Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(5), 238-246
Published Online September 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55034

New Sets to Localize All Eigenvalues Different from 1 for a Stochastic Matrix

Suhua Li, Yaotang Li

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: suhuali66@126.com, liyaotang@ynu.edu.cn

Received: Sep. 6th, 2015; accepted: Sep. 25th, 2015; published: Sep. 28th, 2015

Abstract

By using the nonsingularity of S-SDD matrices and the theory of modified matrices, three new sufficient conditions of the nonsingular real matrices with nonzero same row sums are given, and then three new sets to localize all eigenvalues different from 1 for a stochastic matrix are obtained. Numerical examples are given to illustrate that the proposed results are better than the results of Shen *et al.* [Linear Algebra Appl., 447(2014)74-87], Cvetkovic *et al.* [ETNA., 18(2004)73-80] and Li *et al.* [Linear and Multilinear Algebra, http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2014.986044].

Keywords

Stochastic Matrices, S-SDD Matrices, Real Matrices with Same Row Sums, Nonsingular, Eigenvalue Inclusion Set

随机矩阵新的非1特征值包含集

李素华，李耀堂

云南大学，数学与统计学院，云南 昆明
Email: suhuali66@126.com, liyaotang@ynu.edu.cn

收稿日期：2015年9月6日；录用日期：2015年9月25日；发布日期：2015年9月28日

摘 要

本文利用 $S-SDD$ 矩阵的非奇异性及修正矩阵理论，给出具有非零相同行和实矩阵非奇异的三个新的充

文章引用：李素华，李耀堂．随机矩阵新的非 1 特征值包含集[J]．理论数学, 2015, 5(5): 238-246.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55034

分条件，进而得到了随机矩阵的三个新的非1特征值包含集。数值例子表明，所得结果改进了Shen *et al.* [Linear Algebra Appl., 447 (2014) 74-87]，Cvetkovic *et al.* [ETNA., 18 (2004) 73-80]和Li *et al.* [Linear and Multilinear Algebra, http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2014.986044]的结果。

关键词

随机矩阵，S-SDD矩阵，具有相同行和实矩阵，非奇异，特征值包含集

1. 引言

随机矩阵及其特征值的定位在诸如 Markov 链，人口流动模型，经济学和运筹学等众多领域都起着重要的作用[1]-[4]，其定义如下：

定义 1.1 [5]-[8]：若非负矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 的所有行和都是 1，即

$$r_i\left(A\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1,\quad \forall i\in N=\left\{1,2,\cdots,n\right\},$$

则称 A 为(行)随机矩阵。

由非负矩阵的 Perron-Frobenius 定理[1]-[4]知，1 是任一随机矩阵的一个主特征值，且 $e=\left(1,1,\cdots,1\right)^{\mathrm{T}}\in R^n$ 是其对应的一个特征向量，因此对于随机矩阵特征值的定位问题，只需对其所有非 1 特征值进行定位即可。为了研究这个问题，Cvetkovic 等在文[9]中引入了修正矩阵([9], Proposition 2.1)的概念，并将著名的 Gersgorin 圆盘定理[10]应用于修正矩阵，得到了如下结果。

定理 1.2 [9]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，$\sigma\left(A\right)$ 表示 A 的谱，$\mathrm{trace}\left(A\right)$ 为 A 的迹，$l_i\left(A\right)=\min\limits_{k\in N\setminus\{i\}}a_{ki}$，$\gamma=\max\limits_{1\le i\le n}\left(a_{ii}-l_i\left(A\right)\right)$。若 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\setminus\left\{1\right\}$，则

$$\lambda\in\Theta^{sto}\left(A\right)=\left\{z\in C:\left|z-\gamma\right|\le 1-\mathrm{trace}\left(A\right)+\left(n-1\right)\gamma\right\}。$$

Shen 等在文[11]中通过给出非奇异随机矩阵的三个充分条件，得到了随机矩阵非 1 实特征值的三个包含集。随后，Li 等在文[12]中推广了 Shen 的结果，得到了三个比定理 1.2 更精确的随机矩阵非 1 特征值的包含集。

定理 1.3 [12]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵。若 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\setminus\left\{1\right\}$，则

$$\lambda\in\Gamma^{stol}\left(A\right)=\bigcup_{i\in N}\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-l_i\left(A\right)\right|\le cl_i\left(A\right)\right\},$$

$$\lambda\in\bar{\Gamma}^{stov}\left(A\right)=\bigcup_{i\in N}\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-v_i\left(A\right)\right|\le cv_i\left(A\right)\right\},$$

和

$$\lambda\in\tilde{\Gamma}^{stoq}\left(A\right)=\bigcup_{i\in N}\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-q_i\left(A\right)\right|\le cq_i\left(A\right)\right\},$$

其中

$$v_i\left(A\right)=\max\left\{0,\frac{1}{2}\min_{k\ne m\in N\setminus\{i\}}\left\{a_{ki}+a_{mi}\right\}\right\},\quad q_i\left(A\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{k\in N\setminus\{i\}}a_{ki},\quad cl_i\left(A\right)=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}\left|a_{ki}-l_i\left(A\right)\right|,$$

$$cv_i\left(A\right)=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}\left|a_{ki}-v_i\left(A\right)\right|,\quad cq_i\left(A\right)=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}\left|a_{ki}-q_i\left(A\right)\right|。$$

对于矩阵特征值的定位问题，人们总是力求用尽可能少的计算量得到尽可能精确的特征值包含区域，但现有的结果还远远没有达到人们的期望，因此有必要继续对其进行研究。本文将利用修正矩阵理论及 $S-SDD$ 矩阵[13]的非奇异性，研究具有非零相同行和实矩阵[1]非奇异的条件，然后利用其讨论随机矩阵非 1 特征值的定位问题。

2. 具有非零相同行和实矩阵非奇异的充分条件

为下文叙述和证明方便，首先给出一些定义、引理和定理。

定义 2.1 [13]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}\ (n\geq 2)$， S 是 N 的非空真子集， $\bar{S}=N\setminus S$ 为 S 的补集。若

i) $\left|a_{ii}\right|>c_i^S(A),\ \forall i\in S$，

ii) $\left(\left|a_{ii}\right|-c_i^S(A)\right)\cdot\left(\left|a_{jj}\right|-c_j^{\bar{S}}(A)\right)>c_i^{\bar{S}}(A)\cdot c_j^S(A),\ \forall i\in S,\ \forall j\in\bar{S}$，

其中

$$c_t^S(A)=\sum_{k\in S\setminus\{t\}}\left|a_{kt}\right|,\quad c_t^{\bar{S}}(A)=\sum_{k\in\bar{S}\setminus\{t\}}\left|a_{kt}\right|,\quad \forall t\in N,$$

则称 A 为 $S-$严格对角占优矩阵(简记为 $S-SDD$ 矩阵)。

定理 2.2 [13]：若 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}\ (n\geq 2)$ 为 $S-SDD$ 矩阵，则 A 是非奇异的。

定理 2.3 [13]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}\ (n\geq 2)$， S 是 N 的非空真子集， $\bar{S}=N\setminus S$，则

$$\sigma(A)\subseteq C^S(A)=\left(\bigcup_{i\in S}\Gamma_i^S(A)\right)\cup\left(\bigcup_{i\in S,\,j\in\bar{S}}V_{ij}^S(A)\right),$$

其中

$$\Gamma_i^S(A)=\left\{z\in C:\left|z-a_{ii}\right|\leq c_i^S(A)\right\},$$

$$V_{ij}^S(A)=\left\{z\in C:\left(\left|z-a_{ii}\right|-c_i^S(A)\right)\cdot\left(\left|z-a_{jj}\right|-c_j^{\bar{S}}(A)\right)\leq c_i^{\bar{S}}(A)\cdot c_j^S(A)\right\}。$$

引理 2.4 [9]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为所有行和都是常数 η 的实矩阵(称这样的矩阵为具有相同行和实矩阵)， $d=\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right)^{\mathrm{T}}$ 为任一 n 维实向量。若 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{\eta\}$，则 λ 为修正矩阵 $B=A-ed^{\mathrm{T}}$ 的特征值。

下面给出具有非零相同行和实矩阵非奇异的三个新的充分条件。

定理 2.5：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}\ (n\geq 2)$ 为具有非零相同行和实矩阵，S 是 N 的非空真子集，$\bar{S}=N\setminus S$。若

$$\left|a_{ii}-l_i(A)\right|>cl_i^S(A),\quad \forall i\in S, \tag{2.1}$$

$$\left(\left|a_{ii}-l_i(A)\right|-cl_i^S(A)\right)\cdot\left(\left|a_{jj}-l_j(A)\right|-cl_j^{\bar{S}}(A)\right)>cl_i^{\bar{S}}(A)\cdot cl_j^S(A),\ \forall i\in S,\forall j\in\bar{S}, \tag{2.2}$$

其中

$$cl_t^S(A)=\sum_{k\in S\setminus\{t\}}\left|a_{kt}-l_t(A)\right|,\quad cl_t^{\bar{S}}(A)=\sum_{k\in\bar{S}\setminus\{t\}}\left|a_{kt}-l_t(A)\right|,\quad \forall t\in N,$$

则 A 是非奇异的。

证令 $B=A-ed^{\mathrm{T}}$ 其中 $d=l(A)=\left(l_1(A),l_2(A),\cdots,l_n(A)\right)^{\mathrm{T}}$。则

$$b_{ii}=a_{ii}-l_i(A),\quad c_i^S(B)=\sum_{k\in S\setminus\{i\}}\left|a_{ki}-l_i(A)\right|,\quad c_i^{\bar{S}}(B)=\sum_{k\in\bar{S}\setminus\{i\}}\left|a_{ki}-l_i(A)\right|,$$

$$c_j^S(B)=\sum_{k\in S\setminus\{j\}}\left|a_{kj}-l_j(A)\right|,\quad c_j^{\bar{S}}(B)=\sum_{k\in\bar{S}\setminus\{j\}}\left|a_{kj}-l_j(A)\right|。$$

由(2.1)式得

$$\left|b_{ii}\right| > c_i^S\left(B\right), \quad \forall i \in S,$$

由(2.2)式得

$$\left(\left|b_{ii}\right| - c_i^S\left(B\right)\right)\cdot\left(\left|b_{jj}\right| - c_j^{\bar{S}}\left(B\right)\right) > c_i^{\bar{S}}\left(B\right)\cdot c_j^S\left(B\right), \quad \forall i \in S, \quad \forall j \in \bar{S},$$

故 B 是 $S-SDD$ 矩阵。由定理 2.2 知，B 是非奇异的，再由引理 2.4 知，A 是非奇异的。□

定理 2.6：设 $A = \left[a_{ij}\right] \in R^{n\times n}\left(n \geq 2\right)$ 为具有非零相同行和实矩阵，S 是 N 的非空真子集，$\bar{S} = N \setminus S$。若

$$\left|a_{ii} - v_i\left(A\right)\right| > cv_i^S\left(A\right), \quad \forall i \in S, \tag{2.3}$$

$$\left(\left|a_{ii} - v_i\left(A\right)\right| - cv_i^S\left(A\right)\right)\cdot\left(\left|a_{jj} - v_j\left(A\right)\right| - cv_j^{\bar{S}}\left(A\right)\right) > cv_i^{\bar{S}}\left(A\right)\cdot cv_j^S\left(A\right), \forall i \in S, \forall j \in \bar{S}, \tag{2.4}$$

其中

$$cv_t^S\left(A\right) = \sum_{k\in S\setminus\{t\}}\left|a_{kt} - v_t\left(A\right)\right|, \quad cv_t^{\bar{S}}\left(A\right) = \sum_{k\in \bar{S}\setminus\{t\}}\left|a_{kt} - v_t\left(A\right)\right|, \quad \forall t \in N,$$

则 A 是非奇异的。

证：令 $B = A - ed^{\mathrm{T}}$，其中 $d = v\left(A\right) = \left(v_1\left(A\right), v_2\left(A\right), \cdots, v_n\left(A\right)\right)^{\mathrm{T}}$。则

$$b_{ii} = a_{ii} - v_i\left(A\right), \qquad c_i^S\left(B\right) = \sum_{k\in S\setminus\{i\}}\left|a_{ki} - v_i\left(A\right)\right|, \qquad c_i^{\bar{S}}\left(B\right) = \sum_{k\in \bar{S}\setminus\{i\}}\left|a_{ki} - v_i\left(A\right)\right|,$$

$$c_j^S\left(B\right) = \sum_{k\in S\setminus\{j\}}\left|a_{kj} - v_j\left(A\right)\right|, \quad c_j^{\bar{S}}\left(B\right) = \sum_{k\in \bar{S}\setminus\{j\}}\left|a_{kj} - v_j\left(A\right)\right|。$$

由(2.3)式得

$$\left|b_{ii}\right| > c_i^S\left(B\right), \quad \forall i \in S,$$

由(2.4)式得

$$\left(\left|b_{ii}\right| - c_i^S\left(B\right)\right)\cdot\left(\left|b_{jj}\right| - c_j^{\bar{S}}\left(B\right)\right) > c_i^{\bar{S}}\left(B\right)\cdot c_j^S\left(B\right), \quad \forall i \in S, \quad \forall j \in \bar{S},$$

故 B 是 $S-SDD$ 矩阵。由定理 2.2 知，B 是非奇异的，再由引理 2.4 知，A 是非奇异的。□

定理 2.7：设 $A = \left[a_{ij}\right] \in R^{n\times n}\left(n \geq 2\right)$ 为具有非零相同行和实矩阵，S 是 N 的非空真子集，$\bar{S} = N \setminus S$。若

$$\left|a_{ii} - q_i\left(A\right)\right| > cq_i^S\left(A\right), \quad \forall i \in S, \tag{2.5}$$

$$\left(\left|a_{ii} - q_i\left(A\right)\right| - cq_i^S\left(A\right)\right)\cdot\left(\left|a_{jj} - q_j\left(A\right)\right| - cq_j^{\bar{S}}\left(A\right)\right) > cq_i^{\bar{S}}\left(A\right)\cdot cq_j^S\left(A\right), \forall i \in S, \forall j \in \bar{S}, \tag{2.6}$$

其中

$$cq_t^S\left(A\right) = \sum_{k\in S\setminus\{t\}}\left|a_{kt} - q_t\left(A\right)\right|, \quad cq_t^{\bar{S}}\left(A\right) = \sum_{k\in \bar{S}\setminus\{t\}}\left|a_{kt} - q_t\left(A\right)\right|, \quad \forall t \in N,$$

则 A 是非奇异的。

证 令 $B = A - ed^{\mathrm{T}}$，其中 $d = q\left(A\right) = \left(q_1\left(A\right), q_2\left(A\right), \cdots, q_n\left(A\right)\right)^{\mathrm{T}}$。则

$$b_{ii} = a_{ii} - q_i\left(A\right), \qquad c_i^S\left(B\right) = \sum_{k\in S\setminus\{i\}}\left|a_{ki} - q_i\left(A\right)\right|, \qquad c_i^{\bar{S}}\left(B\right) = \sum_{k\in \bar{S}\setminus\{i\}}\left|a_{ki} - q_i\left(A\right)\right|,$$

$$c_j^S(B)=\sum_{k\in S\setminus\{j\}}\left|a_{kj}-q_j(A)\right|,\quad c_j^{\bar{S}}(B)=\sum_{k\in \bar{S}\setminus\{j\}}\left|a_{kj}-q_j(A)\right|。$$

由(2.5)式得

$$\left|b_{ii}\right|>c_i^S(B),\quad \forall i\in S，$$

由(2.6)式得

$$\left(\left|b_{ii}\right|-c_i^S(B)\right)\cdot\left(\left|b_{jj}\right|-c_j^{\bar{S}}(B)\right)>c_i^{\bar{S}}(B)\cdot c_j^S(B),\quad \forall i\in S,\quad \forall j\in\bar{S}，$$

故 B 是 $S-SDD$ 矩阵。由定理 2.2 知，B 是非奇异的，再由引理 2.4 知，A 是非奇异的。□

3. 随机矩阵非 1 特征值包含集

本节我们利用定理 2.5、定理 2.6 和定理 2.7 给出随机矩阵非 1 特征值的三个新的包含集。

定理 3.1：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}\ (n\geq 2)$ 为随机矩阵，S 是 N 的非空真子集，$\bar{S}=N\setminus S$。若 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，则

$$\lambda\in E^{Sl}(A)=\left(\bigcup_{i\in S}B_i^S(A)\right)\cup\left(\bigcup_{i\in S,\,j\in\bar{S}}C_{ij}^S(A)\right),$$

其中

$$B_i^S(A)=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-l_i(A)\right|\leq cl_i^S(A)\right\},$$

$$C_{ij}^S(A)=\left\{z\in C:\left(\left|a_{ii}-z-l_i(A)\right|-cl_i^S(A)\right)\cdot\left(\left|a_{jj}-z-l_j(A)\right|-cl_j^{\bar{S}}(A)\right)\leq cl_i^{\bar{S}}(A)\cdot cl_j^S(A)\right\}。$$

证(反证法) 假设存在某个 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，使得 $\lambda\notin E^{Sl}(A)$，则由集合 $E^{Sl}(A)$ 的定义知，对任意的 $i\in S,\ j\in\bar{S}$，

$$\left|a_{ii}-\lambda-l_i(A)\right|>cl_i^S(A),\tag{3.1}$$

且

$$\left(\left|a_{ii}-\lambda-l_i(A)\right|-cl_i^S(A)\right)\cdot\left(\left|a_{jj}-\lambda-l_j(A)\right|-cl_j^{\bar{S}}(A)\right)>cl_i^{\bar{S}}(A)\cdot cl_j^S(A)。\tag{3.2}$$

令 $B=A-\lambda I$，则 B 是行和均为 $1-\lambda$ 的实矩阵。由(3.1)式和(3.2)式知，B 满足定理 2.5 的条件，故 B 是非奇异的，即

$$\det(B)=\det(A-\lambda I)\neq 0，$$

这与 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$ 矛盾，故定理成立。□

类似于定理 3.1 的证明，由定理 2.6 和定理 2.7 易得如下两个定理。

定理 3.2：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}\ (n\geq 2)$ 为随机矩阵，S 是 N 的非空真子集，$\bar{S}=N\setminus S$。若 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，则

$$\lambda\in \bar{E}^{Sv}(A)=\left(\bigcup_{i\in S}\bar{B}_i^S(A)\right)\cup\left(\bigcup_{i\in S,\,j\in\bar{S}}\bar{C}_{ij}^S(A)\right),$$

其中

$$\bar{B}_i^S(A)=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-v_i(A)\right|\leq cv_i^S(A)\right\},$$

$$\bar{C}_{ij}^S(A)=\left\{z\in C:\left(\left|a_{ii}-z-v_i(A)\right|-cv_i^S(A)\right)\cdot\left(\left|a_{jj}-z-v_j(A)\right|-cv_j^{\bar{S}}(A)\right)\leq cv_i^{\bar{S}}(A)\cdot cv_j^S(A)\right\},$$

定理 3.3 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}\left(n\geq 2\right)$ 为随机矩阵，S 是 N 的非空真子集，$\bar{S}=N\setminus S$ 。若 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\setminus\left\{1\right\}$，则

$$\lambda\in\tilde{E}^{Sq}\left(A\right)=\left(\bigcup_{i\in S}\tilde{B}_i^S\left(A\right)\right)\cup\left(\bigcup_{i\in S,j\in\bar{S}}\tilde{C}_{ij}^S\left(A\right)\right),$$

其中

$$\tilde{B}_i^S\left(A\right)=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-q_i\left(A\right)\right|\leq cq_i^S\left(A\right)\right\},$$

$$\tilde{C}_{ij}^S\left(A\right)=\left\{z\in C:\left(\left|a_{ii}-z-q_i\left(A\right)\right|-cq_i^S\left(A\right)\right)\cdot\left(\left|a_{jj}-z-q_j\left(A\right)\right|-cq_j^{\bar{S}}\left(A\right)\right)\leq cq_i^{\bar{S}}\left(A\right)\cdot cq_j^S\left(A\right)\right\}。$$

4. 特征值包含定理之比较

本节将第三部分所获结果与定理 1.3(即文[12])的结果进行比较，得如下结论。

定理 4.1：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}\left(n\geq 2\right)$ 为随机矩阵，S 是 N 的非空真子集，$\bar{S}=N\setminus S$，则

$$E^{Sl}\left(A\right)\subseteq\Gamma^{stol}\left(A\right),\quad \bar{E}^{Sv}\left(A\right)\subseteq\bar{\Gamma}^{stov}\left(A\right),\quad \tilde{E}^{Sq}\left(A\right)\subseteq\tilde{\Gamma}^{stoq}\left(A\right)。$$

证这里只证 $E^{Sl}\left(A\right)\subseteq\Gamma^{stol}\left(A\right)$，其它两式可类似地证明。首先考虑 S 为单点集的情况，不妨设 $S=\left\{i_0\right\},i_0\in N$，则

$$cl_{i_0}^S\left(A\right)=\sum_{k\in S\setminus\{i_0\}}\left|a_{ki_0}-l_{i_0}\left(A\right)\right|=0,\quad cl_{i_0}^{\bar{S}}\left(A\right)=\sum_{k\in\bar{S}\setminus\{i_0\}}\left|a_{ki_0}-l_{i_0}\left(A\right)\right|=cl_{i_0}\left(A\right)。$$

由定理 3.1 知，对任意的 $j\in N,\ j\neq i_0$，

$$B_{i_0}^S\left(A\right)=\left\{a_{i_0i_0}-l_{i_0}\left(A\right)\right\},\ C_{i_0j}^S\left(A\right)=\left\{z\in C:\left|a_{i_0i_0}-z-l_{i_0}\left(A\right)\right|\cdot\left(\left|a_{jj}-z-l_j\left(A\right)\right|-cl_j^{\bar{S}}\left(A\right)\right)\leq cl_{i_0}\left(A\right)\cdot cl_j^S\left(A\right)\right\}$$

故 $B_{i_0}^S\left(A\right)\subseteq C_{i_0j}^S\left(A\right)$，于是

$$E^{Sl}\left(A\right)=\bigcup_{j\in N\setminus\{i_0\}}C_{i_0j}^S\left(A\right),$$

对任意的 $z\in E^{Sl}\left(A\right)$ 则存在 $j\neq i_0$，使得 $z\in C_{i_0j}^S\left(A\right)$，即

$$\left|a_{i_0i_0}-z-l_{i_0}\left(A\right)\right|\cdot\left(\left|a_{jj}-z-l_j\left(A\right)\right|-cl_j^{\bar{S}}\left(A\right)\right)\leq cl_{i_0}\left(A\right)\cdot cl_j^S\left(A\right)。\tag{4.1}$$

假若 $z\notin\Gamma^{stol}\left(A\right)$，则对任意的 $k\in N$

$$\left|a_{kk}-z-l_k\left(A\right)\right|>cl_k\left(A\right)\geq 0。\tag{4.2}$$

又

$$cl_k\left(A\right)=cl_k^S\left(A\right)+cl_k^{\bar{S}}\left(A\right),\tag{4.3}$$

故

$$\begin{aligned}&\left|a_{i_0i_0}-z-l_{i_0}\left(A\right)\right|\cdot\left(\left|a_{jj}-z-l_j\left(A\right)\right|-cl_j^{\bar{S}}\left(A\right)\right)\\&>cl_{i_0}\left(A\right)\cdot\left(cl_j\left(A\right)-cl_j^{\bar{S}}\left(A\right)\right)=cl_{i_0}\left(A\right)\cdot cl_j^S\left(A\right)。\end{aligned}$$

这与(4.1)式矛盾，故 $z\in\Gamma^{stol}\left(A\right)$。

现在考虑 S 不是单点集的情况。对任意的 $z\in E^{Sl}\left(A\right)$，则 $z\in\bigcup_{i\in S}B_i^S\left(A\right)$ 或 $z\in\bigcup_{i\in S,j\in\bar{S}}C_{ij}^S\left(A\right)$。若 $z\in\bigcup_{i\in S}B_i^S\left(A\right)$ 则存在 $i\in S$ 使得 $z\in B_i^S\left(A\right)$，即

$$\left|a_{ii}-z-l_i(A)\right|\le cl_i^S(A)\le cl_i(A)。$$

故 $z\in\Gamma^{stol}(A)$；若 $z\in\bigcup\limits_{i\in S,j\in\bar{S}}C_{ij}^S(A)$。则存在 $i\in S,\ j\in\bar{S}$，使得 $z\in C_{ij}^S(A)$，即

$$\left(\left|a_{ii}-z-l_i(A)\right|-cl_i^S(A)\right)\cdot\left(\left|a_{jj}-z-l_j(A)\right|-cl_j^{\bar{S}}(A)\right)\le cl_i^{\bar{S}}(A)\cdot cl_j^S(A)。\tag{4.4}$$

假若 $z\notin\Gamma^{stol}(A)$，则由(4.2)式和(4.3)式知

$$\begin{aligned}&\left(\left|a_{ii}-z-l_i(A)\right|-cl_i^S(A)\right)\cdot\left(\left|a_{jj}-z-l_j(A)\right|-cl_j^{\bar{S}}(A)\right)\\&>\left(cl_i(A)-cl_i^S(A)\right)\cdot\left(cl_j(A)-cl_j^{\bar{S}}(A)\right)=cl_i^{\bar{S}}(A)\cdot cl_j^S(A)。\end{aligned}$$

这与(4.4)相矛盾，故 $z\in\Gamma^{stol}(A)$。

综上可知，$E^{Sl}(A)\subseteq\Gamma^{stol}(A)$。□

5. 数值例子

本节，我们用几个数值例子说明本文所得结果(以定理 3.1 为例)的有效性。

例 1：考虑随机矩阵

$$A_1=\begin{bmatrix}0.2594&0.1524&0.0044&0.0931&0.2256&0.2651\\0.1752&0.0021&0.2780&0.1573&0.1470&0.2404\\0.1936&0.1339&0.2260&0.1675&0.0602&0.2188\\0.1888&0.0479&0.2219&0.1877&0.1418&0.2119\\0.0259&0.1925&0.1855&0.1907&0.1631&0.2423\\0.0004&0.2321&0.1429&0.1816&0.2539&0.1891\end{bmatrix},$$

取 $S=\{2,6\}$。分别将定理 1.2、定理 1.3 和定理 3.1 应用于随机矩阵 A_1，得到 A_1 的非 1 特征值包含集 $\Theta^{sto}(A_1)$、$\Gamma^{stol}(A_1)$ 和 $E^{Sl}(A_1)$，其包含关系如图 1 所示，图中∗表示 A_1 的特征值。由图 1 可知，$E^{Sl}(A_1)\subset\Gamma^{stol}(A_1)\subset\Theta^{sto}(A_1)$，因此定理 3.1 比定理 1.2 和定理 1.3 更精确地定位了 A_1 的非 1 特征值。

例 2：考虑随机矩阵

$$A_2=\begin{bmatrix}0.1034&0.4127&0.0150&0.1831&0.0699&0.0856&0.1303\\0.0970&0.2380&0.1394&0.1436&0.2504&0.0003&0.1313\\0.2091&0.1388&0.1681&0.0114&0.2196&0.0743&0.1787\\0.2038&0.0791&0.0427&0.1315&0.1949&0.1665&0.1815\\0.1061&0.2247&0.0886&0.0724&0.1918&0.1647&0.1517\\0.1197&0.1666&0.0707&0.0908&0.0662&0.2045&0.2815\\0.1728&0.2567&0.0914&0.0690&0.1023&0.1246&0.1832\end{bmatrix},$$

取 $S=\{2,6\}$。分别将定理 2.3 和定理 3.1 应用于随机矩阵 A_2，得到 A_2 的非 1 特征值包含集 $C^S(A_2)$ 和 $E^{Sl}(A_2)$，其包含关系如图 2 所示，图中∗表示 A_2 的特征值。由图 2 可知，$E^{Sl}(A_2)\subset C^S(A_2)$，因此定理 3.1 比定理 2.3 更精确地定位了 A_2 的非 1 特征值。

例 3：为了进一步的探讨 $E^{Sl}(A)$ 与 $C^S(A)$ 的关系，我们考虑由 MATLAB 代码

$$k=20;\quad A=\mathrm{rand}(k,k);\quad A=\mathrm{inv}\left(\mathrm{diag}\left(\mathrm{sum}(A')\right)\right)\times A,$$

生成的 100 个随机矩阵，并将定理 2.3 和定理 3.1 应用于它们。当取 $S=\{2,6,8,11,17\}$ 时，对于复平

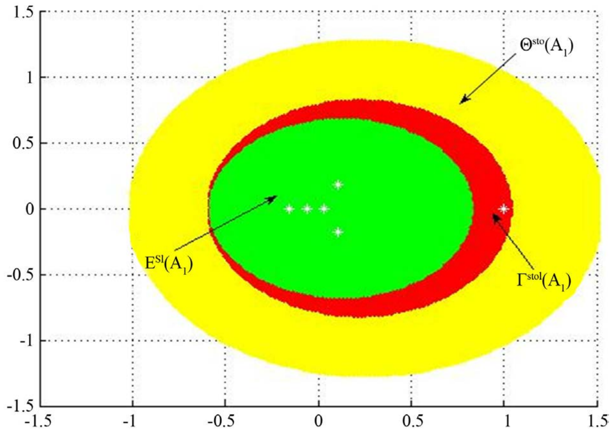

Figure 1. $E^{Sl}(A_1) \subset \Gamma^{stol}(A_1) \subset \Theta^{sto}(A_1)$

图 1. $E^{Sl}(A_1) \subset \Gamma^{stol}(A_1) \subset \Theta^{sto}(A_1)$

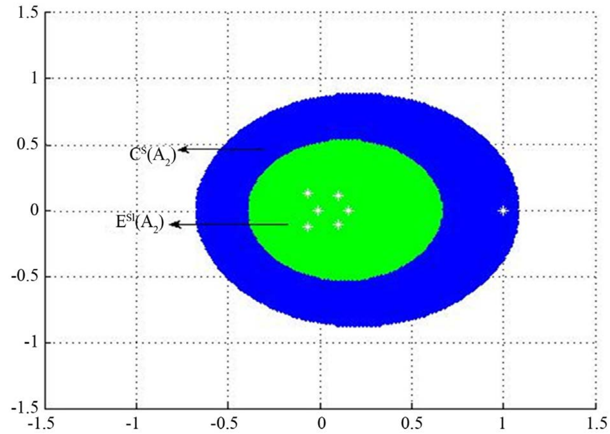

Figure 2. $E^{Sl}(A_2) \subset C^S(A_2)$

图 2. $E^{Sl}(A_2) \subset C^S(A_2)$

Table 1. To compare the relation between $E^{Sl}(A)$ and $C^S(A)$ when taking $S=\{2,6,8,11,17\}$

表 1. 当取 $S=\{2,6,8,11,17\}$ 时，$E^{Sl}(A)$ 与 $C^S(A)$ 的关系

	$E^{Sl}(A) \subset C^S(A)$	$E^{Sl}(A) = C^S(A)$	$E^{Sl}(A) \supset C^S(A)$
个数	98	2	0
第 i 个发生	其 它	32, 94	无

面中的集合 $E^{Sl}(A)$ 和 $C^S(A)$，我们发现满足 $E^{Sl}(A) \subset C^S(A)$ 的随机矩阵的个数是98个，$E^{Sl}(A) = C^S(A)$ 的随机矩阵的个数是 2 个，$E^{Sl}(A) \supset C^S(A)$ 的随机矩阵的个数是 0 个，见表 1。

基金项目

本文受国家自然科学基金资助项目(11361074)资助。

参考文献 (References)

[1] Seneta, E. (2004) Nonnegative matrices and Markov chains. Springer-Verlag, Berlin.

[2] Karlin, S. and Mcgregor, J. (1959) A characterization of birth and death processes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **45**, 247-266. http://dx.doi.org/10.1073/pnas.45.3.375

[3] Yu, A. (2005) Mitrofanov Sensitivity and convergence of uniformly ergodic Markov Chains. *Journal of Applied Probability*, **42**, 1003-1014. http://dx.doi.org/10.1239/jap/1134587812

[4] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1986) Matrix analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Kirkland, S. (2009) A cycle-based bound for subdominant eigenvalues of stochastic matrices. *Linear Multilinear Algebra*, **57**, 247-266. http://dx.doi.org/10.1080/03081080701669309

[6] Kirkland, S. (2009) Subdominant eigenvalues for stochastic matrices with given column sums. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **18**, 784-800. http://dx.doi.org/10.13001/1081-3810.1345

[7] Minc, H. (1988) Nonnegative matrices. Wiley Interscience, New York.

[8] Berman, A. and Plemmons, R.J. (1994) Nonnegative matrices in the mathematical sciences. SIAM, Philadelphia. http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611971262

[9] Cvetkovic, L., Kostic, V. and Pena, J.M. (2011) Eigenvalue localization refinements for matrices related to positivity. *The SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **32**, 771-784. http://dx.doi.org/10.1137/100807077

[10] Varga, R.S. (2004) Gersgorin and his circles. Springer-Verlag, Berlin. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17798-9

[11] Shen, S.-Q., Yu, J., Huang and T.-Z. (2014) Some classes of nonsingular matrices with applications to localize the real eigenvalues of real matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **447**, 74-87. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2013.02.005

[12] Li, C.-Q., Liu, Q.-B. and Li, Y.-T. (2014) Geršgorin-type and Brauer-type eigenvalue localization sets of stochastic matrices. Linear and Multilinear Algebra.

[13] Cvetkovic, L., Kostic, V. and Varga, R.S. (2004) A new Gersgorin-type eigenvalue inclusion set. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **18**, 73-80.