Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(2), 103-110
Published Online March 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62015

Hans汉斯

The Lelong Number of a ϕ-Positive Closed Current on $\mathbb{C}^n$

Fang Wang, Qianqian Kang

College of Science and Technology, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang
Email: 15257160617@163.com, qqkang@zisu.edu.cn

Received: Feb. 28th, 2016; accepted: Mar. 11th, 2016; published: Mar. 17th, 2016

Abstract

In this paper, we give the Lelong number of a ϕ-positive closed current $dd^{\phi}f$, where ϕ is the special Lagrangian calibration and f is a ϕ-plurisubharmonic function in $L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$. Using that Lelong number, we generalize the minimum modulus principle for the holomorphic function of one complex variable, and we get an estimate of the low bound for ϕ-plurisubharmonic functions.

Keywords

Lelong Number, Special Lagrangian Calibration, ϕ-Plurisubharmonic Function, ϕ-Positive Closed Current

$\mathbb{C}^n$上ϕ-闭正流的Lelong数

王　芳，康倩倩

浙江外国语学院科学技术学院，浙江　杭州
Email: 15257160617@163.com, qqkang@zisu.edu.cn

收稿日期：2016年2月28日；录用日期：2016年3月11日；发布日期：2016年3月17日

摘　要

本文给出了$\mathbb{C}^n$上ϕ-闭正流$dd^{\phi}f$的Lelong数，这里ϕ是特殊Lagrangian calibration，f是$L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$中的ϕ

文章引用：王芳，康倩倩．$\mathbb{C}^n$上ϕ闭正流的 Lelong 数[J]．理论数学, 2016, 6(2): 103-110.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62015

-多次下调和函数。并且我们应用此Lelong数，将单复变中全纯函数的极小模原理进行了推广，给出了此类ϕ-多次下调和函数的一个下界估计。

关键词

Lelong数，特殊Lagrangian calibration，ϕ-多次下调和函数，ϕ-闭正流

1. 引言及主要结果

在[1]-[4]中，Harvey 及 Lawson 介绍了一些具体的 calibrations，以及 calibrated 几何中的多次下调和函数，闭正流等。这些闭正流是经典的复几何中相应概念的推广，并且拥有一些重要性质。本文给出了一个特殊 Lagrangian calibration ϕ 所对应的 ϕ- 闭正流，并给出它的 Lelong 数的具体表达式。应用此 Lelong 数，给出 ϕ-多次下调和函数的一个下界估计。

首先给出[1] [3]中的一些定义。如果黎曼流形 X 上的一个闭的 p- 形式 ϕ，对 X 上的所有的单位简单切 p- 向量 ξ，都有

$$\phi(\xi)\le 1$$

则称 ϕ 为一个 calibration。一个单位简单切 p- 向量 ξ，如果满足

$$\phi(\xi)=1$$

则称此 ξ 为一个 ϕ- 平面。令 $G(\phi)$ 表示 X 上 ϕ- 平面的全体。如果一个 calibration ϕ 的共变导数为 0，则称 ϕ 是平行的。在[2]中，Harvey 及 Lawson 给出了一般的 calibration ϕ 对应的 ϕ- 多次下调和函数及 ϕ- 闭正流。但本文只讨论平行的 calibration。下面给出相应的定义。令 $\varepsilon^p(X)$ 表示 X 上 C^∞ 的 p- 形式。对 X 上任何光滑函数 f，算子 d^ϕ 定义为：

$$d^\phi:\varepsilon^0(X)\mapsto\varepsilon^{p-1}(X)$$

$$d^\phi f:=i_{\nabla f}\phi$$

其中，i 表示对微分形式的内乘，∇f 是 f 在 X 中的梯度。因此，算子

$$dd^\phi:\varepsilon^0(X)\mapsto\varepsilon^p(X)$$

$$dd^\phi f=d\left(i_{\nabla f}\phi\right)$$

这里，对一个平行的 calibration ϕ 及一个光滑函数 f，如果对每个 $\xi\in G(\phi)$，有

$$dd^\phi f(\xi)\ge 0$$

则称 f 是 ϕ- 多次下调和函数。

令 $D'(X)$ 表示 X 上的所有光滑函数构成的空间的对偶。如果一个分布 $f\in D'(X)$ 满足对所有的光滑截面 $\xi\in G(\phi)$ 及光滑的具有紧支柱非负函数 λ，有

$$dd^\phi f(\xi)(\lambda)\ge 0$$

则称此分布 f 是 ϕ- 多次下调和的。容易证明，当 f 是 ϕ- 多次下调和函数时，这两个定义是等价的。用 $PSH(X,\phi)$ 表示 X 上所有的 ϕ- 多次下调和函数及 ϕ- 多次下调和分布。

令 $\wedge(\phi)=spanG(\phi)$。$\wedge_+(\phi)\subseteq\wedge(\phi)$ 表示顶点在原点，集合 $G(\phi)$ 的凸锥。

$\wedge^{+}(\phi)=\left\{\alpha\in\wedge^{p}T^{*}X:\alpha(\xi)\geq 0,\ \forall\xi\in\wedge_{+}(\phi)\right\}$。这里，$T^{*}X$ 表示黎曼流形 X 的余切空间。一个 p 维的流 T，如果对所有具有紧支柱的 p-形式 $\alpha\in\wedge^{+}(\phi)$，有

$$T(\alpha)\geq 0$$

则称 T 是一个 ϕ- 正流。如果还满足 $dT=0$，则称 T 是一个 ϕ- 闭正流。关于流的定义，可以参考[5]的第 104 页。

令 $\phi\in\wedge^{p}\mathbb{R}^{n}$ 是 $\mathbb{R}^{n}$ 上的一个平行的 calibration。T 是一个 p 维的 ϕ- 正流且 $dT=0$。给定一点 a，如果极限

$$\lim_{r\to 0^{+}}\frac{\chi_{B(a,r)}T(\phi)}{\omega_{p}r^{p}}$$

存在，则称此极限为 T 在点 a 处的 Lelong 数，记为 $\theta(T,a)$。这里 $B(a,r)$ 是 $\mathbb{R}^{n}$ 中球心为 a，半径为 r 的闭球，ω_{p} 是 $\mathbb{R}^{p}$ 中单位球的体积，参考 Demailly [6]第 18 页及[7]中关于 Lelong 数的定义。

令 $z_{1},\cdots,z_{n}$ 表示 n 维复欧氏空间 $\mathbb{C}^{n}$ 上点的坐标。闭的 n- 形式

$$\phi=\operatorname{Re}dZ=\operatorname{Re}\left(dz_{1}\wedge dz_{2}\wedge\cdots\wedge dz_{n}\right)$$

是一个平行的 calibration，称为特殊 Lagrangian calibration。在[2]中，附录：The reduced ϕ-Hessian 一节中的定理 5.19，告诉我们，如果 ϕ 为特殊 Lagrangian calibration，则 $f\in PSH\left(\mathbb{C}^{n},\phi\right)$ 等价于 $dd^{\phi}f$ 是一个 ϕ-正流。显然，$dd^{\phi}f$ 是闭的。对此闭正流，我们有下面的结论。

定理 1.1： 令 $\phi=\operatorname{Re}dZ$ 是 $\mathbb{C}^{n}$ 上的特殊 Lagrangian calibration。$f\in PSH\left(\mathbb{C}^{n},\phi\right)$，则 ϕ- 闭正流 $dd^{\phi}f$ 在点 a 处的 Lelong 数 $\theta_{f}(a)$ 存在且

$$\theta_{f}(a)=\lim_{r\to 0^{+}}\frac{\int_{B(a,r)}\Delta f\mathrm{d}V_{n}}{4\omega_{n}r^{n}}$$

其中，Δ 是 $\mathbb{R}^{2n}\cong\mathbb{C}^{n}$ 上的 Laplace 算子，$\mathrm{d}V_{n}$ 是 $\mathbb{C}^{n}$ 上的体积元。$B(a,r)$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中球心为 a，半径为 r 的开球，ω_{n} 是 $\mathbb{R}^{n}$ 中单位球的体积。

令

$$\theta_{f}(z,t):=\frac{\int_{B(z,t)}\Delta f\mathrm{d}V_{n}}{4\omega_{n}t^{n}}\tag{1.1}$$

函数 f 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中一个开球 B 上的 Riesz 质量定义为：

$$\mu_{f}(B):=\frac{1}{2\pi}\int_{B}\Delta f\mathrm{d}V_{n}\tag{1.2}$$

假设 $f\in PSH\left(\mathbb{C}^{n},\phi\right)$ 并且是上半连续的，那么可以证明 f 是下调和的。我们应用 ϕ- 闭正流 $dd^{\phi}f$ 的 Lelong 数及下调和函数的 Poisson-Jensen 公式，得到了关于 f 的一个下界估计式。

定理 1.2： 令 $\phi=RedZ$ 是 $\mathbb{C}^{n}$ 上的特殊 Lagrangian calibration，这里，$n>2$。f 为 $B(0,2)\subseteq\mathbb{R}^{2n}$ 上的 ϕ-多次下调和函数，并且在 $B(0,2)$ 上是上半连续的，且有有界的 Riesz 质量 $\mu_{f}\left(B(0,2)\right)$。那么对任何实数 $0<\eta<1$，及 $\alpha\in(0,2]$，存在可数个小球 $\left\{B\left(z_{j},r_{j}\right)\right\}\subseteq B(0,1)$，对 $z\in B(0,1)\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}B\left(z_{j},r_{j}\right)$，有

$$f(z)>N(z)-\frac{3^{n-2}C(n)\mu_{f}\left(B(0,2)\right)}{\eta^{n-2}}\tag{1.3}$$

其中，$N(z)$ 表示 f 在单位球 $B(0,1)$ 的边界上的最小值，

$$C(n) := \frac{2\pi}{s_{2n}(n-2)}$$

这些小球的半径 $r_j < \eta$， $j = 1,2,\cdots$， 并且，

$$\sum r_j^{2n-2+\alpha} < \frac{9^{n-1}\eta^{\alpha}(n-2)}{\alpha} \tag{1.4}$$

令

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(z_j, r_j) \tag{1.5}$$

则 E 是一个 Borel 集，且满足

$$H_{\eta}^{2n-2+\alpha}(E) < \frac{9^{n-1}\eta^{\alpha}(n-2)}{\alpha}$$

这里，一个集合 E 的 p 维的 $\eta -$ Hausdorff content $H_{\eta}^{p}(E)$ 定义为

$$H_{\eta}^{p}(E) = \inf\left\{\sum_{j\in N} r(B_j)^p ; E \subset \bigcup_{j\in N} B_j, \{B_j\}_{j\in N} \in B_{\eta}\right\} \tag{1.6}$$

其中，B_{η} 是指 E 的覆盖的全体，其中，每个覆盖是由可数个小球并起来，每个小球的半径 $r(B_j) \le \eta$，$j \in N$。

注：在[8]中，作者给出了极小模原理在 $\mathbb{C}^n$ 中的经典的多次下调和函数中的推广。

2. $dd^{\phi} f$ 的 Lelong 数

令 $\phi \in \wedge^p \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上一个平行的 calibration 且 $d\phi = 0$，T 为一个 ϕ- 闭正流。在[1]中的第 2.5 节，Harvey 及 Lawson 已经证明，

$$\frac{\chi_{B(a,r)} T(\phi)}{\omega_p r^p}$$

是关于变量 r 单调递增的函数，这里，$B(a,r)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中球心为 a，半径为 r 的闭球，ω_p 是 $\mathbb{R}^p$ 中单位球的体积。因此，

$$\lim_{r \mapsto 0^+} \frac{\chi_{B(a,r)} T(\phi)}{\omega_p r^p}$$

存在。

令 $\phi = RedZ$ 且 f 为 $\mathbb{C}^n$ 上一个光滑的 ϕ- 多次下调和函数，则我们有下面命题成立。

命题 2.1：(参见[9]，命题 2.1)

$$dd^{\phi} f = 2Re\left\{\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial \bar{z}_j} Z_{kj}\right\} + \frac{1}{2}(\Delta f) Re(dZ)$$

这里，Z_{ij} 表示一个 $(n-1,1)$-形式，它是在 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_n$ 中，用 $\mathrm{d}\bar{z}_j$ 替代 $\mathrm{d}z_i$。

下面给出定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明：令 $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$。$\mathbb{C}^n$ 上的特殊 Lagrangian calibration $\phi = RedZ$，它是一个 n- 形式。令 $f \in PSH(C^n, \phi)$，我们已经知道，$dd^{\phi} f$ 是一个 n 维的 ϕ- 闭正流。令*表示 Hodge 星算子。当 f 为 $\mathbb{C}^n$ 上光滑的 ϕ- 多次下调和函数，由命题 2.1 知，

$$dd^{\phi} f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z_i} \partial \overline{z_j}} Z_{ij} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \overline{Z_{ij}} + \frac{1}{4} \Delta f \left(\mathrm{dz} + \mathrm{d}\overline{\mathrm{z}}\right)$$

那么，

$$\begin{aligned}\chi_{B(a,r)} dd^{\phi} f(\phi) &= \int_{B(a,r)} dd^{\phi} f \wedge *(\phi) = \int_{B(a,r)} dd^{\phi} f \wedge *(Redz) \\ &= \frac{1}{2} \int_{B(a,r)} dd^{\phi} f \wedge (*\mathrm{dz} + *\mathrm{d}\overline{\mathrm{z}}) \\ &= \int_{B(a,r)} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z_i} \partial \overline{z_j}} Z_{ij} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \overline{Z_{ij}} + \frac{1}{4} \Delta f \left(\mathrm{dz} + \mathrm{d}\overline{\mathrm{z}}\right) \right] \wedge \frac{1}{2} \left(C_1 \mathrm{dz} + C_2 \mathrm{d}\overline{\mathrm{z}}\right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{B(a,r)} \Delta f \mathrm{d}V_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

这里，C_1，C_2 都是常数，根据 Hodge 星算子的定义，它们分别满足 $\mathrm{dz} \wedge *(\mathrm{dz}) = \mathrm{dz} \wedge C_1 \mathrm{d}\overline{\mathrm{z}} = \mathrm{d}V_n$，$\mathrm{d}\overline{\mathrm{z}} \wedge *(\mathrm{d}\overline{\mathrm{z}}) = \mathrm{d}\overline{\mathrm{z}} \wedge C_2 \mathrm{dz} = \mathrm{d}V_n$。由于 $Z_{ij} \wedge \mathrm{dz} = 0, \overline{Z_{ij}} \wedge \mathrm{dz} = 0, Z_{ij} \wedge \mathrm{d}\overline{\mathrm{z}} = 0$，$\overline{Z_{ij}} \wedge \mathrm{d}\overline{\mathrm{z}} = 0$。

因此，(2.1)中最后一个等式成立。

如果 f 不是光滑的，我们可以先将 f 光滑化，即将 f 与光滑核 χ_ε 做卷积，记为 f_ε。那么，可以证明随着 $\varepsilon \to 0$，$dd^{\phi} f_\varepsilon$ 收敛到 $dd^{\phi} f$。现选取一个函数 $g \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{C}^n, [0,1]\right)$，则有

$$\begin{aligned}\chi_{B(a,r)} dd^{\phi} f(g\phi) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \chi_{B(a,r)} dd^{\phi} f_\varepsilon (g\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4} \int_{B(a,r)} \Delta f_\varepsilon g \mathrm{d}V_n \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4} \int_{B(a,r)} f_\varepsilon \Delta g \mathrm{d}V_n = \frac{1}{4} \int_{B(a,r)} f \Delta g \mathrm{d}V_n = \frac{1}{4} \int_{B(a,r)} \Delta f g \mathrm{d}V_n \end{aligned}$$

因此，当 f 为 $\phi-$多次下调和分布时，也有

$$\chi_{B(a,r)} dd^{\phi} f(\phi) = \frac{1}{4} \int_{B(a,r)} \Delta f \mathrm{d}V_n$$

则有，

$$\theta_f(a) = \lim_{r \mapsto 0^+} \frac{\chi_{B(a,r)}\left(dd^{\phi} f\right)}{\omega_n r^n} = \lim_{r \mapsto 0^+} \frac{\int_{B(a,r)} \Delta f \mathrm{d}V_n}{4\omega_n r^n}$$

证毕。

3. ϕ-多次下调和函数的下界估计

在[8]中，作者给出了极小模原理在 $\mathbb{C}^n$ 中的经典的多次下调和函数中的推广。本节参考[8]中的一些方法，给出了 ϕ-多次下调和函数的一个下界估计。

定理 1.2 的证明： 因为 f 为定义在 $B(0,2) \subset \mathbb{R}^{2n}$ 上的 ϕ-多次下调和函数，那么，对所有的 $\xi \in G(\phi)$，有 $dd^{\phi} f(\xi) \ge 0$。

令 $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$，$\xi_2 = \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_n}$，这里，$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}_{i=1}^{n}$ 是切空间 $T\mathbb{C}^n$ 的一组基。则显然 $\xi_1, \xi_2 \in G(\phi)$，且

$$\Delta f = dd^{\phi} f(\xi_1) + dd^{\phi} f(\xi_2) \ge 0 \tag{3.1}$$

又因为 f 在 $B(0,2)$ 上是上半连续的，从而 f 在 $B(0,2)$ 上是下调和的。由 Poisson-Jensen 公式(参考[5]，p. 138)，对 $f(z) \ne -\infty$，有

$$f(z)=\int_{|\xi|=1} f(z+R\xi)\mathrm{d}\sigma_{2n-1}-\int_0^R \frac{\int_{B(z,t)}\Delta f\mathrm{d}V_n}{s_{2n}t^{2n-1}}\mathrm{d}t$$

这里，s_{2n} 是 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 中单位球的表面积。再由 Lelong 数的定义(1.1)知，

$$f(z)=\int_{|\xi|=1} f(z+R\xi)\mathrm{d}\sigma_{2n-1}-\frac{4\omega_n}{s_{2n}}\int_0^R \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\mathrm{d}t \tag{3.2}$$

因为 $f(z)>-\infty$，所以，

$$\int_0^R \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\mathrm{d}t<+\infty \tag{3.3}$$

注意到，

$$\int_0^R \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\mathrm{d}t=\frac{\theta_f(z,R)}{(2-n)R^{n-2}}-\lim_{t\to 0}\frac{\theta_f(z,t)}{(2-n)t^{n-2}}-\int_0^R \frac{d\theta_f(z,t)}{(2-n)t^{n-2}}$$

如果上式等号右边的第二项不为零，则由于 $n>2$，只能是

$$\lim_{t\to 0}\frac{\theta_f(z,t)}{(2-n)t^{n-2}}=-\infty$$

从而，$\int_0^R \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\mathrm{d}t=+\infty$，这与(3.3)矛盾，故

$$\lim_{t\to 0}\frac{\theta_f(z,t)}{(2-n)t^{n-2}}=0 \tag{3.4}$$

现在固定实数 $0<\alpha<2$ 及 $0<\varepsilon<1$。任取实数 $A\ge 0$，与 t 无关，但可以与 α,ε 有关。由(3.4)知，$\theta_f(z,t)$ 是 t^{n-2} 当 $t\to 0$ 时的高阶无穷小量，故我们可以定义集合

$$G_{\alpha,\varepsilon}:=\left\{z\in B,\theta_f(z,t)\le At^{n-2+\alpha},\forall 0<t\le\varepsilon\right\} \tag{3.5}$$

那么，对于 $G_{\alpha,\varepsilon}$ 中的每一点，都有 $\lim_{t\to 0}\frac{\theta_f(z,t)}{(2-n)t^{n-2}}=0$，这意味着集合 $G_{\alpha,\varepsilon}$ 与 f 的极集 $\left\{z\in\mathbb{C}^n, f(z)=-\infty\right\}$ 没有交点。

令 $N(z)$ 为 $f(z)$ 在 $\partial B(z,1)$ 上的最小值。固定一点 $z\in G_{\alpha,\varepsilon}$，则 $f(z)>-\infty$，由(3.2)可得

$$f(z)=\int_{|\xi|=1} f(z+\xi)\mathrm{d}\sigma_{2n-1}-\frac{4\omega_n}{s_{2n}}\left(\int_0^\varepsilon \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\mathrm{d}t+\int_\varepsilon^1 \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\right)$$

由于 $z\in G_{\alpha,\varepsilon}$，由(3.5)知，$\theta_f(z,t)\le At^{n-2+\alpha}$，从而

$$\int_0^\varepsilon \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\mathrm{d}t\le A\int_0^\varepsilon t^{\alpha-1}\mathrm{d}t=\frac{A\varepsilon^\alpha}{\alpha} \tag{3.6}$$

并且，由于 $\theta_f(z,t)$ 关于 t 是单调递增的及(1.1)知，对 $0<t<1$，$\theta_f(z,t)\le\theta_f(z,1)$。因此，

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\mathrm{d}t\le\theta_f(z,1)\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^{n-1}}\mathrm{d}t=\frac{\theta_f(z,1)}{2-n}\left(1-\varepsilon^{2-n}\right) \tag{3.7}$$

由(1.1)及(1.2)知，$4\omega_n\theta_f(z,1)=2\pi\mu_f\left(B(z,1)\right)$。由于，$B(z,1)\subseteq B(0,2)$，故由(3.1)知，

$$\mu_f\left(B(z,1)\right) \le \mu_f\left(B(0,2)\right) \tag{3.8}$$

从而，由(3.2)得，

$$\begin{aligned}
f(z) &\ge N(z) - \frac{4\omega_n}{s_{2n}}\left[\int_0^\varepsilon \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\mathrm{d}t + \int_\varepsilon^1 \frac{\theta_f(z,t)}{t^{n-1}}\mathrm{d}t\right] \\
&\ge N(z) - \frac{4\omega_n}{s_{2n}}\left[\frac{A\varepsilon^\alpha}{\alpha} + \frac{\theta_f(z,1)}{2-n}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\right)\right] \\
&\ge N(z) - \frac{4\omega_n}{s_{2n}}\frac{A\varepsilon^\alpha}{\alpha} - \frac{2\pi\mu_f\left(B(z,1)\right)}{(2-n)s_{2n}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\right) \\
&\ge N(z) - \frac{4\omega_n}{s_{2n}}\frac{A\varepsilon^\alpha}{\alpha} - \frac{2\pi\mu_f\left(B(0,2)\right)}{(2-n)s_{2n}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\right)
\end{aligned}$$

这里，第二，三，四个不等式分别由(3.6)，(3.7)，(3.8)所得。

取

$$A = \alpha\varepsilon^{-\alpha}\frac{2\pi\mu_f\left(B(0,2)\right)}{4(n-2)\omega_n} > 0 \tag{3.9}$$

则有， $f(z) \ge N(z) - \dfrac{2\pi\mu_f\left(B(0,2)\right)}{s_{2n}(n-2)\varepsilon^{n-2}}$， $\forall z \in G_{\alpha,\varepsilon}$。

令 $C(n) := \dfrac{2\pi}{s_{2n}(n-2)}$ 及 $\eta := 3\varepsilon$，则公式(1.3)成立。

令 $E_{\alpha,\varepsilon} := B(0,1)\setminus G_{\alpha,\varepsilon}$。由(3.5)知，对任意一点 $z \in E_{\alpha,\varepsilon}$，都会相应的存在一个实数 t_z，满足 $0 < t_z < \varepsilon$，使得

$$\theta_f(z,t_z) > At_z^{n-2+\alpha} \tag{3.10}$$

从而，由(1.1)及(1.2)知，

$$2\pi\mu_f\left(B(z,t_z)\right) = 4\omega_n\theta_f(z,t_z)t_z^n > 4\omega_n At_z^{2n-2+\alpha}$$

这些小球 $\left\{B(z,t_z)\right\}_{z\in E_{\alpha,\varepsilon}}$ 构成集合 $E_{\alpha,\varepsilon}$ 的一个覆盖，由 Vitalli 覆盖引理知，在 $\left\{B(z,t_z)\right\}_{z\in E_{\alpha,\varepsilon}}$ 中，存在可数个互不相交的小球，记作 $\left\{B(z_j,t_j)\right\}_{j=1}^{\infty}$，并且满足 $\left\{B(z_j,3t_j)\right\}_{j=1}^{\infty}$ 也能够覆盖集合 $E_{\alpha,\varepsilon}$。并且，由(3.9)及(3.10)知，

$$\begin{aligned}
4\omega_n A\sum_j (3t_j)^{2n-2+\alpha} &= 4\omega_n\sum_j 3^{2n-2+\alpha}t_j^n At_j^{n-2+\alpha} \\
&< 4\omega_n\sum_j 3^{2n-2+\alpha}t_j^n\theta_f(z_j,t_j) \\
&= \sum_j 3^{2n-2+\alpha}2\pi\mu_f\left(B(z_j,t_j)\right)
\end{aligned}$$

仍然取 A 为(3.9)中所定义的。由于

$$\sum_j \mu_f\left(B(z_j,t_j)\right) = \mu_f\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B(z_j,t_j)\right) \le \mu_f(B) \le \mu_f\left(B(0,2)\right)$$

可得，

$$\sum_j (3t_j)^{2n-2+\alpha} < \frac{3^{2n-2+\alpha} 2\pi\mu_f(B(0,2))}{4\omega_n A} = \frac{3^{2n-2+\alpha}\varepsilon^\alpha(n-2)}{\alpha}$$

令 $r_j = 3t_j$，及 $\eta = 3\varepsilon$，可得，

$$\sum_j r_j^{2n-2+\alpha} < \frac{9^{n-1}\eta^\alpha(n-2)}{\alpha}$$

即(1.4)成立。故我们找到了可数个小球 $\{B(z_j,r_j)\}_{j=1}^{\infty}$，对 $z \in B(0,1)\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}B(z_j,r_j)$，有(1.3)成立，而且这些小球的半径满足(1.4)。由(1.5)知，$E \subseteq E_{\alpha,\varepsilon} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}B(z_j,r_j)$，则(1.6)成立。

证毕。

基金项目

浙江省教育厅基金(No. Y201328697)，浙江省自然科学基金(No. LQ14A010003)。

参考文献 (References)

[1] Harvey, R. and Lawson, H. (1982) Calibrated Geometries. *Acta Mathematica*, **148**, 47-157. http://dx.doi.org/10.1007/BF02392726

[2] Harvey, R. and Lawson, H. (1982) Plurisubharmonic Functions in Calibrated Geometries. http://arxiv.org/abs/math/0601484

[3] Harvey, R. and Lawson, H. (2009) An Introduction to Potential Theory in Calibrated Geometry. *American Journal of Mathematics*, **131**, 893-944. http://arxiv.org/abs/0710.3920

[4] Harvey, R. and Lawson, H. (2009) Duality of Positive Currents and Plurisubharmonic Functions in Calibrated Geometry. *American Journal of Mathematics*, **131**, 1211-1240. http://arxiv.org/abs/0710.3921

[5] Klimek, M. (1991) Pluripotential Theory. Clarendon Press, Oxford and New York.

[6] Demailly, J. (2010) Analytic Methods in Algebraic Geometry. International Press, Somerville.

[7] Demailly, J. (1993) Monge-Ampere Operators, Lelong Numbers and Intersection Theory. Complex Analysis and Geometry. The University Series in Mathematics, Plenum, New York, 115-193.

[8] Zeriahi, A. (2007) A Minimum Principle for Plurisubharmonic Functions. *Indiana University Mathematics Journal*, **56**, 2671-2696. http://dx.doi.org/10.1512/iumj.2007.56.3209

[9] Kang, Q.Q. (2015) A Monge-Ampere Type Operator in 2-Dimensional Special Lagrangian Geometry. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **34**, 449-462.