Pure Mathematics 理论数学, **2015, 5, 136-142**
Published Online July 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.54021

A Kind of Helicoidal Surface in 3-Dimensional Minkowski Space

Heng Wu, Pingliang Huang

Department of Mathematics, College of Sciences, Shanghai University, Shanghai
Email: wlavande@shu.edu.cn

Received: Jun. 19th, 2015; accepted: Jul. 2nd, 2015; published: Jul. 8th, 2015

Abstract

A helicoidal surface in Minkowski 3-sapce is defined as the orbit of a plane curve under a screw motion. In this paper, we study a kind of helicoidal surface with light-like axis in Minkowski 3-space. As a result, we constructed the representation formulas for these helicoidal surfaces with meaning curvature H and Guass curvature K satisfying $a_1H^2 + a_2K = g(s)$.

Keywords

Minkowski Space, Helicoidal Surface, Meaning Curvature, Gauss Curvature

三维Minkowski空间中的一类螺旋面

吴　珩，黄平亮

上海大学理学院数学系，上海
Email: wlavande@shu.edu.cn

收稿日期：2015年6月19日；录用日期：2015年7月2日；发布日期：2015年7月8日

摘　要

三维Minkowski空间中，螺旋面由一条平面曲线进行螺旋运动生成。本文研究以类光向量为轴进行螺旋运动所生成的螺旋面，主要讨论平均曲率H和高斯曲率K满足关系式$a_1H^2 + a_2K = g(s)$的螺旋面的存在性

以及表达式。

关键词

Minkowski空间，螺旋面，平均曲率，高斯曲率

1. 引言

狭义相对论的提出，促使了 Minkowski 空间几何的产生(见[1])，Minkowski 空间是具有一个负指标的 Lorentz 空间(见[2])。越来越多的数学家开始讨论 Minkowski 空间中的曲线和曲面(见[3]-[5])，例如：Bertrand 曲线、直纹面、旋转曲面、螺旋面等，其中螺旋面由一条平面曲线进行螺旋运动生成，其鲜明的几何性质引起了大家的兴趣。1990 年，Dillen 和 Kuhnel 在[6]中确定了三维 Minkowski 空间的螺旋运动群。Rafael Lopez 和 Esma Demir 在[7]中研究了平均曲率 H 和高斯曲率 K 为常值的螺旋面。Beneki，Kaimakamis 和 Papantoniou 在[8] [9]中讨论了平均曲率 H 或高斯曲率 K 为给定光滑函数的螺旋面。2007 年，侯中华和纪凤辉在[10] [11]中构造出平均曲率 H 和高斯曲率 K 满足关系式 $H^2=K$ 的螺旋面的表达式。

设 E_1^3 为 3 维 Minkowski 空间，$[o;e_1,e_2,e_3]$ 为 E_1^3 空间的伪正交标架(见[11])，即

$$\langle e_1,e_1\rangle=\langle e_1,e_2\rangle=\langle e_2,e_3\rangle=\langle e_3,e_3\rangle=0,\langle e_1,e_3\rangle=\langle e_2,e_2\rangle=\langle e_3,e_1\rangle=1,$$

则对 E_1^3 中任意的 $\alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3)$ 有

$$\langle \alpha,\beta\rangle=x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1$$

在 E_1^3 中，以类光向量 e_3 为轴进行旋转，旋转矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ -\dfrac{t^2}{2} & -t & 1 \end{pmatrix}, t\in R$$

设生成曲线 $r(s)=(s,0,x(s))$，$s\in R$，在伪正交标架 $[o;e_1,e_2,e_3]$ 下，以类光向量 e_3 为轴进行螺旋运动，螺旋面的一般形式为

$$X(s,t)=\left(s,st,x(s)-\frac{st^2}{2}+ht\right) \tag{1.1}$$

其中 $s,t\in R,h>0$ 表示螺距。本文主要讨论：在 E_1^3 中，平均曲率 H 和高斯曲率 K 满足关系式 $a_1H^2+a_2K=g(s)$ 时，沿类光方向进行螺旋运动的螺旋面的存在性以及表达式，其中 a_1,a_2 为常数，$g(s)$ 为给定光滑函数。

下面给出本文所要证明的主要结论。

定理 1：在伪正交标架下，以类光向量 e_3 为轴进行螺旋运动所生成的螺旋面满足 $a_1H^2+a_2K=g(s)$，其中 a_1,a_2 为常数，$s\in R,s\neq 0$，则

1)若 $g(s)=0,a_1\neq 0,a_1(a_1+a_2)\geq 0$，则螺旋面的表达式为

$$X(s,t)=\left(s,st,\int\frac{1}{2c_1\varepsilon(\eta s)^{\lambda}}\mathrm{d}s-\frac{h^2}{2s}-\frac{st^2}{2}+ht+c_2\right),$$

且生成曲线为

$$r(s)=\left(s,0,\int\frac{1}{2c_1\varepsilon(\eta s)^{\lambda}}\mathrm{d}s-\frac{h^2}{2s}+c_2\right),$$

其中 c_1,c_2 为积分常数，$\varepsilon=\pm1$，$\lambda=\dfrac{-2a_1-4a_2\pm4\varepsilon\eta\sqrt{a_2(a_1+a_2)}}{a_1}$，当 $s>0$ 时，$\eta=1$；当 $s<0$ 时，$\eta=-1$。

2) 若 $g(s)=a_3s^{\frac{m}{2}},a_3,m\in R,a_3\neq0$，则螺旋面的表达式为

$$X(s,t)=\left(s,st,\frac{1}{2a_3}F\left(\frac{m}{2}\right)\int\frac{1}{s^{\frac{m+4}{2}}}\mathrm{d}s-\frac{h^2}{2s}-\frac{st^2}{2}+ht+c_3\right),$$

且生成曲线为

$$r(s)=\left(s,0,\frac{1}{2a_3}F\left(\frac{m}{2}\right)\int\frac{1}{s^{\frac{m+4}{2}}}\mathrm{d}s-\frac{h^2}{2s}+c_3\right),$$

其中 $\varepsilon=\pm1$，$F\left(\frac{m}{2}\right)=\dfrac{a_1m^2}{64\varepsilon}+\dfrac{(a_1+a_2)m}{4\varepsilon}+\dfrac{(a_1+a_2)}{\varepsilon}$，$c_3$ 为积分常数。

注 1.1：当 $\varepsilon=1$ 时，螺旋面为类空曲面；当 $\varepsilon=-1$ 时，螺旋面为类时曲面(见定义 2.3)。

注 1.2：本文不考虑类光曲面，即 $2s^2x'(s)-h^2=0$ 的情况。

注 1.3：当 $\dfrac{a_1}{a_2}=-1$，$g(s)=0$ 时，即 $H^2=K$，侯中华和纪凤辉在[9]中已研究了满足该条件的螺旋；当 $a_1=0$ 或 $a_2=0$ 时，即平均曲率 H 和高斯曲率 K 为给定的光滑函数，Beneki，Kaimakamis 和 Papantoniou 在[7] [8]中已讨论了满足该条件的螺旋面。本文研究的是一类混合问题，是对上述结果的补充。

注 1.4：$g(s)$ 为一般函数时，也可得到存在性结果(见推广 2)。

2. 背景知识

定义 2.1：设 E_1^3 是三维 Minkowski 空间，对任意的 $\alpha\in E_1^3,\alpha\neq0$ 有如下定义

1) $\langle\alpha,\alpha\rangle>0$，则称 α 是类空向量；

2) $\langle\alpha,\alpha\rangle<0$，则称 α 是类时向量；

3) $\langle\alpha,\alpha\rangle=0$，则称 α 是类光向量。

定义 2.2：设 $X(s,t)$ 是 E_1^3 中的曲面，$U=\dfrac{X_s\times X_t}{|X_s\times X_t|}$ 为曲面的法向量，则

1) $\mathrm{I}=E(\mathrm{d}s)^2+2F\mathrm{d}s\mathrm{d}t+G(\mathrm{d}t)^2$ 称为曲面的第一基本形式，其中 $E=\langle X_s,X_s\rangle,F=\langle X_s,X_t\rangle$，$G=\langle X_t,X_t\rangle$ 称为第一基本量；

2) $\mathrm{II}=L(\mathrm{d}s)^2+2M\mathrm{d}s\mathrm{d}t+N(\mathrm{d}t)^2$ 称为曲面的第二基本形式，其中 $L=\langle U,X_{ss}\rangle,M=\langle U,X_{st}\rangle$，$N=\langle U,X_{tt}\rangle$ 称为第二基本量。

定义 2.3：当 $EG-F^2>0$ 时，称曲面为类空曲面；当 $EG-F^2<0$ 时，称曲面为类时曲面；当 $EG-F^2=0$ 时，称曲面为类光曲面。

定义 2.4：设 $X(s,t)$ 是 E_1^3 中的曲面，则曲面的平均曲率 H 和高斯曲率 K 为

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)},\quad K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

定义 2.5：对 E_1^3 中任意的 $x=(x_1,x_2,x_3),\ y=(y_1,y_2,y_3)$，若取标架为伪正交标架，则 x,y 的外积为

$$x\times y=\left\{\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_3 & x_1\\ y_3 & y_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}\right\}.$$

3. 主要结论的证明

本节给出主要定理的证明过程。

证明：满足(1.1)式的螺旋面 $X(s,t)$ 的第一基本形式、第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}=2x'(s)(\mathrm{d}s)^2+2h\mathrm{d}s\mathrm{d}t+s^2(\mathrm{d}t)^2,$$

$$\mathrm{II}=\frac{sx''(s)}{\sqrt{\left|2s^2x'(s)-h^2\right|}}(\mathrm{d}s)^2-\frac{2h}{\sqrt{\left|2s^2x'(s)-h^2\right|}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t-\frac{s^2}{\sqrt{\left|2s^2x'(s)-h^2\right|}}(\mathrm{d}t)^2.$$

根据定义 2.4 有

$$H=\frac{s^3x''(s)-2s^2x'(s)+2h^2}{2\varepsilon\left(\varepsilon\left(2s^2x'(s)-h^2\right)\right)^{3/2}},\ K=-\frac{s^3x''(s)+h^2}{\varepsilon\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^2},$$

其中 $\varepsilon=\pm1$，当 $\varepsilon=1$ 即 $2s^2x'(s)-h^2>0$ 时，螺旋面为类空曲面；当 $\varepsilon=-1$ 即 $2s^2x'(s)-h^2<0$ 时，螺旋面为类时曲面。

$$a_1H^2+a_2K=a_1\left(\frac{s^3x''(s)-2s^2x'(s)+2h^2}{2\varepsilon\left(\varepsilon\left(2s^2x'(s)-h^2\right)\right)^{3/2}}\right)^2+a_2\left(-\frac{s^3x''(s)+h^2}{\varepsilon\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^2}\right),$$

其中

$$\begin{aligned}\left(\frac{s^3x''(s)-2s^2x'(s)+2h^2}{2\varepsilon\left(\varepsilon\left(2s^2x'(s)-h^2\right)\right)^{3/2}}\right)^2&=\frac{s^6\left(x''(s)\right)^2+4s^4\left(x'(s)\right)^2+4h^4-4s^5x'(s)x''(s)+4s^3h^2x''(s)-8s^2h^2x'(s)}{4\varepsilon^5\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^3}\\&=\frac{s^4\left(sx''(s)+2x'(s)\right)^2-4\left(2s^2x'(s)-h^2\right)\left(s^3x''(s)+h^2\right)}{4\varepsilon\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^3}\\&=\frac{s^4\left(sx''(s)+2x'(s)\right)^2}{4\varepsilon\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^3}-\frac{s^3x''(s)+h^2}{\varepsilon\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^2},\end{aligned}$$

于是

$$a_1H^2+a_2K=\frac{a_1s^4}{4\varepsilon}\frac{\left(sx''(s)+2x'(s)\right)^2}{\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^3}-\frac{a_1+a_2}{\varepsilon}\frac{s^3x''(s)+h^2}{\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^2},$$

又因为

$$\frac{sx''(s)+2x'(s)}{\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^2}=-\frac{1}{2s}\left(\frac{1}{2s^2x'(s)-h^2}\right)',\quad\frac{s^3x''(s)+h^2}{\left(2s^2x'(s)-h^2\right)^2}=-\frac{s}{2}\left(\frac{1}{2s^2x'(s)-h^2}\right)'-\frac{1}{2s^2x'(s)-h^2},$$

不妨令 $\dfrac{1}{2s^2x'(s)-h^2}=A$，从而可得

$$a_1H^2+a_2K=\frac{a_1s^2}{16\varepsilon A}(A')^2+\frac{a_1+a_2}{2\varepsilon}sA'+\frac{a_1+a_2}{\varepsilon}A=g(s). \tag{3.1}$$

1) 若 $g(s)=0$ 时，有

$$\frac{a_1s^2}{16\varepsilon A}(A')^2+\frac{a_1+a_2}{2\varepsilon}sA'+\frac{a_1+a_2}{\varepsilon}A=0,$$

即

$$\frac{a_1s^2}{16\varepsilon}\left(\frac{A'}{A}\right)^2+\frac{a_1+a_2}{2\varepsilon}s\frac{A'}{A}+\frac{a_1+a_2}{\varepsilon}=0, \tag{3.2}$$

令 $\frac{A'}{A}=B$，则(3.2)等价于

$$\frac{a_1}{16\varepsilon}s^2B^2+\frac{a_1+a_2}{2\varepsilon}sB+\frac{a_1+a_2}{\varepsilon}=0,$$

当 $a_1\neq 0, a_1(a_1+a_2)\geq 0$ 时，有

$$B_i=\frac{-4(a_1+a_2)s\pm 4\varepsilon\sqrt{a_2(a_1+a_2)s^2}}{a_1s^2}, i=1,2,$$

那么

$$|A|=c_1(\eta s)^{B_i}=c_1(\eta s)^{\frac{-4(a_1+a_2)\pm 4\varepsilon\eta\sqrt{a_2(a_1+a_2)}}{a_1}},$$

即

$$\frac{1}{\varepsilon\left(2s^2x'(s)-h^2\right)}=c_1(\eta s)^{B_i}=c_1(\eta s)^{\frac{-4(a_1+a_2)\pm 4\varepsilon\eta\sqrt{a_2(a_1+a_2)}}{a_1}},$$

则

$$\begin{aligned}x'(s)&=\frac{1}{2s^2c_1\varepsilon(\eta s)^{\frac{-4(a_1+a_2)\pm 4\varepsilon\eta\sqrt{a_2(a_1+a_2)}}{a_1}}}+\frac{h^2}{2s^2}\\&=\frac{1}{2c_1\varepsilon(\eta s)^{\frac{-2a_1+4a_2\pm 4\varepsilon\eta\sqrt{a_2(a_1+a_2)}}{a_1}}}+\frac{h^2}{2s^2},\end{aligned}$$

其中 c_1 为积分常数，当 $s>0$ 时， $\eta=1$；当 $s<0$ 时， $\eta=-1$。

对上式两边积分可得

$$x(s)=\int\frac{1}{2c_1\varepsilon(\eta s)^{\lambda}}\mathrm{d}s-\frac{h^2}{2s}+c_2,$$

其中 c_2 为积分常数， $\lambda=\frac{-2a_1-4a_2\pm 4\varepsilon\eta\sqrt{a_2(a_1+a_2)}}{a_1}$， 当 $s>0$ 时， $\eta=1$；当 $s<0$ 时， $\eta=-1$。

2) 若 $g(s)=a_3s^{\frac{m}{2}}, a_3, m\in R, a_3\neq 0$， 即

$$\frac{a_1s^2}{16\varepsilon A}(A')^2+\frac{a_1+a_2}{2\varepsilon}sA'+\frac{a_1+a_2}{\varepsilon}A=a_3s^{\frac{m}{2}}, \tag{3.3}$$

设 $A(s)=bs^{\frac{m}{2}}$ (b 为待定系数)为(3.3)式的解，将 $A(s)$、 $A'(s)$ 带入(3.3)式有

$$b\left[\frac{a_1m^2}{64\varepsilon}+\frac{(a_1+a_2)m}{4\varepsilon}+\frac{(a_1+a_2)}{\varepsilon}\right]=a_3,$$

这里仅考虑 $F\left(\frac{m}{2}\right)=\frac{a_1m^2}{64\varepsilon}+\frac{(a_1+a_2)m}{4\varepsilon}+\frac{(a_1+a_2)}{\varepsilon}\neq 0$ 的情况。

即

$$b=\frac{a_3}{F\left(\frac{m}{2}\right)},$$

因此

$$A(s)=\frac{1}{2s^2x'(s)-h^2}=\frac{a_3}{F\left(\frac{m}{2}\right)}s^{\frac{m}{2}},$$

从而可得

$$x(s)=\frac{1}{a_3}F\left(\frac{m}{2}\right)\int\frac{1}{s^{\frac{m+4}{2}}}\mathrm{d}s-\frac{h^2}{2s}+c_3,$$

其中 c_3 为积分常数。

对更一般的 $g(s)$，也可以有

推广 2：若 $a_2(a_1+a_2)+\frac{a_1g(s)}{\varepsilon A}\geq 0$，则(3.1)式在至少在区间 $|s-s_0|\leq\xi$ 上存在一解。

证明：若 $a_2(a_1+a_2)+\frac{a_1g(s)}{\varepsilon A}\geq 0$，则(3.1)有解等价于

$$f(A,s)=\frac{-4(a_1+a_2)A\pm 4\varepsilon A\sqrt{a_2(a_1+a_2)+\frac{a_1g(s)}{\varepsilon A}}}{a_1s},$$

有解。因为 $2s^2x'(s)-h^2\neq 0$，即 $x'(s)\neq\frac{h^2}{2s^2}$ 时，$A(s)$ 是连续函数，又 $g(s)$ 为连续函数，所以 $f(A,s)$ 是连续的。因此，$f(A,s)$ 在区间 $|s-s_0|\leq\xi$ 上连续有界。由经典的 Peano 解的存在性定理可知，$f(A,s)$ 至少在区间 $|s-s_0|\leq\xi$ 上存在一解，因此，(3.1)式至少在区间 $|s-s_0|\leq\xi$ 上存在一解。

基金项目

本研究获得“上海高校一流学科(B 类)”经费资助。

参考文献 (References)

[1] Naber, G.L. (1992) The geometry of Minkowski Spacetime. Springer-Verlag, New York.

[2] Nappi, J. and Yoshida, H. (2007) Fully automated three-dimensional detection of polyps in fecal-tagging CT colonography. *Academic Radiology*, **14**, 287-300. http://dx.doi.org/10.1016/j.acra.2006.11.007

[3] Balgetir, H., Bektas, M. and Inoguchi, J.I. (2004) Null Bertrand curves in minkowski 3-space and their charaterization. *Note di Mathematica*, **23**, 7-13.

[4] Young, H.K. and Dae, W.Y. (2003) Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces. *Journal of Geometry and physics*, **49**, 89-100.

[5] Choi, M., Kim, Y.H. and Yoon, D.W. (2013) Some classification of surfaces of revolution in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry*, **104**, 85-106. http://dx.doi.org/10.1007/s00022-013-0149-3

[6] Dillen, F. and Kuhnel, W. (1999) Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space. *Manuscripta Mathematica*, **98**, 307-320. http://dx.doi.org/10.1007/s002290050142

[7] Rafael, L. and Esma, D. (2014) Helicoidal surfaces in Minkowski space with constant mean curvature and constant Gauss curvature. *Central European Journal of Mathematics*, **12**, 1349-1361.

[8] Beneki, C.C., Kaimakamis, G. and Papantoniou, B.J. (2002) Helicoidal surface in three dimensional Minkowski space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **275**, 586-614. http://dx.doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00269-X

[9] Beneki, C.C., Kaimakamis, G. and Papantoniou, B.J. (1998) A classification of surfaces of revolution with constant Guass curvature in 3-dimensiona Minkowski space. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **90**, 441-458.

[10] Hou, Z.H. and Ji, F.H. (2007) Helicoidal surfaces with $H^2 = K$ in Minkowski 3-space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **325**, 101-113. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.01.017

[11] Ji, F.H. and Hou, Z.H. (2005) A kind of helicoidal surfaces in 3-dimensional Minkowski space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **304**, 632-643. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.09.065