Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(4), 337-341
Published Online July 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64049

The Automorphism Groups of a Class of Finite Rank Abelian Groups

Jun Miao, Jun Liao, Heguo Liu*

Department of Mathematics, Hubei University, Wuhan Hubei
Email: junmiaoshanxi@163.com, jliao@hubu.edu.cn, *ghliu@hubu.edu.cn

Received: Jul. 9th, 2016; accepted: Jul. 25th, 2016; published: Jul. 28th, 2016

Abstract

In this paper, we mainly study a class of finite rank torsion free abelian groups which their automorphism groups are C_2.

Keywords

Automorphism, Torsion Free Abelian Groups, Finite Automorphism

一类有限秩Abel群的自同构

苗　俊，廖　军，刘合国*

湖北大学数学系，湖北 武汉
Email: junmiaoshanxi@163.com, jliao@hubu.edu.cn, *ghliu@hubu.edu.cn

收稿日期：2016年7月9日；录用日期：2016年7月25日；发布日期：2016年7月28日

摘　要

本文给出了一类有限秩的具有C_2自同构的无挠Abel群。

*通讯作者。

文章引用: 苗俊, 廖军, 刘合国. 一类有限秩 Abel 群的自同构[J]. 理论数学, 2016, 6(4): 337-341.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64049

关键词

自同构，无挠Abel群，有限自同构

1. 引言

Baer 于 1937 年在无挠 Abel 群中引入型的概念成功地给出了秩为 1 的无挠 Abel 群的同构不变量：两个秩为 1 的无挠 Abel 群的同构，当且仅当它们具有相同的型，参见文献[1]。此后尽管很多学者试图找出秩大于 1 的无挠 Abel 群的同构不变量，但是迄今为止仍然没有一个满意的同构不变量[2]。

在[3]，引理 A 中，作者给出了秩为 1 无挠 Abel 群的自同态环和自同构群的结构，并且研究了无限亚局部循环群的结构以及它们的自同构和自同构群。

K.A. Hirsch 和他的合作者在[4] [5]中研究了当无挠 Abel 群的自同构群有限时的自同构群的结构。如果有限群 A 同构于一个无挠 G 的自同构群，那么 A 同构与下列类型群的直积的一个子群：

(1) 阶为 2，4，6 的循环群 C_2， C_4， C_6；

(2) 8 阶 4 元数群 Q_8；

(3) $\left\langle a,b \mid a^3=b^2=(ab)^2=1\right\rangle$；

(4) $\left\langle a,b \mid a^3=b^3=(ab)^2=1\right\rangle$。

一个自然的问题是确定无挠 Abel 群，使得其自同构群是 C_2。本文是在这方面的一个尝试，给出了一类有限秩的具有 C_2 自同构群的无挠 Abel 群，推广了([6], 4.4.2)。

2. 自同构群为 C_2 的有限秩无挠 Abel 群例

本文采用[6] [7]的符号和概念。下面的定理表明存在任意有限秩的无挠 Abel 群，它们的自同构群为 C_2，因而是不可分解的。见[1]。

定理 2.1：设 $F=Q_{x_1}\oplus Q_{x_2}\oplus\cdots\oplus Q_{x_r}$， 令子群

$$A=\left\langle p_1^m x_1, p_2^m x_2,\cdots, p_r^m x_r, p_{r+1}^m\left(x_1+x_2+\cdots+x_r\right) \mid m\in Z\right\rangle$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_{r+1}$ 是互异的素数， $r\in Z^+$。则 $AutA\cong C_2$。

证明：首先考虑 A 的无限 $p_i\left(1\le i\le r+1\right)$ 高元：

设

$$a=\sum_{i=1}^{r} l_i p_i^{m_i} x_i + l_{r+1} p_{r+1}^{m_{r+1}}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)\in A$$

具有无限阶 $p_j\left(1\le j\le r\right)$ 高，则存在

$$b=\sum_{i=1}^{r} \overline{l_i}\, p_i^{\overline{m_i}} x_i + \overline{l_{r+1}}\, p_{r+1}^{\overline{m_{r+1}}}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)\in A$$

使得 $a=p_j^t b$ 对任意的自然数 t 成立。即

$$\sum_{i=1}^{r} l_i p_i^{m_i} x_i + l_{r+1} p_{r+1}^{m_{r+1}}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)=p_j^t\left(\sum_{i=1}^{r} \overline{l_i}\, p_i^{\overline{m_i}} x_i + \overline{l_{r+1}}\, p_{r+1}^{\overline{m_{r+1}}}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)\right)$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 是 F 的一组基，则由 $x_i\left(i\ne j\right)$ 的系数对应相等有

$$l_i p_i^{m_i} + l_{r+1} p_{r+1}^{m_{r+1}} = p_j^t \left(\overline{l_i} p_i^{\overline{m_i}} + \overline{l_{r+1}} p_{r+1}^{\overline{m_{i+1}}} \right)$$

即

$$\left(l_i p_i^{m_i} + l_{r+1} p_{r+1}^{m_{r+1}} \right) p_j^{-t} = \left(\overline{l_i} p_i^{\overline{m_i}} + \overline{l_{r+1}} p_{r+1}^{\overline{m_{i+1}}} \right)$$

对任意 t 成立，于是

$$l_i p_i^{m_i} + l_{r+1} p_{r+1}^{m_{r+1}} = 0,$$

得到

$$a = \left(l_j p_j^{m_j} + l_{r+1} p_{r+1}^{m_{r+1}} \right) x_j$$

若

$$a = \sum_{i=1}^{r} l_i p_i^{m_i} x_i + l_{r+1} p_{r+1}^{m_{r+1}} \left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right) \in A$$

具有无限阶 p_{r+1} 高，则存在

$$b = \sum_{i=1}^{r} \overline{l_i} p_i^{\overline{m_i}} x_i + \overline{l_{r+1}} p_{r+1}^{\overline{m_{r+1}}} \left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right) \in A$$

使得 $a = p_{r+1}^t b$ 对任意的自然数 t 成立。

由于 $u = \sum_{i=1}^{r} x_i, x_2, \cdots, x_r$ 也构成 F 的一组基，则由 $x_i \left(2 \le i \le r \right)$ 的系数对应相等有

$$l_i p_i^{m_i} - l_1 p_1^{m_1} = p_{r+1}^t \left(\overline{l_i} p_i^{\overline{m_i}} - \overline{l_1} p_1^{\overline{m_1}} \right)$$

即

$$\left(l_i p_i^{m_i} - l_1 p_1^{m_1} \right) p_{r+1}^{-t} = \left(\overline{l_i} p_i^{\overline{m_i}} - \overline{l_1} p_1^{\overline{m_1}} \right)$$

对任意的自然数 t 成立，于是

$$l_i p_i^{m_i} - l_1 p_1^{m_1} = 0$$

得到

$$a = \left(l_{r+1} p_{r+1}^{m_{r+1}} + l_1 p_1^{m_1} \right) u = \left(l_{r+1} p_{r+1}^{m_{r+1}} \right) \left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right)$$

所以无限 $p_i \left(1 \le i \le r \right)$ 高的元是 x_i 的一个有理数；无限 p_{r+1} 高的元是 $u = \sum_{i=1}^{r} x_i$ 的一个有理倍数。

下面确定 A 的自同构群。如果 $\varphi \in AutA$，因为 x_i 和 $x_i\varphi$ 具有相同的 p_i-高，于是 $x_i\varphi = r_i x_i$，其中 r_i 是有理数，$1 \le i \le r$；同理 $u\varphi = ru$，即

$$\left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right) \varphi = r \left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right) = \sum_{i=1}^{r} r x_i$$

又

$$\left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right) \varphi = \sum_{i=1}^{r} x_i \varphi = \sum_{i=1}^{r} r_i x_i$$

所以 $r_1 = r_2 = \cdots = r$，记 $r_\varphi = r_1 = \cdots = r$，则任意的 $a \in A$，$a\varphi = ru$，其中 r_φ 是有理数。又 $\varphi \in AutA$，$x_i\varphi \in A$ 结合 A 的生成元特点，知 $r_\varphi = \pm 1$。因此，$AutA$ 由它生成，且 $AutA \cong C_2$。

注记：事实上，类似于 A 的子群的自同构群都是 2 阶的，例如设

$$B = \left\langle p_1^m x_1, p_2^m x_2, \cdots p_r^m x_r, q_1^m\left(x_1 + x_2\right), q_2^m\left(x_2 + x_3\right), \cdots, q_{r-1}^m\left(x_{r-1} + x_r\right) \mid m \in Z \right\rangle$$

其中 p_i，$q_j\left(1 \le i \le r, 1 \le j \le r-1\right)$ 是互异的素数，则 $AutB \cong C_2$。

一般地，称 x_i 与 x_j 在 A 中有关系，如果 $p^m\left(x_i + x_j + \cdots\right)$ 是它的某个生成元。如果 $x_i\left(1 \le i \le r\right)$ 之间都有关系，则 $AutA \cong C_2$。

定理 2.2：设 $F = \mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{n} \mathop{\oplus}\limits_{j=1}^{r_i} Q_{x_{ij}}$，令子群

$$A = \left\langle p_m^{ij} x_{ij}, q_i^m\left(x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{ir_i}\right) \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le r_i, m \in Z \right\rangle$$

其中 p_{ij}，q_i 是互异的素数。则 $EndA \cong \mathop{\oplus}\limits_{n} Z$, $AutA \cong \mathop{\oplus}\limits_{n} C_2$。

证明：与定理 2.1 类似，知无限 $p_{ij}\left(1 \le j \le r_i, 1 \le i \le n\right)$ 高的元是 x_{ij} 的一个有理倍数；无限 q_i 高的元是 $u_i = \sum\limits_{j=1}^{r_i} x_{ij}$ 的一个有理倍数。再结合同态保持运算的特点以及同构是可逆的不难推出 $EndA \cong \mathop{\oplus}\limits_{n} Z$，$AutA \cong \mathop{\oplus}\limits_{n} C_2$。

定理 2.2 表明，构造的这个 A 可以分解成有限秩不可分解全不变子群的直和。

一般地，当上述 p 换为素数集合是有类似的结论，与定理 1 对应设 $F = \mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{n} Q_{xi}$，设 π 是某些素数的集合，记 $G_\pi x_i = \left\{ l/kx_i \right\}$，其中 k 是一个 π -数，即 $k = \prod\limits_{p_i \in \pi} p_i^{n_i}$，$n_i$，$l \in Z$。使 G_{π_i} 具有无限 π -高，有限 π' -高，

$$G = \left\langle G_{\pi_i} x_i, 1 \le i \le n, G_{\pi_{n+1}}\left(\sum_n x_i\right) \right\rangle$$

同上述方法当 $i \ne j, \pi_i \not\subset \pi_j \cup \pi_{n+1}$ 时，G_{π_i} 是全不变的，即任意的无限 π -高元属于 G_{π_i}，此时若记 $\bigcap \pi_i = \pi$，则 $\varphi \in EndG, x_i^\varphi = l_i \Pi p_i^{n_i} x_i, AutG = Z^n \oplus Z_2$，特别地，当 $\pi = \varnothing$ 时，$AutG = Z_2$。一般地，对于有多个分块的，对每个块进行讨论。如果一个块连接部分有几部分，记 $S_i = \bigcup \pi_k$，π_k 在连接块中出现(等同于上述的 π_{n+1})，当 $\pi_i \not\subset \pi_j \cup S_j$，同样的结论成立。

基金项目

国家自然科学基金(11371124, 11401186)和“高等代数”湖北省精品课程专项基金资助。

参考文献 (References)

[1] Baer, R. (1937) Abelian Group without Elements of Finite Order. *Duke Mathematical Journal*, **3**, 68-122. http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-37-00308-9

[2] Thomas, S. (2003) The Classification Problem for Torsion-Free Abelian Groups of Finite Rank. *Journal of the American Mathematical Society*, **16**, 233-258. http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-02-00409-5

[3] Liao, J. and Liu, H. (2011) Automorphism Groups of Infinite Meta-(Locally Cyclic) Groups (in Chinese). *Scientia Sinica Mathematica*, **41**, 613-628. http://dx.doi.org/10.1360/012011-128

[4] Hallett, J. and Hirsch, K. (1965) Torsion-Free Groups Having Finite Automorphism I. *Journal of Algebra*, **2**, 287-298. http://dx.doi.org/10.1016/0021-8693(65)90010-4

[5] Hirsch, K. and Zassenhaus, H. (1966) Finite Automorphism Groups of Torsion-Free Groups. *Journal of the London Mathematical Society*, **41**, 545-549. http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-41.1.545

[6] Robinson, D.J.S. (1995) A Course in the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York.

[7] Fuchs, L. (1970) Infinite Abelian Groups, Vol. I. Academic Press, New York.