,n}-\frac{\rho_n^3}{(1-\theta_n\rho_n)(1-\rho_n^2)}\varepsilon_{n,n}^2=\frac{k_n^3\theta_n^n\rho_n^n}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\xi_{\theta_n}\xi_{\rho_n}+o_p\left(k_n^3\theta_n^n\rho_n^n\right)\tag{9}$$

又经过简单的计算得

$$R_{n2}=o_p\left(k_n^3\theta_n^n\rho_n^n\right)\text{，}\tag{10}$$

结合(9)(10)，定理得证。

致　谢

本论文是在我与同学孟娇的合作中完成的。感谢导师给予我们的支持，感谢南京航空航天大学数学系的各位老师给予我们的指导和帮助，感谢各位文献作者的成果给予我们的借鉴。

参考文献 (References)

[1] Anderson, T.W. (1959) On asymptotic distributions of estimators of parameters of stochastic difference equations. *Annals of Mathematical Statistics*, **32**, 676-687.

[2] Zhou, Z.Z. and Lin, Z.Y. (1958) Asymptotic theory for LAD estimation of moderate deviations from a unit root. *Statistics and Probability Letters*, **29**, 1188-1197.

[3] Bercu, B. and Proia, F. (2013) A sharp analysis on the asymptotic behavior of the Durbin-Watson statistic for the first-order autoregressive process. *ESAIM*: *Probability and Statistics*, **17**, 500-530.

[4] Chan, N.H. and Wei, C.Z. (1987) Asymptotic inference for nearly nonstationary AR(1) processes. *Annals of Statistics*, **15**, 1050-1063.

[5] Nabeya, S. and Perron, P. (1994) Local asymptotic distributions related to the AR(1) model with dependent errors. *Journal of Econometrics*, **62**, 229-264.

[6] Phillips, P.C.B. and Magdalinos, T. (2007) Limit theory for moderate deviations from a unit root. *Journal of Econometrics*, **136**, 115-130.

[7] Kallenberg, O. (2002) Foundations of modern probability. Springer, Berlin.