Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(2), 99-103
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.72014

On the Algebraic Structure of Random Variables Subject to a Class Exponential Family Distribution

Wei Leng, Chongqi Zhang*

School of Economics and Statistics, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong
Email: *cqzhang@gzhu.edu.cn

Received: Mar. 12th, 2017; accepted: Mar. 28th, 2017; published: Mar. 31st, 2017

Abstract

In this paper, by using the related theory of abstract algebra, the algebra structure of addition operation for a class of set constructed by the independent random variables satisfying the exponential family distribution is researched. We proved that the algebraic structure is a semigroup, and this Semi-group is a commutative semigroup.

Keywords

Exponential Family Distribution, Algebraic Structure, Semigroup, Commutative Semigroup

一类具有指数族分布随机变量的代数结构

冷　薇，张崇岐*

广州大学经济与统计学院，广东　广州
Email: *cqzhang@gzhu.edu.cn

收稿日期：2017年3月12日；录用日期：2017年3月28日；发布日期：2017年3月31日

摘　要

本文利用抽象代数的相关理论，研究了一类服从指数族分布且相互独立的随机变量构成的集合对于加法运算的代数结构，证明了其代数结构是一个半群，并且这个半群是个交换半群。

*通讯作者。

文章引用: 冷薇, 张崇岐. 一类具有指数族分布随机变量的代数结构[J]. 理论数学, 2017, 7(2): 99-103.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.72014

关键词

指数族分布，代数结构，半群，交换半群

1. 引言

Sen [1]于 1986 年提出对于某非空集合 G，若存在 G 上的二元运算“$*$”，使得

1) 对 $\forall a,b\in G$，都有 $a*b\in G$；

2) 对 $\forall a,b,c\in G$，都有 $a*(b*c)=(a*b)*c$

则称 G 关于 $*$ 是一个半群，记作 $(G,*)$。若半群 G 的运算 $*$ 还适合于交换律

$$a*b=b*a,\ \forall a,b\in G$$

则称 G 是交换半群。随后，其他学者[2] [3] [4] [5]开始致力于半群上的同余和同态关系的研究，是研究半群结构最为有力的工具之一。王亚芹[6]研究了加法半群为正规纯整群的半环类 $\overset{+}{\mathrm{O}}$NBG，同时研究了 $\overset{+}{\mathrm{O}}$NBG 中半环的一些性质和次直积分解。李庆[7]在半群及加法半群的相关理论的基础上，研究了Γ-半群异于通常半群的独特性质并探讨了Γ-半群的夹心集。从群论的研究领域来看，对于半群的定性研究也是非常有意义的，考虑到半群是具有二元运算的非空集合，学者们更关注在二元运算法则下，对于某些特定的集合能否构成半群。

指数型分布族是个很重要的分布族，很多常用的概率分布族如正态分布族、二项分布族、伽玛分布族及多项式分布族都是指数型分布族。文献[8] [9] [10] [11]研究了指数族分布中参数检验问题及参数的极小极大化估计、经验贝叶斯估计等。熊福生[12]研究了服从伽玛分布的随机变量 X_i 和随机变量 $S=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 对于加法具有再生性，系统的对金融产品的积累值(终值)和贴现值(现值)进行数理分析，在金融行业的研究领域上起着重要的作用。文献[12]所提的再生性，在某种程度上与服从伽玛分布随机变量的可加性存在必然的联系。但目前并没有学者定性研究过此类指数族分布随机变量的代数结构，因此本文的研究具有非常重要的理论意义。

本文研究了定义在样本空间 $\mathcal{F}$ 上的指数型分布族 $\vartheta=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，其中 Θ 为参数空间，概率函数 $f(x,\theta)$ 可以表示为如下形式：

$$f(x,\theta)=c(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta)T_j(x)\right\}h(x) \tag{1.1}$$

其中 n 为自然数，$c(\theta)>0$ 和 $Q_j(\theta)(j=1,2,\cdots,n)$ 都是定义在参数空间 Θ 上的函数。$h(x)>0$ 和 $T_j(x)(j=1,2,\cdots,n)$ 都是定义在样本空间 $\mathcal{F}$ 上的函数，且 $T_1(x),\cdots,T_n(x)$ 线性无关的。分布的支撑 $\{x:f(x,\theta)>0\}$ 与参数 θ 无关。从服从指数族分布的随机变量所构成的集合 G 出发，利用抽象代数的相关理论，研究了这类随机变量构成的集合对于加法运算满足封闭性和结合律，因此从代数的角度看，这类集合的代数结构为半群 $(G,+)$，并证明了该半群还是一个交换半群。

2. 主要结果

定理 1 具有指数族分布且相互独立的随机变量构成的集合 G 对于加法运算满足封闭性。

证明设随机变量 X 服从参数为 θ_1 的指数族分布，Y 服从于参数为 θ_2 的指数族分布，且 X 与 Y 相互独立。由(1.1)知，随机变量 X 与 Y 的概率函数分别为

$$f(x,\theta_1)=c(\theta_1)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_1)T_j(x)\right\}h(x)$$

$$f(y,\theta_2)=c(\theta_2)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_2)T_j(y)\right\}h(y)$$

考虑到指数族的概率函数可以分为离散型和连续型，因此我们利用卷积公式求其和 $Z=X+Y$ 的概率函数时，也应分为离散场合下的卷积公式和连续场合下的卷积公式。

先讨论指数族分布为离散型的情况。首先指出 $Z=X+Y$ 可取 $0,1,2,\cdots$ 所有非负整数。而事件 $\{Z=k\}$ 是如下诸互不相容事件

$$\{X=i,Y=k-i\},i=0,1,\cdots,k$$

的并，再考虑独立性，则对任意非负整数 k，有

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

则由卷积公式可知

$$\begin{aligned}
f(z=k)&=\sum_{i=0}^{k}\left\{c(\theta_1)\exp\left[\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_1)T_j(i)\right]h(i)\cdot c(\theta_2)\exp\left[\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_2)T_j(k-i)\right]h(k-i)\right\}\\
&=\sum_{i=0}^{k}\left\{c(\theta_1)c(\theta_2)\exp\left[\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_1)T_j(i)+\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_2)T_j(k-i)\right]h(i)h(k-i)\right\}\\
&=\sum_{i=0}^{k}\left\{c(\theta_1)c(\theta_2)\exp\left[\sum_{j=1}^{n}\left(Q_j(\theta_1)T_j(i)+Q_j(\theta_2)T_j(k-i)\right)\right]h(i)h(k-i)\right\}\\
&=C(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta)T_j(k)\right\}H(k)
\end{aligned}$$

其中 $C(\theta)$ 可用 $c(\theta_1)$ 和 $c(\theta_2)$ 线性表示，$H(k)$ 可以用 $h(i)$ 和 $h(k-i)$ 线性表示，$Q_j(\theta)T_j(k)$ 可用 $Q_j(\theta_1)T_j(i)+Q_j(\theta_2)T_j(k-i)$ 线性表示。这表明 $Z=X+Y$ 仍然为指数族分布，封闭性得证。

下面讨论指数族分布为连续型的情况。则其和 $Z=X+Y$ 的密度函数，由连续场合下的卷积公式可知

$$\begin{aligned}
f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}c(\theta_1)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_1)T_j(z-y)\right\}h(z-y)\cdot c(\theta_2)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_2)T_j(y)\right\}h(y)\mathrm{d}y\\
&=c(\theta_1)c(\theta_2)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_1)T_j(z-y)+\sum_{j=1}^{n}Q_j(\theta_2)T_j(y)\right\}h(z-y)h(y)\mathrm{d}y\\
&=c(\theta_1)c(\theta_2)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[Q_j(\theta_1)T_j(z-y)+Q_j(\theta_2)T_j(y)\right]\right\}h(z-y)h(y)\mathrm{d}y\\
&=C(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}R_j(\theta)S_j(z)\right\}H(z)
\end{aligned}$$

其中 $C(\theta)$ 可用 $c(\theta_1)$ 和 $c(\theta_2)$ 线性表示， $H(z)$ 可以用 $h(y)$ 和 $h(z-y)$ 线性表示， $\sum_{j=1}^{n}R_j(\theta)S_j(z)$ 可用 $\sum_{j=1}^{k}\left[Q_j(\theta_1)T_j(z-y)+Q_j(\theta_2)T_j(y)\right]$ 线性表示，这表明 $Z=X+Y$ 仍然为指数族分布，故封闭性得证。

定理 2 具有指数族分布且相互独立的随机变量构成的集合 G 对于加法运算满足交换律。

证明设 $G=\{x|x\text{服从指数族分布}\}$，取 $X_1,X_2,X_3\in G$，且 $X_1\sim\vartheta(\theta_1)$，

$$X_2\sim\vartheta(\theta_2),\quad X_3\sim\vartheta(\theta_3).$$

由定理 1 知 $Y_1=X_1+X_2\sim\vartheta(\theta_1+\theta_2)$， $Y_2=X_2+X_3\sim\vartheta(\theta_2+\theta_3)$，所以 $Y_1,Y_2\in G$，满足封闭性。

令 $Z_1=(X_1+X_2)+X_3=Y_1+X_3$， $Z_2=X_1+(X_2+X_3)=X_1+Y_2$，则由定理 1 得：

$$Z_1\sim\vartheta(\theta_1+\theta_2)*\vartheta(\theta_3)=\vartheta(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

$$Z_2\sim\vartheta(\theta_1)*\vartheta(\theta_2+\theta_3)=\vartheta(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

所以 $Z_1=Z_2$，即 $(X_1+X_2)+X_3=X_1+(X_2+X_3)$

因此，具有指数族分布且相互独立的随机变量构成的集合 G 对于加法运算满足结合律。

定理 1 满足加法运算的封闭性，定理 2 满足加法运算的交换律。因此具有指数族分布且相互独立的随机变量构成的集合 G 对于加法运算构成半群，记为 $(G,+)$。

定理 3 设 $(G,+)$ 是具有指数族分布且相互独立的随机变量构成的半群，则这个半群是一个交换半群。

证明设 G 是由指数族分布随机变量构成的一个集合， $X\sim\vartheta(\theta_1)$， $Y\sim\vartheta(\theta_2)$ 是 G 中任意两个元素，则由上述定理 2 得

$$X+Y\sim\vartheta(\theta_1+\theta_2)\sim Y+X\text{，即 }X+Y=Y+X$$

故，半群 $(G,+)$ 对于加法运算适合交换律，所以半群 $(G,+)$ 是一个交换半群。

3. 例子

设 $G_1=\{x|x\text{服从伽玛分布且相互独立}\}$ 取 $X_1,X_2,X_3\in G_1$，且 $X_1\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$， $X_2\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$， $X_3\sim Ga(\alpha_3,\lambda)$。若 $Y_1=X_1+X_2$，那么根据卷积公式得

$$\begin{aligned}p_{Y_1}(y_1)&=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{y_1}(y_1-x_1)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\lambda(y_1-x_1)}\cdot x_2^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\\&=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}\mathrm{e}^{-\lambda y_1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{y_1}(y_1-x_2)^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\mathrm{d}x_2\\&=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}\mathrm{e}^{-\lambda y_1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1(1-t)^{\alpha_1-1}t^{\alpha_2-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

最后利用贝塔函数

$$\int_0^1(1-t)^{\alpha_1-1}t^{\alpha_2-1}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

代入上式得

$$p_Z(z)=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

这正是形状参数为 $\alpha_1+\alpha_2$ 的伽玛分布，即 $Y_1=X_1+X_2\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)\in G_1$ 封闭性得证。

同理可得 $Y_2=X_2+X_3\sim Ga(\alpha_2+\alpha_3,\lambda)$。令那么 $Z_1=(X_1+X_2)+X_3=Y_1+X_3$，

$$Z_2=X_1+(X_2+X_3)=X_1+Y_2$$

由于

$$Z_1\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)*Ga(\alpha_3,\lambda)=Ga(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda)$$

$$Z_2\sim Ga(\alpha_1,\lambda)*Ga(\alpha_2+\alpha_3,\lambda)=Ga(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda)$$

因此

$$Z_1=Z_2\text{，即 }(X_1+X_2)+X_3=X_1+(X_2+X_3)$$

满足加法交换律。综上所述，服从伽玛分布且相互独立的随机变量组成的集合对于加法运算能构成一个半群。

4. 结束语

本文介绍了一类具有指数族分布随机变量构成的集合的代数结构，并列举了服从伽玛分布且独立的随机变量组成的集合对于加法运算是个半群，并且这个半群是个交换半群。在未来的研究中，还有许多应进一步探讨的问题：其他分布的代数结构是怎样的？对数伽玛分布、负对数伽玛分布的代数结构是什么？作者希望这些问题可以引起读者的兴趣。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11671104)。

参考文献 (References)

[1] Sen, M.K. and Saha, N.K. (1986) On Γ-Semigroup (1). *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, **78**, 180-186.
[2] 吕新民，谢霖铨．半群上同余的若干性质[J]．南昌大学学报, 2000, 24(4): 361-364.
[3] 欧启通．半群同态的相关性质[J]．淮北煤炭师范学院学报, 2004, 25(4): 15-18.
[4] 刘刚．半群同余的若干研究[D]: [硕士学位论文]．兰州：兰州理工大学, 2010.
[5] 李辉．半群的同余与结构[D]: [硕士学位论文]．山东：山东师范大学, 2008.
[6] 王亚芹．加法半群为正规纯整群的半环[J]．纯粹数学与应用数学, 2007, 32(1): 66-70.
[7] 李庆，喻秉钧. Γ-半群异于通常半群的独特性质[J]．数学杂志, 2015, 35(3): 714-726.
[8] 李光辉，张崇岐．混合指数族分布的参数估计[J]．广州大学学报, 2015, 14(3): 10-16.
[9] 林金官．一类特殊的指数族分布的参数估计[J]．四川师范大学学报, 2000, 23(4): 341-345.
[10] 温利民，程子红，周东琼．指数族分布中参数的经验贝叶斯估计[J]．统计与信息论坛, 2013, 28(5): 3-7.
[11] 成平．指数族分布之参数的极小极大化估计[J]．数学学报, 1964, 14(2): 252-275.
[12] 熊福生．对数伽玛与负对数伽玛分布的再生性[J]．经济数学, 2003, 20(4): 63-69.