Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(4), 307-311
Published Online July 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64045

Bayesian Estimation of Shape Parameter and Failure Rate from Burrxii Distribution under Progressive Type-Ii Censored Data

Huimin Yu, Naiyi Li

College of Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong
Email: saiyhm@126.com, linaiyi1979@163.com

Received: Jul. 3rd, 2016; accepted: Jul. 24th, 2016; published: Jul. 27th, 2016

Abstract

In this paper, we discuss the Bayesian estimation of the shape parameter and the failure rate from BurrXII distribution, under composite Mlinex loss function and progressive type-II censoring samples, we got the general expression and exact expression of the Bayesian estimation, and we also proved that the Bayesian estimation was admissible.

Keywords

Composite Mlinex Loss, Bayesian Estimation, Burrxii Distribution, Admissibility

逐次截尾下BurrXII分布形状参数和失效率的Bayes估计

余慧敏，李乃医

广东海洋大学理学院，广东 湛江
Email: saiyhm@126.com, linaiyi1979@163.com

收稿日期：2016年7月3日；录用日期：2016年7月24日；发布日期：2016年7月27日

文章引用：余慧敏，李乃医．逐次截尾下BurrXII分布形状参数和失效率的Bayes估计[J]．理论数学, 2016, 6(4): 307-311.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64045

摘　要

基于逐次截尾数据，在复合Mlinex对称损失下，研究*BurrXII*分布形状参数和失效率的Bayes估计，并证明了其容许性。

关键词

复合Mlinex对称损失，Bayes估计，*BurrXII*分布，容许性

1. 引言

BurrXII 分布是精算师较常用分布的之一，它在经济科学、保险精算学和环境科学等众多领域内有广阔的应用。该分布的失效率函数可类似于对数正态分布和逆高斯等分布某些特性，譬如：都不是单调函数。其分布已在质量控制和可靠性理论中均得到了广泛的应用，因此对 *BurrXII* 分布性质亟需进行深入的探讨，将具有较为重要的现实意义，从而引起了越来越多的研究者的关注。至今，很多学者开始致力于这方面的研究，例如：文献[1]分别在完全数据和删失数据情形下，获得了参数的极大似然点估计和区间估计；文献[2]针对删失数据，采用线性指数损失函数，得到了参数的经验 *Bayes* 估计；文献[3]研究了该分布的统计推断问题；文献[4]探讨了熵损失下参数的 *Bayes* 估计。本文在此基础上，将基于定数截尾样本和复合 Mlinex 对称损失下，研究 *BurrXII* 分布中形状参数和失效率函数的 *Bayes* 估计，并讨论其容许性。

设随机变量 X 服从 *BurrXII* 分布，其分布函为

$$F(x)=1-\left(1+x^{\alpha}\right)^{-\theta},\quad x>0,\ \alpha>0,\ \theta>0.$$

显然，参数 α 已知时，在给定形状参数 θ 的条件下，随机变量X的条件概率密度为

$$f(\boldsymbol{x}\mid\theta)=\theta\alpha x^{\alpha-1}\left(1+x^{\alpha}\right)^{-(\theta+1)},\quad x>0,\ \alpha>0,\ \theta>0 \tag{1}$$

若随机变量X表示产品寿命，易知产品的失效率为

$$H(t)=\theta\alpha xt^{\alpha-1}\left(1+t^{\alpha}\right)^{-1},t>0 \tag{2}$$

定义1.1 [5]记*Mlinex*非对称损失函数为：

$$L_c(\theta,\delta)=\omega\left[\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{c}-c\ln\left(\frac{\delta}{\theta}\right)-1\right],\quad \omega>0,\ c\neq 0$$

其中 δ 是未知参数 θ 的判别空间的一个估计，则称损失函数

$$L(\theta,\delta)=L_c(\theta,\delta)+L_{-c}(\theta,\delta)=\omega\left[\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{c}+\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{-c}-2\right],\quad \omega>0,\ c\neq 0 \tag{3}$$

为复合 *MLinex* 对称损失函数。

易知此损失函数为对称的非负严格凸损失函数，当 $\frac{\delta}{\theta}=1$ 时，损失函数取得最小值 0。若令 $d=\ln\left(\frac{\delta}{\theta}\right)$，则(3)可表示为复合 *Linex* 对称损失；若令 $c=q$，则(3)即为 q-对称熵损失。

2. 逐次截尾试验

若n个独立且都服从*BurrXII*分布的部件进行寿命试验，未失效的部件可在失效时刻前被移离试验，即

当观察到n个部件中有1个部件失效时，记失效时刻为X_1，此时从剩余的$n-1$个部件中任取出R_1个移离试验，其余$n-R_1-1$个继续工作，以此类推，当正在工作的$n-R_1-1$个部件中又有一个部件失效时，记失效时刻为X_2，同时从$n-R_1-2$个部件中任取R_2个移离试验，其余$n-R_1-R_2-2$个部件继续工作。依此类推，试验进行到第m个部件失效，记失效时刻为X_m，此时剩余的$n-R_1-R_2-\cdots-R_m-m$个全部退出，试验终止。其中$R_1,R_2,\cdots,R_m$是事先给定的。根据上述实验，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为m次观测得到的失效时间，由文献[6]知，在θ已知的条件下，其联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}\mid\theta) &= M\prod_{i=1}^{m} f(x_i)\left(1-F(x_i)\right)^{R_i} \\ &= M\prod_{i=1}^{m}\theta\alpha x_i^{\alpha-1}\left(1+x_i^{\alpha}\right)^{-\theta(R_i+1)-1} \end{aligned} \tag{4}$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

$$M=n(n-R_1-1)(n-R_1-R_2-2)\cdots\left(n-\sum_{i=1}^{m-1}(R_i+1)\right)$$

3. Bayes 估计

在Bayes统计中，参数θ是随机变量而它的先验分布往往未知，一般可利用历史样本采用经验Bayes，获得θ的经验Bayes估计。本文将采用*Jeffreys*原则获得θ的先验分布。

由(4)式可知，θ的对数似然函数为

$$L(\theta)=\ln M+m\ln\theta\alpha+(\alpha+1)\sum_{i=1}^{m}\ln x_i-\sum_{i=1}^{m}\left(\theta(R_i+1)+1\right)\ln\left(1+x_i^{\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}=-\frac{m}{\theta^2}$$

可得θ的Fisher信息量$I(\theta)=\dfrac{m}{\theta^2}\propto\dfrac{1}{\theta^2}$，故参数$\theta$的先验分布可取为

$$\pi(\theta)=\frac{1}{\theta} \tag{5}$$

引理3.1 [7]：在给定的Bayes决策问题中，(1)若损失函数$L(\theta,\delta)$关于δ为严凸函数，则该统计判决问题的Bayes解几乎处处唯一。

(2)假如对给定的先验分布$\pi(\theta)$，θ的Bayes估计是唯一，则它是容许的。

定理3.1：在模型(1)和复合*Mlinex*对称损失(3)下，若在判别空间中θ存在估计量δ，其Bayes风险$r(\delta)<\infty$，则θ对任意给定的先验分布$\pi(\theta)$有唯一的*Bayes*估计

$$\delta_B=\left[\frac{E(\theta^{c}\mid X)}{E(\theta^{-c}\mid X)}\right]^{\frac{1}{2c}}$$

证明：在损失(3)下，δ对应的Bayes风险为

$$r(\theta,\delta)=E\left[L(\theta,\delta)\right]=E\left[E\left[\left(L(\theta,\delta)\right)\mid X\right]\right]$$

要使得$r(\theta,\delta)$达到最小，只需$E\left[\left(L(\theta,\delta)\right)\mid X\right]$达到最小即可。

而

$$E\left[\left(L(\theta,\delta)\right)\mid X\right]=E\left\{\omega\left[\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{c}+\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{-c}-2\right]\mid X\right\}=\omega\left[\delta^{c}E\left(\theta^{-c}\mid X\right)+\delta^{c}E\left(\theta^{c}\mid X\right)-2\right]$$

记 $g(\delta)=\delta^c E(\theta^{-c}\mid X)+\delta^c E(\theta^c\mid X)-2$

要使得 $E\left[\left(L(\theta,\delta)\right)\mid X\right]$ 达到最小，只需 $g(\delta)$ 几乎处处达到最小。

令 $f(\delta)$ 关于 δ 求导等于零，可得

$$\delta=\left[\frac{E(\theta^c\mid X)}{E(\theta^{-c}\mid X)}\right]^{\frac{1}{2c}}$$

由于 $f(\delta)$ 是凸函数，故 δ 是 $f(\delta)$ 的唯一最小值点，即证。

定理 3.2 假设参数 θ 先验分布为(5)，在损失(3)下，*BurrXII* 分布的形状参数 θ 的唯一的 *Bayes* 估计 $\delta_B=\left[\frac{\Gamma(m+c)}{\Gamma(m-c)T^{2c}}\right]^{\frac{1}{2c}}$，且它是容许的，其中 $T=\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\ln(1+x_i^\alpha)$。

证明：因为先验概率 $\pi(\theta)=\frac{1}{\theta}$，由(4)可得后验概率

$$h(\theta\mid \boldsymbol{x})=\frac{\pi(\theta)f(\boldsymbol{x}\mid\theta)}{\int_0^\infty \pi(\theta)f(\boldsymbol{x}\mid\theta)\mathrm{d}\theta}=\frac{\theta^{m-1}\mathrm{e}^{-\theta T}T^m}{\Gamma(m)}$$

因此 θ 的后验分布是 $\Gamma(m,T)$，其中 $T=\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\ln(1+x_i^\alpha)$。

由于 $E(\theta^{-c}\mid X)=\int_0^\infty \theta^{-c}\frac{\theta^{m-1}\mathrm{e}^{-\theta T}T^m}{\Gamma(m)}\mathrm{d}\theta=\frac{\Gamma(m-c)T^c}{\Gamma(m)}$

$$E(\theta^c\mid X)=\int_0^\infty \theta^{c}\frac{\theta^{m-1}\mathrm{e}^{-\theta T}T^m}{\Gamma(m)}\mathrm{d}\theta=\frac{\Gamma(m+c)}{\Gamma(m)T^c}$$

由定理 3.1 可得 $\delta_B=\left[\frac{\Gamma(m+c)}{\Gamma(m-c)T^{2c}}\right]^{\frac{1}{2c}}$。

再证其可容许性。由引理 3.1 和定理 3.1，由于 δ 是唯一 *Bayes* 估计，易知该估计是容许的。证毕。

定理 3.3 假设参数 θ 先验分布为(5)，在损失(3)下，*BurrXII* 分布的失效率 $H(t)$ 的 *Bayes* 估计 $\delta_B=\left[\frac{\Gamma(m+c)}{\Gamma(m-c)(QT)^{2c}}\right]^{\frac{1}{2c}}$,且它是容许的，其中 $T=\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\ln(1+x_i^\alpha)$， $Q=(1+t^\alpha)\alpha^{-1}t^{1-\alpha}$.

证明：由(2)式知 $\mathrm{d}H=\alpha t^{\alpha-1}(1+t^\alpha)^{-1}\mathrm{d}\theta$

因为

$$\begin{aligned}h(\theta\mid\boldsymbol{x})&=\frac{\theta^{m-1}\mathrm{e}^{-\theta T}T^m}{\Gamma(m)}\\&=\frac{(1+t^\alpha)^m\alpha^{-m}t^{m(1-\alpha)}T^mH^{m-1}\mathrm{e}^{-(1+t^\alpha)\alpha^{-1}t^{1-\alpha}TH}}{\Gamma(m)}\alpha t^{\alpha-1}(1+t^\alpha)^{-1}\\&=\frac{(QT)^mH^{m-1}\mathrm{e}^{-QTH}}{\Gamma(m)}\alpha t^{\alpha-1}(1+t^\alpha)^{-1}\end{aligned}$$

所以

$$h(\theta \mid \boldsymbol{x}) = \frac{(QT)^m H^{m-1} \mathrm{e}^{-QTH}}{\Gamma(m)} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta},$$

从而

$$h(H \mid \boldsymbol{x}) = \frac{(QT)^m H^{m-1} \mathrm{e}^{-QTH}}{\Gamma(m)}, \quad H > 0。$$

于是

$$E(H^c \mid X) = \int_0^\infty H^c \frac{(QT)^m H^{m-1} \mathrm{e}^{-QTH}}{\Gamma(m)} \mathrm{d}H = \frac{\Gamma(m+c)}{\Gamma(m)(QT)^c}$$

$$E(H^{-c} \mid X) = \int_0^\infty H^{-c} \frac{(QT)^m H^{m-1} \mathrm{e}^{-QTH}}{\Gamma(m)} \mathrm{d}H = \frac{\Gamma(m-c)(QT)^c}{\Gamma(m)}$$

由定理 3.1 可得失效率 $H(t)$ 的 *Bayes* 估计 $\delta_B = \left[\frac{\Gamma(m+c)}{\Gamma(m-c)(QT)^{2c}}\right]^{\frac{1}{2c}}$。

同样根据引理 3.1 和定理 3.1，由于 δ 是唯一 *Bayes* 估计，易知该估计是容许的。证毕。

基金项目

国家社科基金资助项目(15BTJ031)。

参考文献 (References)

[1] Wang, F.K. and Keats, J.B. (1996) Maximum Likelihood Estimation of the *BurrXII* Parameters with Censored and Uncensored Data. *Microelectron*, **36**, 359-362.

[2] Li, X.C., Shi, Y.M., Wei, J.Q. and Chai, J. (2007) Empirical Bayes Estimation of Reliability Performances Using LINEX Loss and Progressively Type-II Censored Samples. *Mathematics and Computers in Simulation*, **73**, 320-326. http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2006.05.002

[3] 王炳兴. *BurrXII Type* 分布的统计推断[J]. 数学物理学报, 2008, 28A(6): 1103-1108.

[4] 陈志强，韦程东，程艳琴. 熵损失下 *Burr* 分布的 Bayes 估计[J]. 广西师范学院学报, 2007, 24(3): 30-34.

[5] 金秀岩. 复合 Mlinex 对称损失函数下对数伽玛分布参数的 Bayes 估计[J]. 数学的实践与认知，2014，44(19): 257-262.

[6] 曹晋华，程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京：高等教育出版社, 2006.

[7] 茆诗松，王静龙，濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京：高等教育出版社, 1998.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx