Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 212-216
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63033

The Analysis of a Mathematical Model for Network Virus Propagation

Xiaodong Yan, Yiting Zhang, Chen Chen

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu
Email: zhling@yzu.edu.cn

Received: May 1st, 2016; accepted: May 20th, 2016; published: May 23rd, 2016

Abstract

This paper studies a network virus propagation SIR model with standard incidence rate. We get the threshold value which shows that when the virus will invade successfully and when it will fail. Further, using the balance theory of ordinary differential equations, we analyze the stability of the equilibrium and give some suggestions to control the spreading of the virus.

Keywords

Network Virus, Stability, Prevention

一类计算机病毒入侵的数学模型分析

闫晓栋，张懿婷，陈 晨

扬州大学数学科学学院，江苏 扬州
Email: zhling@yzu.edu.cn

收稿日期：2016年5月1日；录用日期：2016年5月20日；发布日期：2016年5月23日

摘 要

本文研究一类具有标准发生率的SIR网络病毒传播模型，得到病毒入侵失败和成功的阈值及病毒存在情形下的平衡点的稳定性，在此基础上为控制病毒传播提出了一些策略。

文章引用: 闫晓栋, 张懿婷, 陈晨. 一类计算机病毒入侵的数学模型分析[J]. 理论数学, 2016, 6(3): 212-216.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63033

关键词

计算机病毒，稳定性，控制

1. 引言

随着互联网的飞速发展网络病毒随之兴起，种类也越来越多，破坏性日益剧烈，互联网的安全受到了严重威胁。因此，研究互联网上的计算机病毒传播特性，建立贴近实际的病毒传播模型，并通过对模型的分析掌握病毒传播特点，为防控计算机病毒提供理论支持和帮助，具有重要的意义。而生物学中早就开始了对病毒传播的研究，并且针对不同特性的病毒建立了各种数学模型来研究其传播行为。最早在1991 年 J. O. Kephart 和 S. R. White [1]就注意到生物病毒与计算机病毒有一些共性，第一次用流行病学数学模型对计算机病毒的传播进行了分析。此后，很多学者也陆续把生物学中的一些模型以及分析方法引入到对计算机病毒的研究之中，相关方面的研究工作可见文献[2]-[6]。时至今日，流行病学模型的基本思想仍是建立计算机病毒传播模型的重要基础。本文考虑具有标准发生率且对计算机安装杀毒软件的 SIR 网络病毒传播模型，重点考察病毒入侵失败和扩散的阈值及病毒存在情形下的平衡点的稳定性，从而为控制病毒传播提出一些建议。

2. 具有标准发生率的 SIR 网络病毒传播模型

计算机网络中的主机可分为已感染病毒和未感染病毒两类。在本文中，将已感染病毒的主机记为 I 类。当然，感染了病毒的机器有一部分可能采取杀毒等措施将重新恢复使用而成为未受感染的主机，中毒严重的就有可能报废。我们将未感染病毒的主机分为易感染的(记为 S 类)和已修复的(记为 R 类，并假设其不再感染同一病毒)。以 $N=N(t)$ 表示 t 时刻网络中机器的数量，有 $N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$。研究以下具有标准发生率的计算机病毒传播的 SIR 模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=(1-q)bN-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N}-pS(t)-aS(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N}-(a+\alpha+\gamma)I(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=\gamma I(t)+pS(t)+qbN-aR(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 a、b、β、γ、α、q、p 均为正常数。a 为报废率，b 为网络中机器的增长率，β 为中毒率，γ 为修复率，α 为中毒报废率，$q(0\le q\le 1)$ 为对新机器采取防御措施的比例，$p(0\le p\le 1)$ 为对已有机器安装最新防御系统的比例。

由系统(2.1)可得 $\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=(b-a)N(t)-\alpha I$，令 $x=\dfrac{S(t)}{N(t)}$，$y=\dfrac{I(t)}{N(t)}$，$z=\dfrac{R(t)}{N(t)}$，x，y，z 分别表示易感染类，已感染类和修复类在主机总数中所占比例，显然 $x+y+z=1$。于是将系统(2.1)变形为

$$\begin{cases} x'=(1-q)b-(\beta-\alpha)xy-(p+b)x \\ y'=\beta xy-(b+\alpha+\gamma)y+\alpha y^2 \\ z'=\gamma y+px+qb-bz+\alpha yz \end{cases} \tag{2.2}$$

由于系统(2.2)的前两个方程不含有变量 z，所以只需对系统(2.2)的子系统

$$\begin{cases} x' = (1-q)b - (\beta-\alpha)xy - (p+b)x \\ y' = \beta xy - (b+\alpha+\gamma)y + \alpha y^2 \end{cases} \tag{2.3}$$

进行研究，易知$\Omega = \{(x,y) | x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1\}$是系统(2.3)的正向不变集。

3. 系统平衡点的稳定性分析

本节我们首先讨论系统(2.3)的平衡点的存在性，为了讨论的方便我们引入阈值$R_0 = \dfrac{\beta b(1-q)}{(p+b)(b+\alpha+\gamma)}$，有如下结论成立。

定理 1：当$R_0 \le 1$时，系统(2.3)仅存在网络病毒不存在的唯一平衡点$M_0\left(\dfrac{b(1-q)}{p+b},0\right)$，此时，说明病毒入侵失败；当$R_0 > 1$时，系统(2.3)还会出现一个网络病毒存在平衡点$M^*(x^*,y^*)$，此时，说明病毒入侵成功，其中$x^* = \dfrac{(b+\alpha+\gamma)-\alpha y^*}{\beta}$，$y^*$是方程$\alpha(\beta-\alpha)y^2 + [\alpha(p+b)-(\beta-\alpha)(b+\alpha+\gamma)]y + (1-q)b\beta - (p+b)(b+\alpha+\gamma) = 0$的正根。

证明：显然系统(2.3)总是存在无病毒平衡点$M_0\left(\dfrac{b(1-q)}{p+b},0\right)$，且正平衡点满足方程组

$$\begin{cases} (\beta-\alpha)xy + (p+b)x - (1-q)b = 0, \\ \beta x + \alpha y - (b+\alpha+\gamma) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

由第二个方程解得$x = \dfrac{(b+\alpha+\gamma)-\alpha y}{\beta}$，代入第一个方程中化简得$\varphi(y) = \alpha(\beta-\alpha)y^2 + [\alpha(p+b)-(\beta-\alpha)(b+\alpha+\gamma)]y + (1-q)b\beta - (p+b)(b+\alpha+\gamma) = 0$。

1) 当$\beta \le b+\alpha+\gamma$时，直线$l_1: \beta x + \alpha y - (b+\alpha+\gamma) = 0$位于$\Omega$区域之外，因此，方程组(3.1)在区域$\Omega$内无解，这时$R_0 \le 1$。

2) 当$\beta > b+\alpha+\gamma$时，这时有$\beta > \alpha$，且直线$l_1: \beta x + \alpha y - (b+\alpha+\gamma) = 0$和直线$l_2: x+y=1$在第一象限内相交，交点的纵坐标为$\bar{y} = \dfrac{\beta-(b+\alpha+\gamma)}{\beta-a} > 0$，且$0 < \bar{y} < 1$，因此，系统(2.3)病毒存在时的平衡点$M^*(x^*,y^*)$的存在性等价于方程$\varphi(y) = 0$在区间$(0,\bar{y})$内根的存在性。

因为$(\beta-\alpha)\varphi(\bar{y}) = \beta[-(\beta-\alpha)(\gamma+bq) + (\gamma-p)(b+\gamma)]$，所以当$R_0 \le 1$时，有$\varphi(0) \le 0$，$\varphi(\bar{y}) < 0$，而$\varphi(y)$的图像是一条开口向上的抛物线，因此$\beta > b+\alpha+\gamma$且$R_0 \le 1$时，方程$\varphi(y) = 0$在$(0,\bar{y})$内无解。

综上所述，当$R_0 \le 1$时，病毒不存在时平衡点M_0是系统(2.3)在区域Ω内的唯一平衡点。

当$R_0 > 1$时，这时有$\beta > b+\alpha+\gamma$，且$\beta > \alpha$，于是$\varphi(\bar{y}) < 0$，同时$\varphi(0) > 0$，从而$\varphi(y) = 0$在区间$(0,\bar{y})$内有唯一的解，记为y^*，这时系统(2.3)除病毒不存在时平衡点M_0外，还有唯一的病毒存在的平衡点$M^*(x^*,y^*)$。

不难看出，与系统(2.3)的病毒消失平衡点$M_0\left(\dfrac{b(1-q)}{p+b},0\right)$相对应的系统(3.1)的病毒消失平衡点为$M_0\left(\dfrac{b(1-q)}{p+b},0,\dfrac{p+bq}{p+b}\right)$，与系统(2.3)的病毒存在的平衡点$M^*(x^*,y^*)$相对应的系统(3.1)的病毒存在的平

衡点为 $M^*\left(x^*, y^*, 1-x^*-y^*\right)$。

3.1. 病毒不存在时平衡点 M_0 的稳定性分析

定理 2：当 $R_0<1$ 时，系统(2.3)仅存在病毒不存在平衡点 M_0，且是局部渐近稳定的；当 $R_0>1$ 时，M_0 是不稳定的。

证明 考虑系统(2.3)在平衡点 M_0 处的 Jacobian 矩阵

$$J_{M_0}=\begin{bmatrix} -(\beta+b) & \dfrac{b(\alpha-p)(1-q)}{p+b} \\ 0 & (b+\alpha+\gamma)(R_0-1) \end{bmatrix}。$$

通过计算得到，矩阵 J_{M_0} 的特征根为 $\lambda_1=-(\beta+b)$，$\lambda_2=(b+\alpha+\gamma)(R_0-1)$。

当 $R_0<1$ 时，由于系统中参数均为正数，故两个特征根均为负数，则 M_0 是局部渐近稳定的；当 $R_0=1$ 时，特征根 $\lambda_2=0$，则 M_0 是不稳定的；当 $R_0>1$ 时，两个特征根异号，则 M_0 也是不稳定的。

综上所述，我们可以得到结论：当 $R_0<1$ 时，系统(2.3)仅存在病毒不存在平衡点 M_0，且是局部渐近稳定的。

3.2. 病毒存在时平衡点 M^* 的稳定性分析

定理 3：当 $R_0>1$ 时，病毒存在时平衡点 M^* 是局部稳定的。

证明 考虑系统(2.3)在平衡点 M^* 处的 Jacobian 矩阵

$$J_{M^*}=\begin{bmatrix} -(p+b)-(\beta-\alpha)y^* & -(\beta-\alpha)x^* \\ \beta y^* & \alpha y^* \end{bmatrix}。$$

通过计算得到 $\det\left(J_{M^*}\right)=-y^*\varphi'\left(y^*\right)$，$\operatorname{tr}\left(J_{M^*}\right)=-(\beta-\alpha)y^*+\alpha\left(y^*-\dfrac{p+b}{\alpha}\right)$。由 $\varphi'\left(y^*\right)<0$，所以 $\det\left(J_{M^*}\right)>0$。下面我们讨论 $\operatorname{tr}\left(J_{M^*}\right)$ 的正负性：

1) 当 $0<\dfrac{p+b}{\alpha}<1$ 时，有 $\alpha\varphi\left(\dfrac{p+b}{\alpha}\right)<0$，$\varphi\left(y^*\right)=0$，$y^*<\dfrac{p+b}{\alpha}$，故 $\operatorname{tr}\left(J_{M^*}\right)<0$；

2) 当 $\dfrac{p+b}{\alpha}>1$ 时，有 $y^*<\dfrac{p+b}{\alpha}$，故 $\operatorname{tr}\left(J_{M^*}\right)<0$。

综上所述，我们可以得到结论：当 $R_0>1$ 时，有 $\operatorname{tr}\left(J_{M^*}\right)<0$，于是病毒存在时平衡点 M^* 是局部稳定的。

根据文献[7]适当变换，类似地可证明 M^* 还是全局渐近稳定的．因此对于病毒控制而言，做好防护措施使系统参数满足 $R_0<1$ 就显得尤为重要。

4. 对病毒进行控制的策略

通过对模型的分析可知网络病毒的传播主要由 R_0 的取值决定，即：当 $R_0<1$ 时，病毒消失的平衡点全局渐近稳定，即网络病毒入侵最终失败；而当 $R_0>1$ 时，病毒存在的平衡点全局渐近稳定，即病毒入侵成功。因此，为了减少病毒在网络中的传播，应该尽量减小 R_0 的取值，阻止病毒的成功入侵。但从实际情况来看，应当采取有效的方法，使得即使当 $R_0>1$ 时，系统的病毒消失平衡点也能全局渐近稳定，从而消灭病毒。针对这一情况，我们考虑如下系统：

由关系式 $x=1-y-z$，将系统(2.2)变形为

$$\begin{cases} y' = -(\beta-\alpha)y^2 - \beta yz + [\beta-(b+\alpha+\gamma)]y \\ z' = (\gamma-q)y-(p+b)z+\alpha yz+p+qb \end{cases} \tag{4.1}$$

施加控制器 $u(y,z)$，则系统(4.1)变形为

$$\begin{cases} y' = -(\beta-\alpha)y^2 - \beta yz + [\beta-(b+\alpha+\gamma)]y + u(y,z) \\ z' = (\gamma-q)y-(p+b)z+\alpha yz+p+qb \end{cases} \tag{4.2}$$

令 k_1 和 k_2 （$k_1>0$ 和 $k_2>0$）分别表示机器安装最新防御系统的比例和修复率，考虑如下形式的控制器 $u(y,z)=-k_1\beta(1-y-z)y-k_2y$

定理 4：取 $u(y,z)=-k_1\beta(1-y-z)y-k_2y$，且 k_1 和 k_2 满 $\dfrac{\beta-(b+\alpha+\gamma)}{\beta}<k_1<\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}$，$k_2>0$，则当 $R_0>1$ 时，系统(4.2)的病毒不存在时的平衡点 $\bar{M}_0\left(0,\dfrac{p+qb}{p+b}\right)$ 在 $\bar{D}=\{(y,z)\mid y\ge 0, z\ge 0, y+z\le 1\}$ 内全局渐近稳定。

证明：考虑 Lyapunov 函数 $V=y$，函数 V 沿系统(4.2)的轨线的全导数为

$$\begin{aligned} V' = y' &= -(\beta-\alpha)y^2 - \beta yz + [\beta-(b+\alpha+\gamma)]y - k_1\beta(1-y-z)y - k_2y \\ &= -(\beta-\alpha-k_1\beta)y^2 - \beta(1-k_1)yz - \beta\left[\frac{b+\alpha+\gamma}{\beta}(1-k_1)\right]y - k_2y \\ &= -\beta\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}-k_1\right)y^2 - \beta(1-k_1)yz - \beta\left[k_1-\frac{\beta-(b+\alpha+\gamma)}{\beta}\right]y - k_2y \le 0 \end{aligned},$$

等号成立的充分必要条件是 $y=0$，而 $\bar{M}_0$ 是 $y=0$ 上的最大不变集，所以可知 $\bar{M}_0$ 是全局渐近稳定的。

上述结论表明，在 $R_0>1$ 的情形下，为了控制病毒的传播，比较有效且可行的办法是给机器安装病毒防御系统以及及时更新杀毒软件，此外，尽可能提高主机的修复率。

基金项目

江苏省高校品牌专业建设工程项目资助项目(PPZY2015B109)，扬州大学 2015 年大学生学术科技创新基金重点项目(x2015274)。

参考文献 (References)

[1] Kephart, J.O. and White, S.R. (1991) Directed Graphepidemiological Model of Computer Viruses. *Proceedings of the* 1991 *IEEE Symposium on Security and Privacy*, 343-359.

[2] 冯丽萍, 王鸿斌, 冯素琴. 基于生物学原理的计算机网络病毒传播模型[J]. 计算机工程, 2011, 37(11): 155-157.

[3] 冯丽萍, 王鸿斌, 冯素琴. 改进的 SIR 计算机病毒传播模型[J]. 计算机应用, 2011, 31(7): 1891-1893.

[4] 马知恩, 周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[5] 张宁, 张丹荣, 杨建民. 有限资源下网络病毒的阻断策略[J]. 上海理工大学学报: 自然科学版, 2007, 29(3): 250-254.

[6] 朱莹, 凌智. 一类具反馈控制传染病模型的稳定性分析[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2015, 18(4): 33-36.

[7] 陈永雪. 一类 SEQS 禽流感模型的全局分析[J]. 福建农林大学学报: 自然科学版, 2010, 39(2): 173-176.