**Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(4), 368-390**
Published Online July 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64052

Hans汉斯

# Continuous Bounded Positive Solutions of Black-Scholes Equations with Multiple Singular Inner Boundary

**Xiaoqing Wu**

College of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu Sichuan
Email: wuxiaoqing_swpu@163.com

Received: Jul. 12th, 2016; accepted: Aug. 6th, 2016; published: Aug. 9th, 2016



## Abstract

**In this paper, the mathematical model is established of the Black Scholes equation in the region $\Omega: 0 < s < \infty, 0 < t < T$ with a number of singular inner boundary $s = s_j(t)$, $0 < t < T$, $j \in \{0,1,\cdots N\}$, and introduce the generalized characteristic function method to be able to obtain the exact solution of the mathematical model, and further to obtain singular boundary is exponential function curve $s_j(t) = s_{jT}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}$, $j \in \{0,1,\cdots,N\}$. It is proved that the maximum value of the exact solution $u(s,t)$ in the closed interval $[0, s_0(t)]$ is on the singular boundary $s_0(t)$, the maximum value in the interval $[s_N(t),\infty)$ is obtained on the singular boundary $s_N(t)$. In particular, consider the mathematical model with only a singular boundary, the maximum value in the interval $[0,\infty)$ of solution $u(s,t)$ on the singular boundary $s = s(t), 0 < t < T$ that is, $u(s(t),t) = \max_{0\le s<\infty} u(s,t)$. The free boundary problem of IIIA and IIIB about Black Scholes equation are all solved. At the same time to obtain exponential function curve $s(t) = s_T\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}$ of the free boundary, and singular boundary coincides, so the curve $s(t) = s_T\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}$ is American option implement best boundary.**

## Keywords

**Optimal Implementation Boundary, Free Boundary Problem, Singular Inner Boundary, Black-Scholes Equation**

文章引用: 吴小庆. 具有多条奇异内边界的 Black-Scholes 方程数学模型的连续有界正解[J]. 理论数学, 2016, 6(4): 368-390. http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64052

# 具有多条奇异内边界的Black-Scholes方程数学模型的连续有界正解

**吴小庆**

西南石油大学理学院，四川 成都
Email: wuxiaoqing_swpu@163.com

收稿日期：2016年7月12日；录用日期：2016年8月6日；发布日期：2016年8月9日

## 摘 要

**本文建立了Black-Scholes方程在区域$\Omega: 0<s<\infty$，$0<t<T$具有多条奇异内边界$s=s_j(t)$，$0<t<T$；$j\in\{0,1,\cdots,N\}$的数学模型，引入广义特征函数法获得了数学模型的精确解$u(s,t)$，并进一步获得奇异内边界是指数函数曲线$s_j(t)=s_{jT}e^{\sigma^2\omega(T-t)}$，$j\in\{0,1,\cdots,N\}$，证明了在任意时刻$t\in(0,T)$，函数$u(s,t)$在闭区间$[0,s_0(t)]$中的最大值在奇异内边界$s_0(t)$上取得，区间$[s_N(t),\infty)$中的最大值在奇异内边界$s_N(t)$上取得。特别地，考虑在区域$\Omega$内仅有一条奇异内边界$s=s(t)$，$0<t<T$的数学模型，获得了奇异内边界是指数函数曲线$s(t)=s_Te^{\sigma^2\omega(T-t)}$，证明了：解在奇异内边界$s=s(t)$，$0<t<T$取最大值，即$u(s(t),t)=\max\limits_{0\le s<\infty}u(s,t)$；且问题IIIA和IIIB的自由边界与奇异内边界重合，指数函数曲线$s(t)=s_Te^{\sigma^2\omega(T-t)}$就是美式期权最佳实施边界。**

## 关键词

**最佳实施边界，自由边界问题，奇异内边界，Black-Scholes方程**

## 1. 引言

美式期权合约中具有提前实施的条款，因此最佳实施边界的确定对于美式期权具有特殊意义。在美式期权定价研究中，需要研究Black-Scholes方程的自由边界问题。姜礼尚[1]依据偏微分方程理论对最佳实施边界$s=s(t),0<t<T$作了很多深入的研究，得到很多重要的结论。其中包括$s(T)$的位置，$s(t)$的单调性，$s(t)$的上下界以及$s(t)$的凸性等，并给出了$s(t)$在$t=T$附近的渐近表达式。这些结果增加了对最佳实施边界的认识，对美式期权定价的数值计祘产生了重要的影响。本文建立了Black-Scholes方程在区域$\Omega:0<s<\infty,0<t<T$具有多条奇异内边界$s=s_j(t),0<t<T;j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$的数学模型，引入广义特征函数法获得了数学模型的精确解$u(s,t)$的表达式。并获得奇异内边界的指数函数表达式$s_j(t)=s_{jT}e^{\sigma^2\omega(T-t)},j\in\{0,1,\cdots,N\}$，且满足$u(s_0(t),t)=\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}u(s,t)$，$u(s_N(t),t)=\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}u(s,t)$。特别地，考虑在$\Omega\cong\{(s,t)\,|\,0<s<\infty,0<t<T\}$内仅有一条奇异内边界$s=s(t),0<t<T$的数学模型，解在奇异内边界$s=s(t),0<t<T$取最大值，即$u(s(t),t)=\max\limits_{0\le s<\infty}u(s,t)$；同时获得了Black-Scholes方程的自由边界问题IIIA和自由边界问题IIIB的自由边界的表达式$s(t)=s_Te^{\sigma^2\omega(T-t)}$，问题IIIA和IIIB的自由边界与奇异内边界重合，奇异内边界就是美式期权最佳实施边界。

## 2. 主要结果

### 2.1. Black-Scholes 方程在区域 $\Omega: 0<s<\infty, 0<t<T$ 具有多条奇异内边界 $s=s_j(t), 0<t<T; j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$ 的终值问题数学模型 I 的研究

Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(r-q)s\frac{\partial u}{\partial s}-ru=-\sum_{j=0}^{N}f\left(s,t;s_j(t)\right), 0<s<\infty, 0<t<T \tag{0}$$

引入微分算子

$$L=\frac{\partial}{\partial s}\left(p(s)\frac{\partial}{\partial s}\right)-Q(s)$$

其中

$$p(s)=s^{-(2\omega-1)}, Q(s)=\frac{2rs^{-(2\omega+1)}}{\sigma^2}, \rho(s)=\frac{2}{\sigma^2}s^{-(2\omega+1)}, \omega=\frac{q-r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}$$

Black-Scholes 方程的等价形式是

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}Lu=-\sum_{j=0}^{N}f\left(s,t;s_j(t)\right), 0<s<\infty, 0<t<T \tag{0$'$}$$

于是得到数学模型 I(Black-Scholes 方程具有多条奇异内边界的终值问题)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho}Lu=-\displaystyle\sum_{j=0}^{N}f\left(s,t;s_j(t)\right), 0<s<\infty, 0<t<T & (1)\\ u(s,T)=\varphi(s), 0<s<\infty & (2)\\ \displaystyle\lim_{s\to0^+}|u|<\infty, \lim_{s\to\infty}|u|<\infty & (3)\end{cases}$$

其中：$\delta(s)$ 为 Dirac 函数；

$$f\left(s,t;s_j(t)\right)=\frac{\sigma^2\gamma_j(t)}{2}s^2\delta\left(s-s_j(t)\right), j\in\{0,1,2,\cdots,N\} \tag{4}$$

微分算子

$$L=\frac{\partial}{\partial s}\left(p(s)\frac{\partial}{\partial s}\right)-Q(s)$$
$$p(s)=s^{-(2\omega-1)}, Q(s)=\frac{2rs^{-(2\omega+1)}}{\sigma^2}, \rho(s)=\frac{2}{\sigma^2}s^{-(2\omega+1)}, \omega=\frac{q-r}{\sigma^2}+\frac{1}{2} \tag{5}$$

数学模型 I.1(Black-Scholes 方程的终值问题)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho}Lu=0, 0<s<\infty, 0<t<T\\ u(s,T)=\varphi(s), 0<s<\infty\\ \displaystyle\lim_{s\to0^+}|u|<\infty, \lim_{s\to\infty}|u|<\infty\end{cases} \tag{6}$$

数学模型 I.2 (Black-Scholes 方程具有多条奇异内边界带齐次终值条件的终值问题)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho}Lu=-\sum_{j=0}^{N} f\left(s,t;s_j\left(t\right)\right), 0<s<\infty, 0<t<T \\ u\left(s,T\right)=0, 0<s<\infty \\ \lim_{s\to 0^+}\left|u\right|<\infty, \lim_{s\to\infty}\left|u\right|<\infty \end{cases} \tag{7}$$

### 2.1.1. Black-Scholes 方程在区域 $\Omega: 0<s<\infty, 0<t<T$ 具有多条奇异内边界 $s=s_j\left(t\right), 0<t<T; j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$ 的终值问题的数学模型 I 的结果

记 $s_j\left(T\right)\cong s_{jT}, j\in\{0,1,\cdots,N\}, \Sigma: 0<s<\infty, \Omega: 0<s<\infty, 0<t<T$

**定理 1** (具有多条奇异内边界的 Black-Scholes 方程终值问题解的存在定理)：若 $s_j\left(t\right), t\in\left[0,T\right]$ 为充分光滑的单调函数，$\gamma_j\left(t\right)\in C\left(\left[0,T\right]\right), j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$，$\varphi\left(s\right)\in C\left(\Sigma\right)$，则数学模型 I 有精确解：

$$u\left(s,t\right)=v\left(s,t\right)+w\left(s,t\right)$$

$$v\left(s,t\right)=\frac{e^{-r\left(T-t\right)}}{\sigma\sqrt{2\pi\left(T-t\right)}}\int_0^{\infty}\frac{\varphi\left(\zeta\right)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega\left(T-t\right)\right]^2}{2\sigma^2\left(T-t\right)}}d\zeta \tag{8}$$

$$w\left(s,t\right)=\frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_t^T\frac{\gamma_j\left(\xi\right)s_j\left(\xi\right)e^{-r\left(\xi-t\right)}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j\left(\xi\right)}-\sigma^2\omega\left(\xi-t\right)\right]^2}{2\sigma^2\left(\xi-t\right)}}d\xi \tag{9}$$

其中(8)式是数学模型 I.1 的解；(9)式是数学模型 I.2 的解。

**附注 1：** 数学模型 I.1 中，$\varphi\left(s\right)\in C\left(\Sigma\right)$ 的条件可以削弱，$\varphi\left(s\right)$ 可以是广义函数，公式仍成立。例如，若 $\varphi\left(s\right)=\delta\left(s-\xi\right), 0<s<\infty, 0<\xi<\infty$，利用 $\delta$-函数的积分性质即有

$$v\left(s,t\right)=\frac{e^{-r\left(T-t\right)}}{\sigma\sqrt{2\pi\left(T-t\right)}}\int_0^{\infty}\frac{\delta\left(\zeta-\xi\right)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega\left(T-t\right)\right]^2}{2\sigma^2\left(T-t\right)}}d\zeta=\frac{e^{-r\left(T-t\right)}}{\xi\sigma\sqrt{2\pi\left(T-t\right)}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\xi}-\sigma^2\omega\left(T-t\right)\right]^2}{2\sigma^2\left(T-t\right)}}, \quad \omega=\frac{q-r}{\sigma^2}+\frac{1}{2} \tag{10}$$

上式的结果与文献[1]中 132 页的结果完全一致。

**附注 2：** 数学模型 I.2 中 $s_j\left(t\right)\in C^2\left(\left[0,T\right]\right), \gamma_j\left(t\right)\in C\left(\left[0,T\right]\right), j\in\{0,1,2,\cdots,N\}$ 由公式(9)利用换元积分法，令 $\varsigma=\sqrt{\xi-t}$ 可以得到

$$\begin{aligned} w\left(s,t\right)&=\frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_t^T\frac{\gamma_j\left(\xi\right)s_j\left(\xi\right)e^{-r\left(\xi-t\right)}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j\left(\xi\right)}-\sigma^2\omega\left(\xi-t\right)\right]^2}{2\sigma^2\left(\xi-t\right)}}d\xi \\ &=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_0^{\sqrt{T-t}}\gamma_j\left(\varsigma^2+t\right)s_j\left(\varsigma^2+t\right)e^{-r\varsigma^2}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j\left(\varsigma^2+t\right)}-\sigma^2\omega\varsigma^2\right]^2}{2\sigma^2\varsigma^2}}d\varsigma \end{aligned}$$

再利用积分中值定理，当 $t\to T$，有 $w\left(s,T\right)=0$，满足齐次终值条件。$\gamma_j\left(t\right)$ 也可以是广义函数，公式仍成立。例如，$\gamma_j\left(t\right)=v_j\delta\left(t-T\right), j\in\{0,1,2,\cdots,N\}, 0<t<T$，由公式(9)立即可得

$$
\begin{aligned}
w(s,t) &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{N} \int_t^T \frac{\nu_j \delta(\xi - T) s_j(\xi) \mathrm{e}^{-r(\xi - t)}}{\sqrt{\xi - t}} \mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln \frac{s}{s_j(\xi)} - \sigma^2 \omega (\xi - t)\right]^2}{2\sigma^2 (\xi - t)}} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{N} \frac{\nu_j s_j(T) \mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{T-t}} \mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln \frac{s}{s_j(T)} - \sigma^2 \omega (T - t)\right]^2}{2\sigma^2 (T - t)}}
\end{aligned} \tag{11}
$$

### 2.1.2. Black-Scholes 方程数学模型 I 的求解过程

先考虑特征值问题

$$
\begin{cases} LE = -\lambda \rho(s) E, 0 < s < \infty \\ \lim\limits_{s \to 0^+} \left| s^{-\omega} E \right| < \infty, \lim\limits_{s \to \infty} \left| s^{-\omega} E \right| < \infty, \end{cases} \tag{12}
$$

这是关于尤拉方程在半无界区间的奇异施图姆-刘维尔问题。

尤拉方程的特解形式为 $E = s^{\alpha}$，代入方程即有

特征根

$$
\alpha_{\pm}^{*} = \omega \pm i \sqrt{\frac{2(\lambda - r)}{\sigma^2} - \omega^2}, \omega = \frac{q - r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \tag{13}
$$

即有

$$
\begin{aligned}
&\alpha^{*} = \omega \pm i|\beta|, |\beta| = \sqrt{\frac{2(\lambda - r)}{\sigma^2} - \omega^2} \\
&\alpha^{*} = \alpha^{*}{}_{\beta} = \omega + i\beta, \beta \in (-\infty, \infty)
\end{aligned} \tag{14}
$$

于是得到特征值

$$
\lambda = \lambda_{\beta} = \frac{\sigma^2 \beta^2 + \sigma^2 \omega^2}{2} + r \tag{15}
$$

特征函数

$$
E = E_{\beta} = s^{\omega} s^{i\beta}, \beta \in (-\infty, \infty) \tag{16}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} E_{\beta}(s) \bar{E}_{\beta'}(s) \rho(s) \mathrm{d}s &= \int_0^{\infty} s^{\frac{2\left(\frac{\sigma^2}{2} + q - r\right)}{\sigma^2}} s^{i(\beta - \beta')} \frac{2}{\sigma^2} s^{\frac{2(r-q)}{\sigma^2} - 2} \mathrm{d}s = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} s^{i(\beta - \beta')} s^{-1} \mathrm{d}s = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{i(\beta - \beta') \ln s} s^{-1} \mathrm{d}s \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i(\beta - \beta') x} \mathrm{d}x = \frac{4\pi}{\sigma^2} \delta(\beta - \beta')
\end{aligned}
$$

即知特征函数系是半无界区间 $[0, \infty)$ 上带权函数 $\rho(s)$ 的正交系。

正交关系

$$
\int_0^{\infty} E_{\beta}(s) \bar{E}_{\beta'}(s) \rho(s) \mathrm{d}s = \frac{4\pi}{\sigma^2} \delta(\beta - \beta'), \beta' \in (-\infty, \infty), \beta \in (-\infty, \infty) \tag{17}
$$

将定义在 $[0, \infty)$ 的连续函数 $W(s)$ 可以展为特征函数的积分形式

$$
W(s) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\beta} E_{\beta}(s) \mathrm{d}\beta \tag{18}
$$

由正交关系

$$\int_0^\infty W(s)\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^\infty U_\omega\int_0^\infty E_\beta(s)\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\beta=\int_{-\infty}^\infty U_\beta\frac{4\pi}{\sigma^2}\delta(\beta-\beta')\mathrm{d}\beta=\frac{4\pi}{\sigma^2}U_{\beta'}$$

$$U_{\beta'}=\frac{\sigma^2}{4\pi}\int_0^\infty W(s)\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)\mathrm{d}s$$

$$U_\beta=\frac{\sigma^2}{4\pi}\int_0^\infty W(s)\bar{E}_\beta(s)\rho(s)\mathrm{d}s \tag{19}$$

由(18)，(19)这一对关系式可以引入广义特征函数法[2] [3]求解 Black-Scholes 方程数学模型 I。由(18)将模型 I 解表为

$$u(s,t)=\int_{-\infty}^\infty U_\beta(t)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{20}$$

由(19)则有

$$U_\beta(t)=\frac{\sigma^2}{4\pi}\int_0^\infty u(s,t)\bar{E}_\beta(s)\rho(s)\mathrm{d}s \tag{21}$$

$$\sum_{j=0}^N f\left(s,t;s_j(t)\right)=\int_{-\infty}^\infty f_\beta(t)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{22}$$

$$f_\beta(t)=\frac{\sigma^2}{4\pi}\sum_{j=0}^N\int_0^\infty\frac{\sigma^2\gamma_j(t)}{2}s^2\delta\left(s-s_j(t)\right)\bar{E}_\beta(s)\rho(s)\mathrm{d}s=\frac{\sigma^4}{8\pi}\sum_{j=0}^N\gamma_j(t)s_j^2(t)s_j^\omega(t)s_j^{-i\beta}(t)\frac{2}{\sigma^2}s_j^{-(2\omega+1)}(t)$$

$$f_\beta(t)=\frac{\sigma^2}{4\pi}\sum_{j=0}^N\gamma_j(t)s_j^{1-\omega}(t)s_j^{-i\beta}(t) \tag{23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_{-\infty}^\infty U'_\beta(t)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{24}$$

$$\frac{1}{\rho}Lu=\int_{-\infty}^\infty U_\beta(t)\frac{1}{\rho}LE_\beta(s)\mathrm{d}\beta=-\int_{-\infty}^\infty U_\beta(t)\lambda_\beta E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{25}$$

将(22)，(24)，(25)三式代入方程(1)则有

$$\int_{-\infty}^\infty U'_\beta(t)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta-\int_{-\infty}^\infty U_\beta(t)\lambda_\beta E_\beta(s)\mathrm{d}\beta=-\int_{-\infty}^\infty f_\beta(t)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta$$

$$\int_{-\infty}^\infty\left[U'_\beta(t)-\lambda_\beta U_\beta(t)+f_\beta(t)\right]E_\beta(s)\mathrm{d}\beta=0 \tag{26}$$

于是

$$U'_\beta(t)-\lambda_\beta U_\beta(t)+f_\beta(t)=0 \tag{27}$$

由(2)式和(20)，(21)有

$$\varphi(s)=\int_{-\infty}^\infty U_\beta(T)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{28}$$

$$U_\beta(T)\cong\varphi_\beta=\frac{\sigma^2}{4\pi}\int_0^\infty\varphi(\zeta)\bar{E}_\beta(\zeta)\rho(\zeta)\mathrm{d}\zeta \tag{29}$$

得到关于$U_\beta(t)$的非齐次常微分方程的终值问题

$$\begin{cases}U'_\beta(t)-\lambda_\beta U_\beta(t)=-f_\beta(t),0<t<T & (30)\\ U_\beta(T)=\varphi_\beta & (31)\end{cases}$$

先求对应的齐次常微分方程

$$U'_\beta(t)-\lambda_\beta U_\beta(t)=0 \tag{32}$$

的通解。

$$\int\frac{\mathrm{d}U_\beta(t)}{U_\beta(t)}=\int\lambda_\beta\mathrm{d}t,\ \ln U_\beta(t)=\lambda_\beta t+\ln C,\ U_\beta(t)=C\mathrm{e}^{\lambda_\beta t} \tag{33}$$

用常数变易法求解非齐次常微分方程的终值问题。设满足非齐次常微分方程通解形式为

$$U_\beta(t)=C(t)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)} \tag{34}$$

其中为$C(t)$待求函数。

$$U'_\beta(t)=C'(t)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}+\lambda_\beta C(t)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}$$

将上式代入非齐次常微分方程(30)即有

$$C'(t)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}+\lambda_\beta C(t)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}-\lambda_\beta C(t)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}=-f_\beta(t)$$

$$C'(t)=-f_\beta(t)\mathrm{e}^{\lambda_\beta(T-t)} \tag{35}$$

对上式在区间$[t,T]$上积分

$$C(T)-C(t)=-\int_t^T f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_\beta(T-\xi)}\mathrm{d}\xi$$

$$C(t)=C(T)+\int_t^T f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_\beta(T-\xi)}\mathrm{d}\xi \tag{36}$$

再将上式代入(34) 式即有

$$U_\beta(t)=\left[C(T)+\int_t^T f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_\beta(T-\xi)}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)} \tag{37}$$

利用(31)即有

$$U_\beta(t)=\varphi_\beta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}+\int_t^T f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(\xi-t)}\mathrm{d}\xi \tag{38}$$

将上式代入(20)式即有

$$\begin{aligned}u(s,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_\beta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}+\int_t^T f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(\xi-t)}\mathrm{d}\xi\right]E_\beta(s)\mathrm{d}\beta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\beta\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}E_\beta(s)\mathrm{d}\beta+\int_t^T\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(\xi-t)}E_\beta(s)\mathrm{d}\beta\end{aligned} \tag{39}$$

其中$\varphi_\beta$由(29)， $f_\beta(t)$由(23)确定，即有

$$u(s,t)=v(s,t)+w(s,t) \tag{40}$$

$$v(s,t)=\mathrm{e}^{-\left[\frac{\sigma^2\omega^2}{2}+r\right](T-t)}s^\omega\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\beta\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\beta^2}{2}(T-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln s}\mathrm{d}\beta \tag{40.1}$$

$$w(s,t)=s^\omega\int_t^T\mathrm{e}^{-\left(\frac{\sigma^2\omega^2}{2}+r\right)(\xi-t)}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\beta^2}{2}(\xi-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln s}\mathrm{d}\beta \tag{40.2}$$

又

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\beta^2}{2}(\xi-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln s}\mathrm{d}\beta=\frac{\sigma^2}{4\pi}\sum_{j=0}^{N}\gamma_j(\xi)s_j^{1-\omega}(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\beta^2}{2}(\xi-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln\frac{s}{s_j(\xi)}}\mathrm{d}\beta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\beta^2}{2}(\xi-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln\frac{s}{s_j(\xi)}}\mathrm{d}\beta=\left(\frac{2\pi}{\sigma^2(\xi-t)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j(\xi)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} \tag{41}$$

利用 $\varphi_\beta$ 的表达式(29)即有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\beta \mathrm{e}^{-\frac{\beta^2\sigma^2}{2}(T-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln s}\mathrm{d}\beta &= \frac{\sigma^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi(\zeta)\bar{E}_\beta(\zeta)\rho(\zeta)\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2\sigma^2}{2}(T-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln s}\mathrm{d}\beta \\ &= \frac{\sigma^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi(\zeta)\zeta^{\omega}\zeta^{-i\beta}\frac{2}{\sigma^2}\zeta^{-(2\omega+1)}\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2\sigma^2}{2}(T-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln s}\mathrm{d}\beta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\zeta)\zeta^{\omega}\zeta^{-(2\omega+1)}\mathrm{d}\zeta\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2\sigma^2}{2}(T-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln\frac{s}{\zeta}}\mathrm{d}\beta\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\beta \mathrm{e}^{-\frac{\beta^2\sigma^2}{2}(T-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln s}\mathrm{d}\beta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{\infty}\varphi(\zeta)\zeta^{\omega}\zeta^{-(2\omega+1)}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{42}$$

将(41)，(42)代入(40)得到

$$v(s,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{43}$$

$$\begin{aligned}w(s,t) &= s^{\omega}\int_t^T \mathrm{e}^{-\left(\frac{\sigma^2\omega^2}{2}+r\right)(\xi-t)}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\beta^2}{2}(\xi-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln s}\mathrm{d}\beta \\ &= \frac{\sigma^2 s^{\omega}}{4\pi}\sum_{j=0}^{N}\int_t^T\gamma_j(\xi)s_j^{1-\omega}(\xi)\mathrm{e}^{-\left[\frac{\sigma^2\omega^2}{2}+r\right](\xi-t)}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\beta^2}{2}(\xi-t)}\mathrm{e}^{i\beta\ln\frac{s}{s_j(\xi)}}\mathrm{d}\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w(s,t) &= \frac{\sigma^2 s^{\omega}}{4\pi}\sum_{j=0}^{N}\int_t^T\gamma_j(\xi)s_j^{1-\omega}(\xi)\mathrm{e}^{-\left[\frac{\sigma^2\omega^2}{2}+r\right](\xi-t)}\left(\frac{2\pi}{\sigma^2(\xi-t)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j(\xi)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_t^T\frac{\gamma_j(\xi)s_j(\xi)\mathrm{e}^{\frac{2\sigma^2(\xi-t)\omega\ln\left(\frac{s}{s_j}\right)}{2\sigma^2(\xi-t)}}}{\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\left[\frac{\sigma^2\omega^2}{2}+r\right](\xi-t)}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j(\xi)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_t^T\frac{\gamma_j(\xi)s_j(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\left[\frac{\sigma^2\omega^2}{2}+r\right](\xi-t)}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j(\xi)}\right]^2-2\sigma^2(\xi-t)\omega\ln\left(\frac{s}{s_j}\right)+\left[\sigma^2(\xi-t)\omega\right]^2-\left[\sigma^2(\xi-t)\omega\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$w(s,t) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_t^T\frac{\gamma_j(\xi)s_j(\xi)\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}}{\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j(\xi)}-\sigma^2\omega(\xi-t)\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{44}$$

即数学模型 I (Black-Scholes 方程具有多条奇异内边界 $s = s_j(t), 0 < t < T; j \in \{0,1,2,\cdots,N\}$ 的终值问题)的解

$$u(s,t) = v(s,t) + w(s,t) \tag{45}$$

其中：$v(s,t)$ 由(43)式给出，$w(s,t)$ 由(44)式给出。

### 2.1.3. Black-Scholes 方程 N+1 条奇异内边界的确定

**定解问题 II** (Black-Scholes 方程确定 N+1 条奇异内边界的数学模型)：

求 $\{w(s,t), s_j(t), j \in \{0,1,\cdots,N\}\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho}Lw=-\sum\limits_{j=0}^{N}f\left(s,t;s_j\left(t\right)\right),0<s<\infty,0<t<T & (46)\\ w\left(s,T\right)=0,0<s<\infty & (47)\\ w\left(s_0\left(t\right),t\right)=\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}w\left(s,t\right)=\phi_0\left(t\right),w\left(s_N\left(t\right),t\right)=\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}w\left(s,t\right)=\phi_N\left(t\right) & (48)\\ \dfrac{\partial w}{\partial s}\left(s_0\left(t\right),t\right)=\upsilon_0\left(t\right),\dfrac{\partial w}{\partial s}\left(s_N\left(t\right),t\right)=\upsilon_N\left(t\right),0<t<T & (49)\\ \lim\limits_{s\to0^+}\left|w\right|<\infty,\lim\limits_{s\to\infty}\left|w\right|<\infty & (50)\end{cases}$$

**定理 2:** 若 $\gamma_j\left(t\right)\in C\left(\left[0,T\right]\right),\gamma_j\left(t\right)>0,j\in\left\{0,1,2,\cdots,N\right\}$；$s_j\left(t\right)$ 为充分光滑的单调函数，$s_j\left(t\right)<s_{j+1}\left(t\right)$，$j\in\left\{0,1,\cdots,N-1\right\}$，则定解问题 II 有连续有界的精确解

$$\begin{cases}w\left(s,t\right)=\dfrac{\sigma e^{rt}e^{\sigma^2\omega T}}{2\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{j=0}^{N}s_j\left(T\right)\int_t^T\dfrac{\gamma_j\left(\xi\right)e^{-\left(r+\sigma^2\omega\right)\xi}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega\left(T-t\right)-\ln s_j\left(T\right)\right]^2}{2\sigma^2\left(\xi-t\right)}}d\xi & (51)\\ s_j\left(t\right)=s_{jT}e^{\sigma^2\omega\left(T-t\right)},j\in\left\{0,1,\cdots,N\right\},s_{jT}<s_{iT},j<i & (52)\end{cases}$$

问题 II 有解的相容性条件是

$$\begin{cases}\upsilon_0\left(t\right)=\dfrac{-1}{2\sigma s_{0T}\sqrt{2\pi}e^{\sigma^2\omega\left(T-t\right)}}\sum\limits_{j=0}^{N}\left[s_{jT}\ln\dfrac{s_{0T}}{s_{jT}}\right]\int_t^T\dfrac{e^{-r\left(\xi-t\right)}\gamma_j\left(\xi\right)e^{\sigma^2\omega\left(T-\xi\right)}}{\left(\xi-t\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{0T}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2\left(\xi-t\right)}}d\xi & (53)\\ \upsilon_N\left(t\right)=\dfrac{-1}{2\sigma s_{NT}\sqrt{2\pi}e^{\sigma^2\omega\left(T-t\right)}}\sum\limits_{j=0}^{N}\left[s_{jT}\ln\dfrac{s_{NT}}{s_{jT}}\right]\int_t^T\dfrac{e^{-r\left(\xi-t\right)}\gamma_j\left(\xi\right)e^{\sigma^2\omega\left(T-\xi\right)}}{\left(\xi-t\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{NT}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2\left(\xi-t\right)}}d\xi & (54)\\ \phi_0\left(t\right)=\dfrac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{j=0}^{N}s_{jT}\int_t^T\dfrac{e^{-r\left(\xi-t\right)}\gamma_j\left(\xi\right)e^{\sigma^2\omega\left(T-\xi\right)}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{0T}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2\left(\xi-t\right)}}d\xi,\phi_0\left(T\right)=0 & (55)\\ \phi_N\left(t\right)=\dfrac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{j=0}^{N}s_{jT}\int_t^T\dfrac{e^{-r\left(\xi-t\right)}\gamma_j\left(\xi\right)e^{\sigma^2\omega\left(T-\xi\right)}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{NT}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2\left(\xi-t\right)}}d\xi,\phi_N\left(T\right)=0 & (56)\end{cases}$$

其中 $s_j\left(t\right)=s_{jT}e^{\sigma^2\omega\left(T-t\right)},j\in\left\{0,1,\cdots,N\right\},s_{jT}<s_{iT},j<i$。

**证明**：数学模型 I.2 的解即(51)，记为

$$w\left(s,t\right)=\frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_t^T\frac{e^{-r\left(\xi-t\right)}\gamma_j\left(\xi\right)s_j\left(\xi\right)}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j\left(\xi\right)}-\sigma^2\omega\left(\xi-t\right)\right]^2}{2\sigma^2\left(\xi-t\right)}}d\xi \tag{57}$$

它已满足(46)，(47)，(50)三式。由(57)对 $s$ 求偏导，

$$\frac{\partial w}{\partial s}\left(s,t\right)=\frac{-1}{2\sigma s\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\int_t^T\frac{e^{-r\left(\xi-t\right)}\gamma_j\left(\xi\right)s_j\left(\xi\right)\left[\ln\frac{s}{s_j\left(\xi\right)}-\sigma^2\omega\left(\xi-t\right)\right]}{\left(\xi-t\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j\left(\xi\right)}-\sigma^2\omega\left(\xi-t\right)\right]^2}{2\sigma^2\left(\xi-t\right)}}d\xi \tag{58}$$

$$\ln\frac{s}{s_j(\xi)}-\sigma^2\omega(\xi-t)=\ln\frac{s}{s_j(\xi)}-\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}+\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}-\sigma^2\omega(\xi-t)=\ln\frac{s}{s_j(t)}+\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}-\sigma^2\omega(\xi-t) \quad (59)$$

若令

$$\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}-\sigma^2\omega(\xi-t)=0,\forall\xi\in(t,T],t\in(0,T],j\in\{0,1,\cdots,N\} \quad (60)$$

则有

$$\ln\frac{s}{s_j(\xi)}-\sigma^2\omega(\xi-t)=\ln\frac{s}{s_j(t)},\forall\xi\in(t,T],t\in(0,T],j\in\{0,1,\cdots,N\} \quad (61)$$

下面建立四个引理 2.1~引理 2.4 来完成定理 2 的证明。

**引理 2.1**：若 $s_j(t)<s_i(t),i>j,j\in\{0,1,\cdots,N-1\}$ 且(60)式成立，则有

$$w(s_0(t),t)=\max_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t),w(s_N(t),t)=\max_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)。$$

**证明**：若 $s_0(t)<s_j(t)<s_N(t),j\in\{1,2,\cdots,N-1\}$ 且(60)成立，有(61)成立，再由(58)，则有

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s,t)=\frac{-1}{2\sigma s\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\left[\ln\frac{s}{s_j(t)}\right]\int_t^T\frac{e^{-r(\xi-t)}\gamma_j(\xi)s_j(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_j(t)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi \quad (62)$$

1) $0<s<s_0(t)$，

由 $0<s<s_0(t)<s_j(t)<s_N(t),j\in\{1,\cdots,N-1\}$，

$$1>\frac{s}{s_0(t)}>\frac{s}{s_j(t)}>\frac{s}{s_N(t)},0>\ln\frac{s}{s_0(t)}>\ln\frac{s}{s_j(t)}>\ln\frac{s}{s_N(t)},j\in\{1,\cdots,N-1\}$$

即当 $0<s<s_0(t)$ 有 $\ln\frac{s}{s_j(t)}<0,j\in\{0,1,\cdots,N\}$；再由(62)式即有 $\frac{\partial w}{\partial s}(s,t)>0,0<s<s_0(t)$，从而 $w(s_0(t),t)=\max_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t)$。

2) $s_N(t)<s<\infty$

由 $0<s_0(t)<s_j(t)<s_N(t)<s<\infty,j\in\{1,\cdots,N-1\}$，$0<\frac{s_0(t)}{s}<\frac{s_j(t)}{s}<\frac{s_N(t)}{s}<1$，$\ln\frac{s}{s_0(t)}>\ln\frac{s}{s_j(t)}>\ln\frac{s}{s_N(t)}>0$，

当 $s_N(t)<s<\infty$，有 $\ln\frac{s}{s_j(t)}>0,j\in\{0,1,\cdots,N\}$；再由(62)式即有 $\frac{\partial w}{\partial s}(s,t)<0,s_N(t)<s<\infty$，从而 $w(s_N(t),t)=\max_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)$。

**引理 2.2**：(60)式：$\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}-\sigma^2\omega(\xi-t)=0,\forall\xi\in(t,T],t\in(0,T],j\in\{0,1,\cdots,N\}$ 成立的充要条件为

$$s_j(t)=s_{jT}e^{\sigma^2\omega(T-t)},j\in\{0,1,\cdots,N\} \quad (63)$$

**证明**：1) 必要性：若(60)式成立，

由 $\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}=\sigma^2\omega(\xi-t)$，即有 $\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}=\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(\xi-t)},\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}=\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(\xi-t)}=\frac{\mathrm{e}^{\sigma^2\omega\xi}}{\mathrm{e}^{\sigma^2\omega t}}$，

故

$$s_j(t)\mathrm{e}^{\sigma^2\omega t}=s_j(\xi)\mathrm{e}^{\sigma^2\omega\xi},\forall\xi\in(t,T],t\in(0,T],j\in\{0,1,\cdots,N\} \tag{64}$$

记

$$s_j(t)\mathrm{e}^{\sigma^2\omega t}\cong I_j(t),j\in\{0,1,\cdots,N\} \tag{65}$$

由(64)式即知

$$I_j(t)=I_j(\xi),\forall\xi\in(t,T],t\in(0,T],j\in\{0,1,\cdots,N\} \tag{66}$$

让 $\xi=T$ 即有

$$s_j(t)\mathrm{e}^{\sigma^2\omega t}=I_j(T)=s_{jT}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega T},j\in\{0,1,\cdots,N\} \tag{67}$$

干是有(63)式成立。

2) 充分性：由(63)式成立，则

$$\begin{aligned}&\forall j\in\{0,1,\cdots,N\}\\&\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}-\sigma^2\omega(\xi-t)=\ln\frac{s_{jT}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}}{s_{jT}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}-\sigma^2\omega(\xi-t)=\ln\frac{\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}}{\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}-\sigma^2\omega(\xi-t)\\&\qquad=\sigma^2\omega(T-t)-\sigma^2\omega(T-\xi)-\sigma^2\omega(\xi-t)\equiv 0\end{aligned}$$

即(60)式成立。

**引理 2.3：** 若 $s_j(t),j\in\{0,1,\cdots,N\}$ 由(63)式给出，条件 $s_j(t)<s_i(t),i>j,j\in\{0,1,\cdots,N-1\}$ 与条件 $s_{jT}<s_{iT},i>j,j\in\{0,1,\cdots,N-1\}$ 等价。

**引理 2.4：** 若 $s_j(t),j\in\{0,1,\cdots,N\}$ 由(63)式给出，且 $s_j(t)<s_i(t),i>j,j\in\{0,1,\cdots,N-1\}$，则有 $w(s_0(t),t)=\max_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t)$，$w(s_N(t),t)=\max_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)$。

**证明：** 若 $s_j(t),j\in\{0,1,\cdots,N\}$ 由(63)式给出，且 $s_{jT}<s_{iT},i>j,j\in\{0,1,\cdots,N-1\}$，由引理 2.3 推出引理 2.1 的条件成立，从而由引理 2.1 得到 $w(s_0(t),t)=\max_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t)$，$w(s_N(t),t)=\max_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)$。

由(48)，(49)，(57)，(62)，(63)式容易验证问题 II 有解的相容性条件是(53)~(56)式。(63)式代入(57)式即有(51)式。证毕。

**自由边界问题 IIA** (Black-Scholes 方程在区域 $0<s<s_0(t),0<t<T$ 上的齐次终值条件的自由边界问题)：

求 $\{w(s,t),s_0(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\rho}Lw=0,0<s<s_0(t),0<t<T\\ w(s,T)=0,0<s<s_1(T)\\ w(s_0(t),t)=\max_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t)=\phi_0(t)\\ \frac{\partial w}{\partial s}(s_0^-(t),t)=\upsilon_0(t),0<t<T\\ \lim_{s\to 0^+}|w|<\infty\end{cases} \tag{68}$$

**推论 2.1** (Black-Scholes 方程在区域 $0<s<s_0(t), 0<t<T$ 上的自由边界问题)：若

1) $\gamma_j(t)\in C^1([0,T]), \gamma_j(t)>0, j\in\{0,1,\cdots,N\}$，

2) $s_j(t)=s_{jT}e^{\sigma^2\omega(T-t)}, j\in\{1,\cdots,N\}; s_{jT}<s_{iT}, i>j$

则自由边界问题 IIA 的连续有界的精确解为

$$\begin{cases} w(s,t)=\dfrac{\sigma e^{rt}e^{\sigma^2\omega T}}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}s_j(T)\int_t^T\frac{\gamma_j(\xi)e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_{jT}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi & (69)\\ s_0(t)=s_{0T}e^{\sigma^2\omega(T-t)}, s_{0T}<s_{1T} & (70)\end{cases}$$

有解的相容性条件为

$$\begin{cases} \upsilon_0(t)=-\dfrac{1}{2\sigma s_{0T}\sqrt{2\pi}e^{\sigma^2\omega(T-t)}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\left[s_{jT}\ln\frac{s_{0T}}{s_{jT}}\right]\int_t^T\frac{e^{-r(\xi-t)}\gamma_j(\xi)e^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{0T}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi & (71)\\ \phi_0(t)=\dfrac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}s_{jT}\int_t^T\frac{e^{-r(\xi-t)}\gamma_j(\xi)e^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{0T}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi, \phi_0(T)=0 & (72)\end{cases}$$

**自由边界问题 IIB** (Black-Scholes 方程在区域 $s_N(t)<s<\infty, 0<t<T$ 上的齐次终值条件的自由边界问题)：求 $\{w(s,t), s_N(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho}Lw=0, s_N(t)<s<\infty, 0<t<T\\ w(s,T)=0, s_N(T)<s<\infty\\ w(s_N(t),t)=\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)=\phi_N(t)\\ \dfrac{\partial w}{\partial s}(s_N(t),t)=\upsilon_N(t)\\ \lim\limits_{s\to\infty}|w|<\infty\end{cases} \quad (73)$$

**推论 2.2** (Black-Scholes 方程在区域 $s_N(t)<s<\infty, 0<t<T$ 上的自由边界问题 IIB)：若

1) $\gamma_j(t)\in C^1([0,T]), \gamma_j(t)>0, j\in\{0,1,\cdots,N\}$，

2) $s_j(t)=s_{jT}e^{\sigma^2\omega(T-t)}, j\in\{0,1,\cdots,N-1\}, s_{jT}<s_{iT}, i>j$；

则自由边界问题 IIB 的连续有界的精确解为

$$\begin{cases} w(s,t)=\dfrac{\sigma e^{rt}e^{\sigma^2\omega T}}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}s_{jT}\int_t^T\frac{\gamma_j(\xi)e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_{jT}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi & (74)\\ s_N(t)=s_{NT}e^{\sigma^2\omega(T-t)}, s_{NT}>s_{N-1,T} & (75)\end{cases}$$

有解的相容性条件为

$$\begin{cases} \upsilon_N(t) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma s_N(T)\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\left[s_{jT}\ln\frac{s_{NT}}{s_{jT}}\right]\int_t^T\frac{\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{NT}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi & (76) \\ \phi_N(t) = \dfrac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}s_{jT}\int_t^T\frac{\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{NT}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi,\phi_N(T)=0 & (77) \end{cases}$$

**引理 2.5：** 若 $s_j(t) = s_{jT}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}, j\in\{0,1,\cdots,N\}$，且 $\varphi(s)\in C([0,\infty))$

1) 当 $s\in(s_{0T},s_{NT})$，$\varphi(s)>0$，当 $s\in(0,s_{0T}]\cup[s_{NT},\infty)$，$\varphi(s)\equiv 0$；则数学模型 I.1 (Black-Scholes 方程的终值问题)的解

$$v(s,t) = \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{78}$$

且解 $v(s,t)$ 满足 $\max\limits_{0\le s\le s_0(t)} v(s,t) = v(s_0(t),t)$，$\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty} v(s,t) = v(s_N(t),t)$。

2) 当 $s\in(s_{0T},\infty)$，$\varphi(s)>0$，当 $s\in(0,s_{0T}]$，$\varphi(s)\equiv 0$；则数学模型 I.1 (Black-Scholes 方程的终值问题)的解

$$v_A(s,t) = \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{79}$$

且解 $v_A(s,t)$ 满足 $\max\limits_{0\le s\le s_0(t)} v(s,t) = v(s_0(t),t)$。

3) 当 $s\in(0,s_{NT})$，$\varphi(s)>0$，当 $s\in[s_{NT},\infty)$，$\varphi(s)\equiv 0$；则数学模型 I.1 (Black-Scholes 方程的终值问题)的解

$$v_B(s,t) = \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{0}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{80}$$

且解 $v_B(s,t)$ 满足 $\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty} v(s,t) = v(s_N(t),t)$。

**证明：** 1) 当 $s\in(s_{0T},s_{NT})$，$\varphi(s)>0$，当 $s\in(0,s_{0T}]\cup[s_{NT},\infty)$，$\varphi(s)\equiv 0$；由数学模型 I.1 (Black-Scholes 方程的终值问题)的解(8)式即有

$$v(s,t) = \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{81}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,t) = \frac{-\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma s\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]}{\sigma^2(T-t)}\mathrm{d}\zeta \tag{82}$$

$$s_{NT} > \zeta > s_{0T}, \ln\frac{s_{0T}}{\zeta} < 0, \ln\frac{s_{NT}}{\zeta} > 0 \tag{83}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,t)=\frac{-e^{-r(T-t)}}{\sigma s\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\ln\frac{s_0(t)}{\zeta}+\ln\frac{s_0(t)}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\ln\frac{s_0(t)}{\zeta}+\ln\frac{s_0(t)}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]}{\sigma^2(T-t)}d\zeta$$

$$=\frac{-e^{-r(T-t)}}{\sigma s\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_0(t)}+\ln\frac{s_{0T}}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{s_0(t)}+\ln\frac{s_{0T}}{\zeta}\right]}{\sigma^2(T-t)}d\zeta \tag{84}$$

当 $0<s<s_0(t)$ 有 $\ln\frac{s}{s_0(t)}+\ln\frac{s_{0T}}{\zeta}<0$，由(84)式有 $\frac{\partial v}{\partial s}(s,t)>0$，从而 $\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}v(s,t)=v(s_0(t),t)$。

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,t)=\frac{-e^{-r(T-t)}}{\sigma s\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\ln\frac{s_N(t)}{\zeta}+\ln\frac{s_N(t)}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\ln\frac{s_N(t)}{\zeta}+\ln\frac{s_N(t)}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]}{\sigma^2(T-t)}d\zeta$$

$$=\frac{-e^{-r(T-t)}}{\sigma s\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_N(t)}+\ln\frac{s_{NT}}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{s_N(t)}+\ln\frac{s_{NT}}{\zeta}\right]}{\sigma^2(T-t)}d\zeta \tag{85}$$

当 $s_N(t)<s<\infty$ 有 $\ln\frac{s}{s_N(t)}+\ln\frac{s_{NT}}{\zeta}>0$，由(85)式 $\frac{\partial v}{\partial s}(s,t)<0$，从而 $\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}v(s,t)=v(s_N(t),t)$。

2) 当 $s\in(s_{0T},\infty)$，$\varphi(s)>0$，当 $s\in(0,s_{0T}]$，$\varphi(s)\equiv 0$；则数学模型 I.1 (Black-Scholes 方程的终值问题)的解由(79)式给出。由(79)式有

$$\frac{\partial v_A}{\partial s}(s,t)=\frac{-e^{-r(T-t)}}{\sigma s\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\ln\frac{s_0(t)}{\zeta}+\ln\frac{s_0(t)}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\ln\frac{s_0(t)}{\zeta}+\ln\frac{s_0(t)}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]}{2\sigma^2(T-t)}d\zeta$$

$$=\frac{-e^{-r(T-t)}}{\sigma s\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_0(t)}+\ln\frac{s_{0T}}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{s_0(t)}+\ln\frac{s_{0T}}{\zeta}\right]}{\sigma^2(T-t)}d\zeta \tag{86}$$

当 $0<s<s_0(t)$ 有 $\ln\frac{s}{s_0(t)}+\ln\frac{s_{0T}}{\zeta}<0$，由(86)式有 $\frac{\partial v_A}{\partial s}(s,t)>0$，从而 $\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}v_A(s,t)=v_A(s_0(t),t)$。

3) 当 $s\in(0,s_{NT})$，$\varphi(s)>0$，当 $s\in[s_{NT},\infty)$，$\varphi(s)\equiv 0$；则数学模型 I.1 (Black-Scholes 方程的终值问题)的解由(80)式给出。由(80)式有

$$\frac{\partial v_B}{\partial s}(s,t)=\frac{-e^{-r(T-t)}}{\sigma s\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{0}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\ln\frac{s_N(t)}{\zeta}+\ln\frac{s_N(t)}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\ln\frac{s_N(t)}{\zeta}+\ln\frac{s_N(t)}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]}{\sigma^2(T-t)}d\zeta$$

$$=\frac{-e^{-r(T-t)}}{\sigma s\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{0}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s_N(t)}+\ln\frac{s_{NT}}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{\left[\ln\frac{s}{s_N(t)}+\ln\frac{s_{NT}}{\zeta}\right]}{\sigma^2(T-t)}d\zeta \tag{87}$$

当 $s_N(t)<s<\infty$ 有 $\ln\frac{s}{s_N(t)}+\ln\frac{s_{NT}}{\zeta}>0$，由(87)式有 $\frac{\partial v_B}{\partial s}(s,t)<0$，从而 $\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty} v_B(s,t)=v_B(s_N(t),t)$。

证毕。

**定理 3：** 若

1) $\gamma_j(t)\in C([0,T]),\gamma_j(t)>0, j\in\{0,1,\cdots,N\}$

2) $s_j(t)=s_{jT}e^{\sigma^2\omega(T-t)}, j\in\{0,1,\cdots,N\};s_{jT}<s_{iT},i>j$

3) $\varphi(s)\in C([0,\infty))$ 且当 $s\in(s_{0T},s_{NT})$，$\varphi(s)>0$，当 $s\in(0,s_{0T}]\cup[s_{NT},\infty)$，$\varphi(s)\equiv 0$；

则数学模型 I 有连续有界的精确解

$$u(s,t)=v(s,t)+w(s,t) \tag{88}$$

$$v(s,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{s_{NT}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}d\zeta \tag{89}$$

$$w(s,t)=\frac{\sigma e^{rt}e^{\sigma^2\omega T}}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}s_{jT}\int_t^T\frac{\gamma_j(\xi)e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_{jT}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi \tag{90}$$

且满足 $\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}u(s,t)=u(s_0(t),t), \max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}u(s,t)=u(s_N(t),t)$。

**证明：** 由定理 2 有 $w(s_0(t),t)=\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t), w(s_N(t),t)=\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)$

由引理 2.5 有 $\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}v(s,t)=v(s_0(t),t)$，$\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}v(s,t)=v(s_N(t),t)$；

从而

$$\begin{aligned}\max_{0\le s\le s_0(t)}u(s,t)&=\max_{0\le s\le s_0(t)}v(s,t)+\max_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t)\\&=v(s_0(t),t)+w(s_0(t),t)=u(s_0(t),t)\end{aligned},$$

$$\max_{s_N(t)\le s<\infty}u(s,t)=\max_{s_N(t)\le s<\infty}v(s,t)+\max_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)=v(s_N(t),t)+w(s_N(t),t)=u(s_N(t),t).$$

证毕。

**自由边界问题 IA** (Black-Scholes 方程在区域 $0<s<s_0(t),0<t<T$ 上的非齐次终值条件的自由边界问题)：求 $\{u(s,t),s_0(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}Lu=0,0<s<s_0(t),0<t<T\\ u(s,T)=\varphi(s),0<s<s_1(T)\\ u(s_0(t),t)=\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}u(s,t)=\phi_0(t)\\ \frac{\partial u}{\partial s}(s_0^-(t),t)=\upsilon_0(t),0<t<T\\ \lim\limits_{s\to0^+}|u|<\infty\end{cases} \tag{91}$$

**推论 3.1：** 若

1) $\gamma_j(t)\in C([0,T]),\gamma_j(t)>0, j\in\{0,1,\cdots,N\}$

2) $s_j(t)=s_{jT}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}, j\in\{1,\cdots,N\}; s_{jT}<s_{iT}, i>j$

3) $\varphi(s)\in C([0,\infty))$ 且当 $s\in(s_{0T},\infty)$，$\varphi(s)>0$，当 $s\in(0,s_{0T}]$，$\varphi(s)\equiv 0$；

则自由边界问题 IA 有连续有界的精确解

$$\begin{cases} u(s,t)=v_A(s,t)+w(s,t) & (92)\\ s_0(t)=s_{0T}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}, s_{0T}<s_{1T} & (93)\end{cases}$$

$$\text{其中 } v_A(s,t)=\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{s_{0T}}^{\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta}-\sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \tag{94}$$

$$w(s,t)=\frac{\sigma\mathrm{e}^{rt}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega T}}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}s_{jT}\int_t^T\frac{\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}}{\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_{jT}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{95}$$

有解的相容性条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma^3 s_{0T}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}\sqrt{2\pi}(T-t)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int_{s_{0T}}^{\infty}\frac{\varphi(\zeta)\left[\ln\frac{s_{0T}}{\zeta}\right]}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{0T}}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta \\ +\dfrac{1}{2\sigma s_{0T}\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\left[s_{jT}\ln\frac{s_{0T}}{s_{jT}}\right]\int_t^T\frac{\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{0T}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi=-\upsilon_0(t) & (96)\\ \phi_0(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\displaystyle\int_{s_{0T}}^{\infty}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{0T}}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}\zeta+\frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}s_{jT}\int_t^T\frac{\mathrm{e}^{-r(\xi-t)}\gamma_j(\xi)\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{0T}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi & (97)\end{cases}$$

**自由边界问题 IB** (Black-Scholes 方程在区域 $s_N(t)<s<\infty, 0<t<T$ 上的非齐次终值条件的自由边界问题)：求 $\{u(s,t), s_N(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho}Lu=0, s_N(t)<s<\infty, 0<t<T\\ u(s,T)=\varphi(s), s_N(T)<s<\infty\\ u(s_N(t),t)=\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}u(s,t)=\phi_N(t)\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(s_N(t),t)=\upsilon_N(t)\\ \lim\limits_{s\to\infty}|u|<\infty\end{cases} \tag{98}$$

**推论 3.2：** 若

1) $\gamma_j(t)\in C([0,T]), \gamma_j(t)>0, j\in\{0,1,\cdots,N\}$

2) $s_j(t)=s_{jT}\mathrm{e}^{\sigma^2\omega(T-t)}, j\in\{0,1,\cdots,N-1\}; s_{jT}<s_{iT}, i>j$

3) $\varphi(s)\in C([0,\infty))$ 且当 $s\in(0,s_{NT})$，$\varphi(s)>0$，当 $s\in[s_{NT},\infty)$，$\varphi(s)\equiv 0$；

则自由边界问题 IB 有连续有界的精确解

$$\begin{cases} u(s,t) = v_B(s,t) + w(s,t) & (99) \\ s_N(t) = s_{NT} e^{\sigma^2 \omega (T-t)}, s_{NT} > s_{N-1,T} & (100) \end{cases}$$

其中

$$v_B(s,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{s_{NT}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{\zeta} - \sigma^2\omega(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}} d\zeta \tag{101}$$

$$w(s,t) = \frac{\sigma e^{rt} e^{\sigma^2\omega T}}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{N} s_{jT} \int_t^T \frac{\gamma_j(\xi) e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}}{\sqrt{\xi - t}} e^{-\frac{\left[\ln s - \sigma^2\omega(T-t) - \ln s_{jT}\right]^2}{2\sigma^2(\xi - t)}} d\xi \tag{102}$$

有解的相容性条件为

$$\begin{cases} \dfrac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}\sigma^3 s_{NT} e^{\sigma^2\omega(T-t)} (T-t)^{\frac{3}{2}}} \displaystyle\int_0^{s_{NT}} \frac{\varphi(\zeta)\ln\frac{s_{NT}}{\zeta}}{\zeta} e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{NT}}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}} d\zeta \\ + \dfrac{1}{2\sigma s_N(T)\sqrt{2\pi} e^{\sigma^2\omega(T-t)}} \displaystyle\sum_{j=0}^{N}\left[s_{jT}\ln\frac{s_{NT}}{s_{jT}}\right] \int_t^T \frac{e^{-r(\xi-t)}\gamma_j(\xi) e^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{NT}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} d\xi = -\upsilon_N(t) & (103) \\ \phi_N(t) = \dfrac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \displaystyle\int_0^{s_{NT}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{NT}}{\zeta}\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}} d\zeta + \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{N} s_{jT} \int_t^T \frac{e^{-r(\xi-t)}\gamma_j(\xi) e^{\sigma^2\omega(T-\xi)}}{\sqrt{\xi-t}} e^{-\frac{\left[\ln\frac{s_{NT}}{s_{jT}}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}} d\xi & (104) \end{cases}$$

**附注 3：** 非齐次终值条件的自由边界问题 IA 的解 $\{u(s,t), s_0(t)\}$ 与齐次终值条件的自由边界问题 IIA 的解 $\{w(s,t), s_0(t)\}$ 满足 $u(s,t) \ge w(s,t)$；但自由边界问题 IA 和 IIA 所得到的自由边界 $s_0(t)$ 是一致的。

非齐次终值条件的自由边界问题 IB 的解 $\{u(s,t), s_N(t)\}$ 与齐次终值条件的自由边界问题 IIB 的解 $\{w(s,t), s_N(t)\}$ 满足 $u(s,t) \ge w(s,t)$；但自由边界问题 IB 和 IIB 所得到的自由边界 $s_N(t)$ 是一致的。

## 2.2. Black-Scholes 方程在区域 $\Omega: 0 < s < \infty, 0 < t < T$ 有且仅有一条奇异内边界 $s = s_j(t), 0 < t < T$ 的齐次终值问题数学模型 III

**数学模型 III** (有且仅有一条奇异内边界的齐次终值问题)：

求 $\{w(s,t), s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho} Lw = -f(s,t;s(t)), 0 < s < \infty, 0 < t < T & (105) \\ w(s,T) = 0, 0 < s < \infty & (106) \\ w(s(t),t) = \max\limits_{0 \le s < \infty} w(s,t) = \phi(t) & (107) \\ \dfrac{\partial w}{\partial s}(s(t),t) = 0, 0 < t < T & (108) \\ \lim\limits_{s \to 0^+} |w| < \infty, \lim\limits_{s \to \infty} |w| < \infty & (109) \end{cases}$$

其中：

$$f\left(s,t;s(t)\right)=\frac{\sigma^2\gamma(t)}{2}s^2\delta\left(s-s(t)\right) \tag{110}$$

**定理 4：** 若 $s(t)$ 为充分光滑的单调函数， $\gamma(t)\in C^1([0,T]),\gamma(t)>0,t\in(0,T)$，则数学模型 III 的精确解

$$\begin{cases} w(s,t)=\dfrac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T \frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi,0<s<\infty,0<t<T & (111)\\ s(t)=s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)} & (112)\end{cases}$$

有解的相容性条件是

$$\phi(t)=\frac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sqrt{2\pi}}\int_t^T \frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}d\xi,\phi(T)=0 \tag{113}$$

**证明：** 由定理 2 中令 $N=0$， $s(t)=s_0(t)$， $s(T)\cong s_T$ 即得(111)，(112)。

问题 II 有解的相容性条件(55)即得数学模型 III 有解的相容条件(113)。

问题 II 有解的相容性条件(53)推出应有条件 $\frac{\partial w}{\partial s}\left(s(t),t\right)=0$，事实上由(111)关于 $s$ 求偏导得到

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s,t)=-\frac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2s\sqrt{2\pi}}\int_t^T \frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]}{\sigma^2(\xi-t)}d\xi \tag{114}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}\left(s(t),t\right)=-\frac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2s(t)\sqrt{2\pi}}\int_t^T \frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s(t)-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}\frac{\left[\ln s(t)-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]}{\sigma^2(\xi-t)}d\xi \tag{115}$$

由(112)式两边取对数，即得

$$\ln s(t)=\ln s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)}=\ln s_T+\sigma^2\omega(T-t) \tag{116}$$

将(116)式代入(115)式即有 $\frac{\partial w}{\partial s}\left(s(t),t\right)=0$ 成立。由(114)，(116)两式易得

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s,t)=-\frac{s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sigma s\sqrt{2\pi}}\left[\ln\frac{s}{s(t)}\right]\int_t^T \frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s}{s(t)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi \tag{117}$$

当 $0<s<s(t),\ln\frac{s}{s(t)}<0$，由(117)式得到 $\frac{\partial w}{\partial s}(s,t)>0$ 从而

$$w\left(s(t),t\right)=\max_{0\le s\le s(t)}w(s,t) \tag{118}$$

当 $s(t)<s<\infty,\ln\frac{s}{s(t)}>0$，由(117)式得到 $\frac{\partial w}{\partial s}(s,t)<0$ 从而

$$w\left(s(t),t\right)=\max_{s(t)\le s<\infty}w(s,t) \tag{119}$$

由(118)，(119)两式即有 $w(s(t),t)=\max\limits_{0\le s\le s(t)} w(s,t)=\max\limits_{s(t)\le s<\infty} w(s,t)=\max\limits_{0\le s<\infty} w(s,t)$。证毕。

**定理 5 (**数学模型 III 解的性质定理)：若 $\gamma(t)\in C^1([0,T]),\gamma(t)>0,t\in(0,T)$ 由(111)，(112)给出的精确解满足

1) 内边界 $s(t)=s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)}$ 是指数函数，$s'(t)=-\sigma^2\omega s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)}$。当 $\omega>0,s'(t)<0$，$s(t)$ 为充分光滑的单调减函数；当 $\omega<0,s'(t)>0$，$s(t)$ 为充分光滑的单调增函数。$s''(t)=\sigma^4\omega^2 s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)}>0$。

2) 解函数 $w(s,t)$ 在内边界 $s(t)=s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)}$ 上具有很好的光滑性：

$w(s,t)\in C(\bar\Omega),\dfrac{\partial w}{\partial t}(s,t)\in C(\Omega),\dfrac{\partial w}{\partial s}(s,t)\in C(\Omega),\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s,t)\in C(\Omega)$。且满足

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s^+(t),t)=\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s^-(t),t)=-\frac{s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sigma s^2(t)\sqrt{2\pi}}\int_t^T\frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}d\xi \tag{120}$$

**证明：**显然有 $w(s,t)\in C(\bar\Omega),\dfrac{\partial w}{\partial s}(s,t)\in C(\Omega)$。由(117)式

1) $0<s<s(t),\ln\dfrac{s}{s(t)}<0,\dfrac{\partial w}{\partial s}(s,t)>0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s}(s^-(t),t)&=\lim_{s\to s^-(t)}\frac{\partial w}{\partial s}(s,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial w}{\partial s}(s(t)-\varepsilon,t)\\&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sigma(s(t)-\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\left[\ln\frac{(s(t)-\varepsilon)}{s(t)}\right]\int_t^T\frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{(s(t)-\varepsilon)}{s(t)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi\\&=0\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial s}(s(t)-\varepsilon,t)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s(t)-\varepsilon,t)=-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s^-(t),t)$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial s}(s(t)-\varepsilon,t)&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sigma(s(t)-\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\varepsilon}\left[\ln\frac{s(t)-\varepsilon}{s(t)}\right]\int_t^T\frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s(t)-\varepsilon}{s(t)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi\\&=\frac{s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sigma s^2(t)\sqrt{2\pi}}\int_t^T\frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}d\xi\\&=-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s^-(t))\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s^-(t))=-\frac{s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sigma s^2(t)\sqrt{2\pi}}\int_t^T\frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}d\xi \tag{121}$$

2) $s(t)<s<\infty,\ln\dfrac{s}{s(t)}>0,\dfrac{\partial w}{\partial s}(s,t)<0$

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s^+(t),t)=\lim_{s\to s^+(t)}\frac{\partial w}{\partial s}(s,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial w}{\partial s}(s(t)+\varepsilon,t)=0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\left(s^+(t),t\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial s}\left(s(t)+\varepsilon,t\right)=-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sigma\left(s(t)+\varepsilon\right)\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\varepsilon}\left[\ln\frac{s(t)+\varepsilon}{s(t)}\right]\int_t^T\frac{e^{-\left(r+\sigma^2\omega\right)\xi}\gamma(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left[\ln\frac{s((t)+\varepsilon}{s(t)}\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi$$

$$=-\frac{s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sigma s^2(t)\sqrt{2\pi}}\int_t^T\frac{e^{-\left(r+\sigma^2\omega\right)\xi}\gamma(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}d\xi$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\left(s^+(t),t\right)=-\frac{s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sigma s^2(t)\sqrt{2\pi}}\int_t^T\frac{e^{-\left(r+\sigma^2\omega\right)\xi}\gamma(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{3}{2}}}d\xi \tag{122}$$

由(121),(122)即是(120)。对(111)应用换元积分法即可变形为含参变量的变上限积分形式

$$w(s,t)=\frac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{T-t}}e^{-\left(r+\sigma^2\omega\right)\left(\varsigma^2+t\right)}\gamma\left(\varsigma^2+t\right)e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2\varsigma^2}}d\varsigma \tag{123}$$

记 $I(s,t)=\int_0^{\sqrt{T-t}}e^{-\left(r+\sigma^2\omega\right)\left(\varsigma^2+t\right)}\gamma\left(\varsigma^2+t\right)e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2\varsigma^2}}d\varsigma$ (124)

$$w(s,t)=\frac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{\sqrt{2\pi}}I(s,t) \tag{125}$$

应用含参变量的变上限积分的求导公式即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t}(s,t)=&\frac{-1}{2\sqrt{T-t}}e^{-\left(r+\sigma^2\omega\right)T}\gamma(T)e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\\&+\int_0^{\sqrt{T-t}}\frac{d}{dt}\left[e^{-\left(r+\sigma^2\omega\right)\left(\varsigma^2+t\right)}\gamma\left(\varsigma^2+t\right)e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2\varsigma^2}}\right]d\varsigma\end{aligned} \tag{126}$$

由(126)式即知当 $\gamma(t)\in C^1([0,T])$ 有 $\frac{\partial w}{\partial t}(s,t)\in C(\Omega)$。证毕。

**自由边界问题 IIIA** (Black-Scholes 方程在 $0<s<s(t),0<t<T$ 上的自由边界问题): 求 $\{w(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+(r-q)s\frac{\partial w}{\partial s}-rw=0,0<s<s(t),0<t<T\\ w(s,T)=0,s(T)<s<\infty\\ w(s(t),t)=\max\limits_{0\le s\le s(t)}w(s,t)=\phi(t),0<t<T\\ \frac{\partial w}{\partial s}(s(t),t)=0,0<t<T\\ \lim\limits_{s\to0^+}|w|<\infty\end{cases} \tag{127}$$

**推论 3.1**：若 $s(t)$ 为充分光滑的单调函数， $\gamma(t)\in C^1([0,T]),\gamma(t)>0$，

则自由边界问题 IIIA 有连续有界的精确解

$$\begin{cases} w(s,t)=\dfrac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T \dfrac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi,0<s<s(t),0<t<T & (128) \\ s(t)=s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)} & (129) \end{cases}$$

有解的相容性条件是

$$\phi(t)=\frac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sqrt{2\pi}}\int_t^T \frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}d\xi,\phi(T)=0 \quad (130)$$

**自由边界问题 IIIB** (Black-Scholes 方程在区域 $s(t)<s<\infty,0<t<T$ 上的自由边界问题): 求 $\{w(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}+(r-q)s\dfrac{\partial w}{\partial s}-rw=0,s(t)<s<\infty,0<t<T \\ w(s,T)=0,s(T)<s<\infty \\ w(s(t),t)=\max\limits_{s(t)\le s<\infty} w(s,t)=\phi(t) \\ \dfrac{\partial w}{\partial s}(s(t),t)=0 \\ \lim\limits_{s\to\infty}|w|<\infty \end{cases} \quad (131)$$

**推论 3.2**：若 $s(t)$ 为充分光滑的单调函数，$\gamma(t)\in C^1([0,T]),\gamma(t)>0$，

则自由边界问题 IIIB 有连续有界的精确解

$$\begin{cases} w(s,t)=\dfrac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T \dfrac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi,s(t)<s<\infty,0<t<T & (132) \\ s(t)=s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)} & (133) \end{cases}$$

有解的相容性条件是

$$\phi(t)=\frac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sqrt{2\pi}}\int_t^T \frac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}d\xi,\phi(T)=0 \quad (134)$$

**定理 6** (数学模型 III 的奇异内边界与问题 IIIA，IIIB 的自由边界三线合一定理):

当 $s(t)$ 为充分光滑的单调函数，$\gamma(t)\in C^1([0,T]),\gamma(t)>0$，且数学模型 III 与问题 IIIA,IIIB 中的边值函数满足条件(134)，则数学模型 III 的奇异内边界问题与问题 IIIA，IIIB 的解具有相同的表达式

$$\begin{cases} w(s,t)=\dfrac{\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_t^T \dfrac{e^{-(r+\sigma^2\omega)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}e^{-\frac{\left[\ln s-\sigma^2\omega(T-t)-\ln s_T\right]^2}{2\sigma^2(\xi-t)}}d\xi & (135) \\ s(t)=s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)} & (136) \end{cases}$$

数学模型 III 的奇异内边界与问题 IIIA，IIIB 的自由边界三曲线重合成一条指数函数曲线 $s(t)=s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)},0<t<T$；数学模型 III 的解函数是问题 IIIA 和 IIIB 的解函数的共同连续开拓，问题 IIIA 和 IIIB 的解函数是数学模型 III 的解函数在它们各自的定义域内的限制。

**附注 4：**关于条件(134)，也可以称为数学模型 III 有解的相容性条件，若给定函数 $\phi(t),0<t<T$，则条件(134)是关于函数 $\gamma(t),0<t<T$ 的第一类 Volterra 积分方程[4]；函数 $\gamma(t),0<t<T$ 必须是满足积分方程(134)的解。

例如，若边值函数由(137)式给出，容易验证(138)给出的 $\gamma(t)$ 是满足积分方程(134)的解。若 $\gamma(t)$ 由(138)式定义，则相应的边值函数 $\phi(t)$ 必须使(137)式成立。

$$\phi(t)=\frac{e^{-(\vartheta-r)t}\sigma s_T e^{\sigma^2\omega T}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\vartheta(T-t)}\right)}{2\sqrt{2}\sqrt{\vartheta}},\vartheta>0,0<t<T \tag{137}$$

$$\gamma(t)=e^{\left(r+\sigma^2\omega\right)t}e^{-\vartheta t},\vartheta>0,0<t<T \tag{138}$$

其中 $\operatorname{erf}(y)$ 为误差函数。

**附注 5：**若数学模型 III 的奇异内边界与问题 IIIA，IIIB 中的边值函数 $\phi(t)\equiv|s(t)-K|$，则 $s_T=K$，且有解的相容性条件是函数 $\gamma(t)$ 为第一类 Volterra 积分方程(139)的解。

$$\int_t^T\frac{e^{-\left(r+\sigma^2\omega\right)\xi}\gamma(\xi)}{\sqrt{\xi-t}}d\xi=\eta(t),0<t<T \tag{139}$$

其中

$$\eta(t)=\frac{2\sqrt{2\pi}\left|e^{\sigma^2\omega(T-t)}-1\right|}{\sigma e^{\sigma^2\omega T}e^{rt}} \tag{140}$$

## 3. 结论

**I** 简单期权价格曲面的情形，即 Black-Scholes 方程在区域 $\Omega:0<s<\infty,0<t<T$ 内有且仅有一条奇异内边界的情形。定理 6 的结果得到数学模型 III 的期权价格函数对任意时刻 $t\in(0,T)$，在奇异内边界 $s(t)=s_T e^{\sigma^2\omega(T-t)},0<t<T$ 上取最大值 $u(s(t),t)=\max\limits_{0\le s<\infty}u(s,t)$，且数学模型 III 的奇异内边界与问题 IIIA 和 IIIB 的自由边界三曲线重合。对简单期权价格曲面而言，数学模型 III 的奇异内边界与问题 IIIA 和 IIIB 的自由边界都是最佳实施边界。

**II** 复杂期权价格曲面的情形，即 Black-Scholes 方程在区域 $\Omega:0<s<\infty,0<t<T$ 具有 $N$+1 条奇异内边界 $s_0(t)<s_1(t)<\cdots<s_N(t)$ 的情形。由定理 2 期权价格函数 $w(s,t)$ 满足条件 $w(s_0(t),t)=\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t)$，$w(s_N(t),t)=\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)$。当 $\max\limits_{0\le s<\infty}w(s,t)>\max\left[\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t),\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)\right]$时，问题 IIA 的自由边界 $s_0(t)$ 与问题 IIB 的自由边界 $s_N(t)$ 都不是最佳实施边界；当 $\max\limits_{0\le s<\infty}w(s,t)=\max\left[\max\limits_{0\le s\le s_0(t)}w(s,t),\max\limits_{s_N(t)\le s<\infty}w(s,t)\right]$时，问题 IIA 的自由边界 $s_0(t)$ 与问题 IIB 的自由边界 $s_N(t)$ 有可能成为最佳实施边界。在复杂多变的情况下，一般不能用问题 IIA 的自由边界 $s_0(t)$，或问题 IIB 的自由边界 $s_N(t)$ 的计箓结果去推断其为美式期权最佳实施边界。单独考虑自由边界问题 IIA 或 IIB 所得到的自由边界的计箓结果皆有可能与真实情况的最佳实施边界相差很远。

## 参考文献 (References)

[1] 姜礼尚, 著. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[2] 吴小庆，编著. 数学物理方程及其应用[M]. 北京：科学出版社, 2008.
[3] 吴小庆，著. 偏微分方程理论与实践[M]. 北京：科学出版社,2009.
[4] B.N. 斯米尔诺夫，著. 高等数学教程(第四卷，第一分册) [M]. 陈传璋，译. 北京：人民教育出版社, 1956.