Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(4), 361-367
Published Online July 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64051

Hans汉斯

The New Inclusion Region of Eigenvalue Different from 1 for a Stochastic Matrix

Baoxing Zhou[1], Huifang Wei[2], Yaotang Li[1*]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
[2]College of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: bxzhou2015@163.com, *liyaotang@ynu.edu.cn

Received: Jul. 12th, 2016; accepted: Jul. 26th, 2016; published: Jul. 29th, 2016

Abstract

Two new inclusion regions of eigenvalue different from 1 of stochastic matrices are given by using the α-eigenvalue inclusion theorem and the theory of modified matrices; and two new sufficient conditions of stochastic matrices nonsingular are obtained. Numerical examples are given to show that the existing results are improved in some cases.

Keywords

Stochastic Matrices, α_1-Matrices, Eigenvalue Different from 1, α-Eigenvalue Inclusion Theorem

随机矩阵非1特征值的新包含区域

周宝星[1]，卫慧芳[2]，李耀堂[1*]

[1]云南大学，数学与统计学院，云南 昆明
[2]云南财经大学，统计与数学学院，云南 昆明
Email: bxzhou2015@163.com, *liyaotang@ynu.edu.cn

收稿日期：2016年7月12日；录用日期：2016年7月26日；发布日期：2016年7月29日

摘　要

利用α-型特征值包含定理及修正矩阵，给出随机矩阵两个新的非1特征值包含区域，并由此得到随机矩

*通讯作者。

文章引用：周宝星，卫慧芳，李耀堂．随机矩阵非 1 特征值的新包含区域[J]．理论数学, 2016, 6(4): 361-367.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64051

阵非奇异的两个新的充分条件。数值例子表明，在某些情况下所得结果改进了几个已有结果。

关键词

随机矩阵，α_1-矩阵，非1特征值，α-型特征值包含定理

1. 引言

随机矩阵是行和为 1 的非负矩阵，其定义如下：

定义 1.1：设非负矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 的所有行和等于 1，即

$$R_i\left(A\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1,\ \ \forall i\in N=\{1,2,\cdots,n\}$$

则称 A 为(行)随机矩阵。

随机矩阵及其特征值定位在诸如计算机辅助设计、有限 Markov 过程等领域都有着重要的应用。由非负矩阵的 Perron-Frobenius 定理[1] [2]知，1 是任何随机矩阵的主特征值，且 $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in R^{n}$ 是其对应的一个特征向量。因此对于随机矩阵的特征值定位问题，只需对其所有非 1 特征值进行定位即可。为了更精确的定位随机矩阵的特征值，LJ. Cvetkovic 等在文[3]中引入修正矩阵的概念，并将著名的 Gersgorin 圆盘定理[4]应用于修正矩阵，得到如下随机矩阵特征值定位定理。

定理 1.2 [3] [5]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，$\sigma\left(A\right)$ 表示 A 的谱，$trace\left(A\right)$ 为 A 的迹。若 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\backslash\{1\}$，则

$$\lambda\in\Theta^{sto}\left(A\right)=\left\{z\in C:\left|z-\gamma\right|\le 1-trace\left(A\right)+\left(n-1\right)\gamma\right\}$$

其中 $\gamma=\max\limits_{1\le i\le n}\left(a_{ii}-l_i\left(A\right)\right),l_i\left(A\right)=\min\limits_{k\in N\backslash\{i\}}a_{ki},trace\left(A\right)=\sum\limits_{i\in N}a_{ii}$。

Shen 等在文[6]中通过给出随机矩阵非奇异的三个充分条件，得到了随机矩阵非 1 实特征值的三个包含集。随后，Li 等在文[7]中推广了 Shen 的结果，得到如下定理。

定理 1.3 [7]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵。若 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\backslash\{1\}$，则

$$\lambda\in\Gamma^{stol}\left(A\right)=\bigcup_{i\in N}\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-l_i\left(A\right)\right|\le cl_i\left(A\right)\right\}$$

其中 $l_i\left(A\right)$ 同定理 1.2，$cl_i\left(A\right)=\sum\limits_{k\in N\backslash\{i\}}\left|a_{ki}-l_i\left(A\right)\right|$。

定理 1.4 [7]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵。若 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\backslash\{1\}$，则

$$\lambda\in B^{stol}\left(A\right)=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ j\ne i}}B_{ij}^{stol}$$

其中 $B_{ij}^{stol}\left(A\right)=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-z-l_i\left(A\right)\right|\left|a_{jj}-z-l_j\left(A\right)\right|\le cl_i\left(A\right)cl_j\left(A\right)\right\}$。

对于矩阵特征值定位，人们总是力求用尽可能少的计算量得到较为精确的特征值包含区域，但现有的结果还远远没有达到研究者们的期望，因此有必要继续对其进行研究与探索。本文利用α-型特征值包含定理及修正矩阵，研究随机矩阵非 1 特征值新的包含区域，然后利用其给出随机矩阵非奇异的两个充分条件。

2. 随机矩阵新的非 1 特征值包含定理

为下文叙述和证明的方便，首先给出一些定义，引理和定理。

定义 2.1 [8]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$，如果存在 $\alpha\in[0,1]$ 使

$$\left|a_{ii}\right|>\alpha r_i\left(A\right)+\left(1-\alpha\right)r_i\left(A^{\mathrm{T}}\right),\forall i\in N$$

其中 $r_i\left(A\right)=\sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}}\left|a_{ij}\right|$，则称 A 为α_1-矩阵。

定理 2.2 [8]：若 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$ 为α_1-矩阵,则 A 是非奇异的。

定理 2.3 [8]：(α-型特征值包含定理)：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$，则

$$\sigma\left(A\right)\subseteq\Gamma\left(A\right)=\bigcap_{0\le\alpha\le1}\bigcup_{i\in N}\Gamma_i^{\alpha}\left(A\right)$$

其中 $\Gamma_i^{\alpha}\left(A\right)=\left\{z\in C:\left|z-a_{ii}\right|\le\alpha r_i\left(A\right)+\left(1-\alpha\right)r_i\left(A^{\mathrm{T}}\right)\right\}$，$\forall i\in N$。

引理 2.4 [3] [7]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，$d=\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right)^{\mathrm{T}}$ 为任一 n 维实向量。若 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\setminus\{1\}$，则 λ 为修正矩阵 $B=A-ed^{\mathrm{T}}$ 的特征值。因而若 B 是非奇异的，则 A 是非奇异的。

下面给出随机矩阵非 1 特征值的两个新的包含定理。

定理 2.5：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，若 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\setminus\{1\}$, 则

$$\lambda\in\Phi\left(A\right)=\bigcap_{0\le\alpha\le1}\bigcup_{i\in N}\Lambda_i^{\alpha}\left(A\right)$$

其中 $\Lambda_i^{\alpha}\left(A\right)=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-\beta\left(A\right)-z\right|\le\alpha\gamma_i\left(A\right)+\left(1-\alpha\right)\varphi_i\left(A\right)\right\}$，$\beta\left(A\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\left(A\right)\Big/n$,

$$p_i\left(A\right)=\min_{j\ne i}a_{ij},\gamma_i\left(A\right)=\sum_{j\ne i}\left|a_{ij}-\beta\left(A\right)\right|,\varphi_i\left(A\right)=\sum_{k\ne i}\left|a_{ki}-\beta\left(A\right)\right|$$

证明：令 $B=A-ed^{\mathrm{T}}$，其中 $d=\left(\beta\left(A\right),\beta\left(A\right),\cdots,\beta\left(A\right)\right)^{\mathrm{T}}$。则有

$$b_{ij}=a_{ij}-\beta\left(A\right),\forall i,j\in N \tag{2.1}$$

于是

$$r_i\left(B\right)=\sum_{j\ne i}\left|b_{ij}\right|=\sum_{j\ne i}\left|a_{ij}-\beta\left(A\right)\right|=\gamma_i\left(A\right) \tag{2.2}$$

$$r_i\left(B^{\mathrm{T}}\right)=\sum_{k\ne i}\left|b_{ki}\right|=\sum_{k\ne i}\left|a_{ki}-\beta\left(A\right)\right|=\varphi_i\left(A\right) \tag{2.3}$$

设 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\setminus\{1\}$，由引理 2.4 得 $\lambda\in\sigma\left(B\right)$，由定理 2.3 知

$$\lambda\in\bigcap_{0\le\alpha\le1}\bigcup_{i\in N}\Gamma_i^{\alpha}\left(B\right)$$

其中 $\Gamma_i^{\alpha}\left(B\right)=\left\{z\in C:\left|b_{ii}-z\right|\le\alpha r_i\left(B\right)+\left(1-\alpha\right)r_i\left(B^{\mathrm{T}}\right)\right\}$，$\forall i\in N$。

又由(2.1)，(2.2)，(2.3)得

$$\Gamma_i^{\alpha}\left(B\right)=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-\beta\left(A\right)-z\right|\le\alpha\gamma_i\left(A\right)+\left(1-\alpha\right)\phi_i\left(A\right)\right\}=\Lambda_i^{\alpha}\left(A\right),\forall i\in N$$

因此结论成立。

定理 2.6：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，若 $\lambda\in\sigma\left(A\right)\setminus\{1\}$，则

$$\lambda\in\mathrm{T}\left(A\right)=\bigcap_{0\le\alpha\le1}\bigcup_{i\in N}\Omega_i^{\alpha}\left(A\right)$$

其中 $\Omega_i^{\alpha}\left(A\right)=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-\omega\left(A\right)-z\right|\le\alpha\kappa_i\left(A\right)+\left(1-\alpha\right)\delta_i\left(A\right)\right\}$，

$$\omega(A)=\frac{trace(A)}{n},\quad \kappa_i(A)=\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}-\omega(A)\right|,\quad \delta_i(A)=\sum_{k\neq i}\left|a_{ki}-\omega(A)\right|.$$

证明：令 $\bar{B}=A-e\bar{d}^{\mathrm{T}}$，其中 $\bar{d}=\left(\omega(A),\omega(A),\cdots,\omega(A)\right)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\bar{b}_{ij}=a_{ij}-\omega(A),\forall i,j\in N \tag{2.4}$$

于是

$$r_i(\bar{B})=\sum_{j\neq i}\left|\bar{b}_{ij}\right|=\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}-\omega(A)\right|=\kappa_i(A) \tag{2.5}$$

$$r_i(\bar{B}^{\mathrm{T}})=\sum_{k\neq i}\left|\bar{b}_{ki}\right|=\sum_{k\neq i}\left|a_{ki}-\omega(A)\right|=\delta_i(A) \tag{2.6}$$

设 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$,由引理 2. 4 得 $\lambda\in\sigma(\bar{B})$,再由定理 2. 3 知

$$\lambda\in\bigcap_{0\le\alpha\le1}\bigcup_{i\in N}\Gamma_i^{\alpha}(\bar{B})$$

其中 $\Gamma_i^{\alpha}(\bar{B})=\left\{z\in C:\left|\bar{b}_{ii}-z\right|\le\alpha r_i(\bar{B})+(1-\alpha)r_i(\bar{B}^{\mathrm{T}})\right\}$， $\forall i\in N$ 。

又由(2.4)，(2.5)，(2.6)得

$$\Gamma_i^{\alpha}(\bar{B})=\left\{z\in C:\left|a_{ii}-\omega(A)-z\right|\le\alpha\kappa_i(A)+(1-\alpha)\delta_i(A)\right\}=\Omega_i^{\alpha}(A),\forall i\in N$$

因此结论成立。

3. 随机矩阵非奇异的两个新充分条件

本节，我们利用第 2 节所获结果给出随机矩阵非奇异的两个新的充分条件。

定理 3.1：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得

$$\left|a_{ii}-\beta(A)\right|>\alpha\gamma_i(A)+(1-\alpha)\varphi_i(A),\forall i\in N,$$

则 A 是非奇异的，其中 $\beta(A)$， $\gamma_i(A)$， $\varphi_i(A)$ 同定理 2.5

证明：(反证法)假设 A 为奇异矩阵，则有 $0\in\sigma(A)$，由定理 2.5 得 $0\in\Phi(A)$，即对于任意的 $\alpha\in[0,1]$，存在 $i\in N$，使得

$$\left|a_{ii}-\beta(A)\right|\le\alpha\gamma_i(A)+(1-\alpha)\varphi_i(A)$$

这与条件矛盾，故 A 是非奇异的。

定理 3.2：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为随机矩阵，若存在，使得

$$\left|a_{ii}-\omega(A)\right|>\alpha\kappa_i(A)+(1-\alpha)\delta_i(A),\forall i\in N$$

则 A 是非奇异的，其中 $\omega(A)$， $\kappa_i(A)$， $\delta_i(A)$ 同定理 2.6

证明：(反证法)假设 A 为奇异矩阵，则有 $0\in\sigma(A)$。由定理 2.6 得 $0\in\mathrm{T}(A)$，即对于任意的 $\alpha\in[0,1]$，存在 $i\in N$，使得

$$\left|a_{ii}-\omega(A)\right|\le\alpha\kappa_i(A)+(1-\alpha)\delta_i(A)$$

这与条件矛盾，故 A 是非奇异的。

4. 数值例子

本节我们应用数值例子对本文所获结果与文[3]和[7]的结果进行比较。下例中统一取 $\alpha=0.5$ 。

例 4.1：考虑随机矩阵.

$$A=\begin{bmatrix}0.3555 & 0.3467 & 0.0549 & 0.0241 & 0.2188\\ 0.2505 & 0.1306 & 0.2424 & 0.1275 & 0.2490\\ 0.0797 & 0.1513 & 0.2204 & 0.2640 & 0.2846\\ 0.0614 & 0.4011 & 0.2117 & 0.2705 & 0.0553\\ 0.2211 & 0.0585 & 0.4033 & 0.1871 & 0.1300\end{bmatrix}.$$

将定理1.2、定理1.3和定理2.5分别应用于随机矩阵 A，经计算得到 A 的非1特征值包含集 $\Theta^{sto}(A)$，$\Gamma^{stol}(A)$ 和 $\Phi(A)$，其关系如图1所示，图中星号表示随机矩阵 A 的特征值，蓝色区域表示 $\Phi(A)$，黄色区域表示 $\Gamma^{stol}(A)$，绿色区域表示 $\Theta^{sto}(A)$。由图1知，$\Phi(A)\subset\Gamma^{stol}(A)\subset\Theta^{sto}(A)$，因此 $\Phi(A)$ 更精确地定位了随机矩阵 A 的非1特征值。

例4.2：考虑随机矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0.1257 & 0.2074 & 0.1457 & 0.2225 & 0.2987\\ 0.3444 & 0.2463 & 0.0289 & 0.3321 & 0.0483\\ 0.1341 & 0.2547 & 0.1607 & 0.2957 & 0.1548\\ 0.1420 & 0.1507 & 0.2974 & 0.2589 & 0.1510\\ 0.1428 & 0.1547 & 0.3032 & 0.2991 & 0.1002\end{bmatrix}.$$

将定理1.2、定理1.4和定理2.5分别应用于随机矩阵 A，经计算得到得到 A 的非1特征值包含集 $\Theta^{sto}(A)$，$B^{stol}(A)$ 和 $\Phi(A)$，其关系如图2所示。图中星号表示随机矩阵 A 的特征值，蓝色区域表示 $\Phi(A)$，黄色区域表示 $B^{stol}(A)$，绿色区域表示 $\Theta^{sto}(A)$。由图2知，$\Phi(A)\subset B^{stol}(A)\subset\Theta^{sto}(A)$，因此 $\Phi(A)$ 更精确地定位了随机矩阵 A 的非1特征值。

例4.3：考虑随机矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0.2373 & 0.4085 & 0.0735 & 0.2807\\ 0.1281 & 0.3266 & 0.2438 & 0.3015\\ 0.3298 & 0.4202 & 0.0406 & 0.2094\\ 0.3611 & 0.1104 & 0.3022 & 0.2263\end{bmatrix}.$$

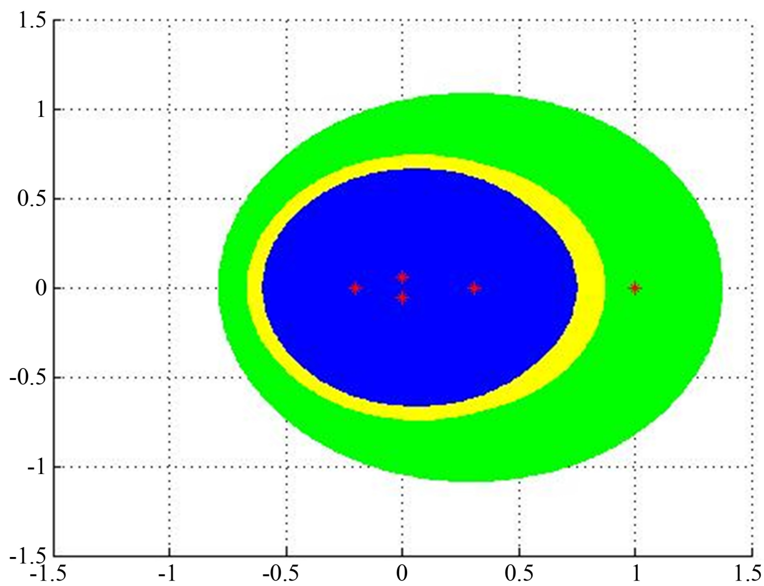

Figure 1. The comparison of $\Phi(A)$, $\Gamma^{stol}(A)$, $\Theta^{sto}(A)$

图1. $\Phi(A)$、$\Gamma^{stol}(A)$、$\Theta^{sto}(A)$的比较

分别将定理 1.3 和定理 2.5 应用于随机矩阵 A，经计算得到 A 的非 1 特征值包含集 $\Gamma^{stol}(A)$ 和 $\Phi(A)$，其关系如图 3 所示。图中星号表示随机矩阵 A 的特征值，蓝色区域表示 $\Gamma^{stol}(A)$，黄色区域表示 $\Phi(A)$。由图 3 知定理 1.3 所给区域 $\Gamma^{stol}(A)$ 和定理 2.5 所给区域 $\Phi(A)$ 互不包含。

下面我们比较定理 2.5 和定理 2.6。

例 4.4：利用 MATLAB 代码：

K=10; *A*=rand(k,k); *A* =inv(diag(sum(*A'*)))**A*.

随机产生 100 个随机矩阵，观察其对应非 1 特征值包含集的关系见表 1。表 1 显示绝大部分情况下

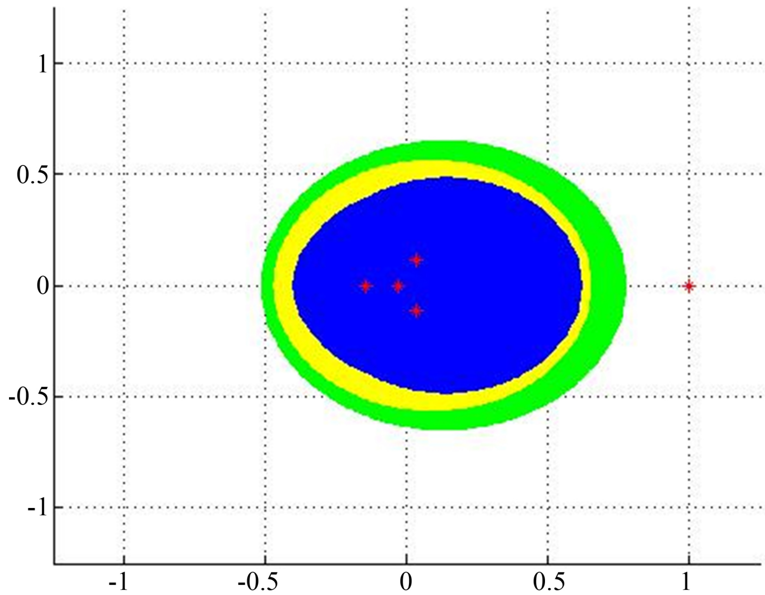

Figure 2. The comparison of $\Phi(A)$, $B^{stol}(A)$, $\Theta^{sto}(A)$
图 2. $\Phi(A)$、$B^{stol}(A)$、$\Theta^{sto}(A)$的比较

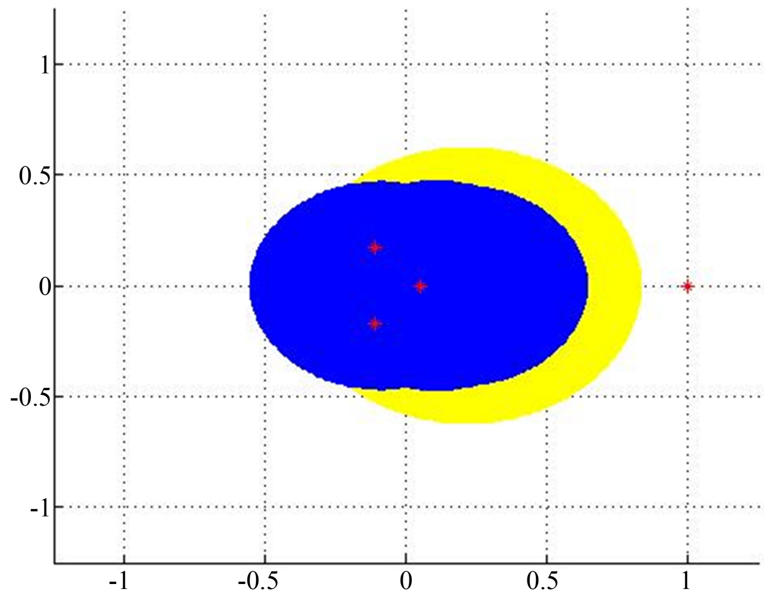

Figure 3. The comparison of $\Gamma^{stol}(A)$ and $\Phi(A)$
图 3. $\Gamma^{stol}(A)$和 $\Phi(A)$的比较

Table 1. The comparison of $\Phi(A)$ and $\mathrm{T}(A)$
表 1. $\Phi(A)$和 $\mathrm{T}(A)$的比较

$\Phi(A)$ 与 $\mathrm{T}(A)$ 包含关系	$\mathrm{T}(A)\subseteq\Phi(A)$	$\Phi(A)\subseteq\mathrm{T}(A)$	二者互不包含
个数	85	3	12

Table 2. The comparison of $\mathrm{T}(A)$, $\Gamma^{stol}(A)$ and $B^{stol}(A)$
表 2. $\mathrm{T}(A)$和 $\Gamma^{stol}(A)$、$B^{stol}(A)$的比较

$\mathrm{T}(A)$ 与 $\Gamma^{stol}(A)$ 的包含情况	$\mathrm{T}(A)\not\subset\Gamma^{stol}(A), \Gamma^{stol}(A)\not\subset\mathrm{T}(A)$	$\mathrm{T}(A)\subset\Gamma^{stol}(A)$
个数	2	98
$\mathrm{T}(A)$ 与 $B^{stol}(A)$ 的包含情况	$\mathrm{T}(A)\not\subset B^{stol}(A), B^{stol}(A)\not\subset\mathrm{T}(A)$	$\mathrm{T}(A)\subset B^{stol}(A)$
个数	1	99

定理 2.6 给出的特征值包含区域比定理 2.5 给出的特征值包含区域更精确。

例 4.5：为了进一步的探讨 $\mathrm{T}(A)$ 和 $\Gamma^{stol}(A)$、$B^{stol}(A)$ 的关系，利用 MATLAB 代码：

K=10; A =rand(k,k); A =inv(diag(sum(A')))*A.

随机产生 100 个随机矩阵，考察其对应的非 1 特征值包含集的关系及其个数见表 2。表 2 显示绝大部分情况下定理 2.6 给出的特征值包含区域比文献[7]所给的特征值包含区域更精确。

基金项目

本文受国家自然科学基金资助项目(11361074)资助。

参考文献 (References)

[1] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1986) Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, England.

[2] Seneta, E. (2004) Nonnegative Matrices and Markov Chains. Springer-Verlag, Berlin.

[3] Cvetković, L., Kostic, V. and Pena, J.M. (2011) Eigenvalue Localization Refinements for Matrices Related to Positivity. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **32**, 771-784. http://dx.doi.org/10.1137/100807077

[4] Varga, R.S. (2004) Gersgorin and His Circles. Springer-Verlag, Berlin. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17798-9

[5] Cvetkovic, L., Kostic, V. and Varga, R.S. (2004) A New Gersgorin-Type Eigenvalue Inclusion Set. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **18**, 73-80.

[6] Shen, S.Q., Yu, J. and Huang, T.Z. (2014) Some Classes of Nonsingular Matrices with Applications to Localize the Real Eigenvalues of Real Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **447**, 74-87. http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2013.02.005

[7] Li, C.Q., Liu, Q.B. and Li, Y.T. (2014) Gersgorin-Type and Brauer-Type Eigenvalue Localization Sets of Stochastic Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*.

[8] Cvetković, L. (2007) H-Matrix Theory vs. Eigenvalue Localization. *Numerical Algorithms*, **42**, 229-245.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx