Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(2), 78-88
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.72012

The Solution of Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations in Banach Spaces

Jiahao Wei

Weifang (Shanghai) New Epoch School, Weifang Shandong
Email: weijiahaogood@163.com

Received: Mar. 10th, 2017; accepted: Mar. 27th, 2017; published: Mar. 30th, 2017

Abstract

The existence of solutions for a class of P-Laplacian fractional differential equation boundary value problem is obtained by means of fixed point theorem and the properties of Green function in Banach Space.

Keywords

Fractional Differential Equation, Boundary Value Problem, Fixed Point Theorem, P-Laplacian Operator

Banach空间中分数阶微分方程边值问题的解

魏家豪

潍坊(上海)新纪元学校，山东 潍坊
Email: weijiahaogood@163.com

收稿日期：2017年3月10日；录用日期：2017年3月27日；发布日期：2017年3月30日

摘　要

应用不动点定理以及格林函数的性质，在**Banach**空间中得到了一类带有**P-Laplacian**算子的分数阶微分方程边值问题解的存在性结果。

文章引用：魏家豪. Banach 空间中分数阶微分方程边值问题的解[J]. 理论数学, 2017, 7(2): 78-88.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.72012

关键词

分数阶微分方程，边值问题，不动点定理，P-Laplacian算子

1. 引言

本文我们主要研究 Banach 空间 E 中 P-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题：

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left({}^{C}D_{0+}^{\alpha}u(t)\right)\right)' + f\left(t,u(t)\right) = \theta, \\ k_0 u(0) - k_1 u(1) = \theta, \\ m_0 u'(0) - m_1 u'(1) = \theta, \\ u^r(0) = \theta, r = 2,3,\cdots,[\alpha] \end{cases} \tag{1}$$

其中 $t \in (0,1)$， θ 是 E 中的零元， $\alpha > 2$ 是实数， $[\alpha]$ 记作实数 α 的整数部分， $k_i, m_i\ (i=0,1)$ 是常数满足 $0 < k_1 < k_0$， $0 < m_1 < m_0$， φ_p 是 P-Laplacian 算子，即： $\varphi_p(s) = \|s\|^{p-2}s$， $p>1$， $\varphi_q = \varphi_p^{-1}$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$， ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$ 是 Caputo 导数， $I=[0,1]$， $f: I\times E \to E$ 是连续的。

多孔介质中的湍流是一个基本力学问题，为研究此类问题，Leibenson 引入了下列带有 P-Laplacian 算子的微分方程：

$$\left(\varphi_p\left(u'(t)\right)\right)' = f\left(t,u(t)\right), 0<t<1. \tag{2}$$

对微分方程(2)的研究具有非常重要的理论和实际意义，因此受到了广大学者的广泛关注，得到了许多有关微分方程在具有不同边值条件下的显著结果(见文献[1] [2] [3] [4])。随着研究的深入，人们开始关注非整数阶微分方程的边值问题，但是有关带有 P-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题的研究结果还是很少的。

2010 年，文献[5]研究了下列带有 P-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题：

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}\left(\varphi_p\left(D_{0+}^{\alpha}u(t)\right)\right) = f\left(t,u(t)\right), 0<t<1, \\ u(0) = D_{0+}^{\alpha}u(0) = 0, u(1) = au(\xi), \\ D_{0+}^{\alpha}u(1) = bD_{0+}^{\alpha}u(\eta), \end{cases}$$

其中 $1<\alpha\le 2, 0\le a,b\le 1, 0<\xi,\eta<1$，利用上下解的方法，作者得到了至少一个正解的存在性结果。

2013 年，文献[6]研究了下列带有 P-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题：

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}\left(\varphi_p\left(D_{0+}^{\alpha}u(t)\right)\right) = f\left(t,u(t)\right), 0<t<1, \\ u(0) = u'(0) = u(1) = 0, \\ D_{0+}^{\alpha}u(0) = D_{0+}^{\alpha}u(1) = 0, \end{cases}$$

其中 $2<\alpha\le 3, 1<\beta\le 2$。由格林函数的性质及 Guo-Krasnosel'Skii 不动点定理，得到了正解的存在性及多重性的结果。

受以上文章启发，本文主要研究分数阶微分方程边值问题(1)解的存在性。与以往研究成果相比，本文我们所考虑的边值问题具有以下创新点。第一，我们是在 Banach 空间中研究边值问题(1)解的存在性。第二，本文中使用的主要工具是 Kuratowski 非紧性测度的性质和 Sadovskii 不动点定理，得到了解的存在性结果。最后，我们研究的微分方程带有 P-Laplacian 算子，特别是在 Banach 空间中，此类问题的研究成果尚不多见，因此研究边值问题(1)解的存在性是必要的。

2. 预备知识及主要引理

首先定义以下空间：

$$FC[I,E]=\left\{u\in C[I,E]:\sup_{t\in I}\frac{\|u(t)\|}{1+t}<+\infty\right\},$$

$$DC[I,E]=\left\{u\in C^1[I,E]:\sup_{t\in I}\frac{\|u(t)\|}{1+t}<+\infty,\sup_{t\in I}\|u'(t)\|<+\infty\right\}.$$

易见，空间 $FC[I,E]$ 和 $DC[I,E]$ 分别赋予范数 $\|u\|_F=\sup_{t\in I}\frac{\|u(t)\|}{1+t}$，$\|u\|_D=\max_{t\in I}\{\|u\|_F,\|u\|_C\}$ 时，是 Banach 空间，其中 $\|u\|_C=\max_{t\in I}\|u(t)\|$。

本文的基本空间是 $DC[I,E]$。

下面给出本文用到的一些概念和引理。

定义 1 [7] 函数 $f:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha(\alpha>0)$ 阶 Captuto 导数定义为：

$${}^{C}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\alpha]+1$，$[\alpha]$ 是实数 α 的整数部分，右端在 $(0,+\infty)$ 上是逐点定义的。

定义 2 [8] (Kuratowski 非紧性测度)令 E 是实 Banach 空间，S 是 E 中的有界集，称

$$\alpha(S)=\inf\left\{\delta>0:S=\bigcup_{i=1}^{m}S_i,\mathrm{diam}(S_i)<\delta,i=1,2,\cdots,m\right\}$$

为集合 S 的非紧性测度，其中 $\mathrm{diam}(S_i)$ 是 S_i 的直径。显然 $0\le\alpha(S)<\infty$。

对 Banach 空间 E 中的任意有界集 D，记 $\alpha_E(\cdot)$ 为 E 的 Kuratowski 非紧性测度。下面分别记空间 $C[I,E]$、$FC[I,E]$、$DC[I,E]$ 中的有界集的 Kuratowski 非紧性测度记作 $\alpha_C(\cdot)$、$\alpha_F(\cdot)$ 和 $\alpha_D(\cdot)$。

定义 3 [8] 令 E_1 和 E_2 是实 Banach 空间，$D\subset E_1$，$A:D\to E_2$ 是连续有界的算子，

1) 如果存在常数 $k\ge 0$，对 E 中的任意有界集 S，使得 $\alpha(A(S))<k\alpha(s)$，则称 A 是 k-集压缩映像。当 $k<1$ 时，则称 A 为严格集压缩映像。

2) 如果对 E 中任意非相对紧的有界集 S，有 $\alpha(A(S))<k\alpha(s)$，则称 A 是凝聚映像。

为描述方便，列出以下条件：

(H_1) 存在非负函数 $a,b,c\in C[0,1]$，使得对任意 $t\in I,x,y\in E$，有

$$\int_0^t\|f(s,x)\|\mathrm{d}s\le\varphi_p[a(t)\|x\|+b(t)],$$

$$\int_0^1 \left[a(t)(1+t)+b(t)\right]\mathrm{d}t < M^{-1};$$

(H₂)对任意 $\gamma>0$，$[\alpha,\beta]\subset I$，$f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times B_E[\theta,\gamma]$ 上是一致连续的，其中

$$B_E[\theta,\gamma]=\{x\in E:\|x\|\le\gamma\};$$

(H₃) 存在 $l_1\in L[0,+\infty)$ 满足 $\int_0^1(1+t)l_1(t)\mathrm{d}t<M^{-1}$，使得对任意 $t\in \mathrm{I}$，E 中的有界子集 D_1，有

$$\int_0^t \alpha_E\left(f(s,D_1)\right)\mathrm{d}s\le\varphi_p\left(l_1(t)\alpha_E(D_1)\right)$$

其中

$$M=\max\{M_1,M_2\},$$

$$M_1=\frac{k_0}{k_0-k_1}\left[\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right],$$

$$M_2=\frac{m_0}{m_0-m_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}.$$

引理 1 [8] (Schauder 不动点定理) 令 K 是 Banach 空间 E 中的有界闭凸子集，T 是 K 到其自身内的任一全连续映像，则 T 在 K 内至少有一个不动点。

引理 2 给定 $y\in L^1(0,1)$，若 $\alpha>2$，则边值问题：

$$\begin{cases}\left(\varphi_p\left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha}u(t)\right)\right)'+y(t)=\theta,\\ k_0u(0)-k_1u(1)=\theta,\\ m_0u'(0)-m_1u'(1)=\theta,\\ u^r(0)=\theta,r=2,3,\cdots,[\alpha],\end{cases}\tag{3}$$

有唯一解

$$\begin{aligned}u(t)=&\frac{m_1}{m_0-m_1}\left(\frac{k_1}{k_0-k_1}+t\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned}.\tag{4}$$

证明：由(3)知 ${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_{0+}^{\alpha}u(t)=\varphi_q\left(\int_0^t y(s)\mathrm{d}s\right)$。

对上式两边积分及 $u^r(0)=\theta,r=2,3,\cdots,[\alpha]$ 得

$$\begin{aligned}u(t)&=u(0)+u'(0)t+\frac{u''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{u^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+I_{0+}^{\alpha}\varphi_q\int_0^t y(s)\mathrm{d}s\\&=u(0)+u'(0)t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned},\tag{5}$$

对上式求导得

$$u'(t)=u'(0)t+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau$$

因此

$$u(1)=u(0)+u'(0)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau,$$

$$u'(1)=u'(0)+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau.$$

再由边值问题(3)的边界条件，可得

$$\begin{aligned}u(0)=&\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned},\tag{6}$$

$$u'(0)=\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau.\tag{7}$$

将(6)、(7)代入(5)，可得(4)成立。

引理 3 假设条件(H_1)成立，则边值问题(1)等价于下面的积分方程：

$$\begin{aligned}u(t)=&\frac{m_1}{m_0-m_1}\left(\frac{k_1}{k_0-k_1}+t\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

证明：引理 3 的证明类似于引理 2，在此略去。

对任意 $u\in DC[I,E]$，定义算子 T：

$$\begin{aligned}Tu(t)=&\frac{m_1}{m_0-m_1}\left(\frac{k_1}{k_0-k_1}+t\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned}.\tag{8}$$

注 1：引理 3 说明边值问题(1)解的存在性等价于算子 T 的不动点的存在性。

引理 4 假设条件(H_1)和(H_2)成立，则算子 $T:DC[I,E]\to DC[I,E]$ 是连续有界的。

证明：首先，由(8)知

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{Tu(t)}{1+t}\right\| &\le \left\|\frac{m_1}{m_0-m_1}\left(\frac{k_1}{k_0-k_1}+t\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\| \\
&\quad+\left\|\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\| \\
&\quad+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\| \\
&\le \frac{m_1}{m_0-m_1}\left(\frac{k_1}{k_0-k_1}+t\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f(s,u(s))\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f(s,u(s))\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\le \left[\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{k_0}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right]\int_0^1\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f(s,u(s))\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\le \left[\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{k_0}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right]\int_0^1\left[a(\tau)\|u\|+b(\tau)\right]\mathrm{d}\tau \\
&\le M_1\int_0^1\left[(1+\tau)a(\tau)\frac{\|u\|}{1+\tau}+b(\tau)\right]\mathrm{d}\tau \\
&\le M_1\left\{\int_0^1\left[(1+\tau)a(\tau)\right]\|u\|_D\,\mathrm{d}\tau+\int_0^1 b(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}
\end{aligned} \quad . \tag{9}
$$

由(H_1)知，$a(t),b(t)\in C[0,1]$，因此$a(t),b(t)$在I中是有界的，即存在正常数A和B，使得$\max\limits_{t\in I}a(t)\le A$，$\max\limits_{t\in I}b(t)\le B$。$u(t)\in DC[I,E]$，即：$\|u\|_D<+\infty$。再由(9)知

$$
\left\|\frac{(Tu)(t)}{1+t}\right\|<+\infty . \tag{10}
$$

由(8)知

$$
\begin{aligned}
(Tu)'(t) &= \frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau
\end{aligned} \quad . \tag{11}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\left\|(Tu)'(t)\right\| &\le \left\|\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\| \\
&\quad+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\| \\
&\le \frac{m_0}{m_0-m_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1\varphi_q\left(\int_0^\tau f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\le M_2\left\{\int_0^1\left[(1+\tau)a(\tau)\right]\|u\|_D\,\mathrm{d}\tau+\int_0^1 b(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \\
&< +\infty
\end{aligned} \quad . \tag{12}
$$

由(10)和(12)知，$(Tu)(t)$是良定义的并且$(Tu)(t)\in DC[I,E]$。

其次，算子 T 将 $DC[I,E]$ 中的有界集映成有界集。下面仅需证明对任意 $\eta>0$，存在正常数 $M'>0$，使得对任意 $u\in B_\eta$，其中 $B_\eta=\{u\in DC[I,E]:\|u\|_D\le\eta\}$，有 $\|Tu\|_D\le M'$。令

$$M^*=\max\{A,B\},$$

$$M'=M\left[\frac{5}{2}M^*\eta+M^*\right].$$

根据(H_1)和(9)知

$$\left\|\frac{(Tu)(t)}{1+t}\right\|\le M_1\left[\frac{5}{2}M^*\eta+M^*\right]\le M'. \tag{13}$$

根据(H_1)和(12)知

$$\left\|(Tu)'(t)\right\|\le M_2\left[\frac{5}{2}M^*\eta+M^*\right]\le M'. \tag{14}$$

由(13)和(14)知，算子 T 将 $DC[I,E]$ 中的有界集映成有界集。

最后证明算子 T 在 $DC[I,E]$ 中连续。令 $u_n,u\in DC[I,E]$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n-u\|_D\to0$。因此 $\{u_n\}$ 是 $DC[I,E]$ 中的有界子集，即：存在常数 $\gamma>0$，使得对任意 $n\ge1$，有 $\|u_n\|_D\le\gamma$，取极限得，$\|u\|_D\le\gamma$。另外，由(8)知

$$\left\|\frac{(Tu_n)(t)}{1+t}-\frac{(Tu)(t)}{1+t}\right\|\le\frac{M_1}{1+t}\int_0^1\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau. \tag{15}$$

由(H_2)知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n\ge N$ 时，有

$$\left\|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right\|\le M^{\frac{1}{1-q}}\varepsilon^{\frac{1}{q-1}}, \tag{16}$$

因此，对任意 $\varepsilon>0$，$t\in\mathrm{I}$，当 $n\ge N$ 时，有

$$\left\|\frac{(Tu_n)(t)}{1+t}-\frac{(Tu)(t)}{1+t}\right\|\le\frac{1}{1+t}\varepsilon<\varepsilon. \tag{17}$$

同理，对任意 $\varepsilon>0$，$t\in\mathrm{I}$，当 $n\ge N$ 时，有

$$\left\|(Tu_n)'(t)-(Tu)'(t)\right\|<\varepsilon.$$

所以

$$\|Tu_n-Tu\|_D<\varepsilon,$$

即：$T:DC[I,E]\to DC[I,E]$ 是连续的。引理得证。

引理 5 假设条件(H_1)成立并且 V 是 $DC[I,E]$ 中的有界集，则 $\dfrac{(TV)(t)}{1+t}$ 和 $(TV)'(t)$ 在 I 上是等度连续的。

证明：为了证明 $\dfrac{(TV)(t)}{1+t}$ 和 $(TV)'(t)$ 在 I 上是等度连续的，仅需证明下面的结论即可：

a) 对任意 $\varepsilon>0$，$u\in V$，存在 $\delta_1>0$，使得对任意 $t_1,t_2\in\mathrm{I}$，当 $|t_1-t_2|<\delta_1$ 时，有

$$\left\|\frac{(Tu)(t_2)}{1+t_2}-\frac{(Tu)(t_1)}{1+t_1}\right\|<\varepsilon;$$

b) 对任意 $\varepsilon>0$，$u\in V$，存在 $\delta_2>0$，使得对任意 $t_1,t_2\in\mathrm{I}$，当 $|t_1-t_2|<\delta_2$ 时，有

$$\left\|(Tu)'(t_2)-(Tu)'(t_1)\right\|<\varepsilon.$$

首先证明 $\dfrac{(TV)(t)}{1+t}$ 在 I 上是等度连续的。事实上，由条件(H_1)知

$$\int_0^t \left\| f\left(s,u(s)\right)\right\| \mathrm{d}s \le \varphi_p\left\{\left[(1+t)a(t)\right]\|u\|_D + b(t)\right\}.$$

由 V 的有界性，存在 $R>0$，使得对任意 $u\in V$，有 $\|u\|_D \le R$。对任意 $t_1,t_2\in \mathrm{I}$，不妨假设 $t_1<t_2$，再由(8)及 $\dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t}$ 关于 $t\,(s<t)$ 的单调性知

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{(Tu)(t_2)}{1+t_2}-\frac{(Tu)(t_1)}{1+t_1}\right\| \\
&\le \left|\frac{1}{1+t_2}-\frac{1}{1+t_1}\right|\left[\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right. \\
&\quad+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad+\left|\frac{1}{1+t_2}-\frac{1}{1+t_1}\right|\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad+\left\|\frac{1}{1+t_2}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right. \\
&\quad\left.-\frac{1}{1+t_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\| \\
&\le (t_2-t_1)\left[\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right. \\
&\quad\left.+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right] \\
&\quad+(t_2-t_1)\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad+\left\|\frac{1}{1+t_2}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_2-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right. \\
&\quad+\frac{1}{1+t_2}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad-\frac{1}{1+t_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\le (t_2-t_1)\left[\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right. \\
&\quad+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad+(t_2-t_1)\frac{m_1}{m_0-m_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\
&\quad\left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[\frac{(t_2-\tau)^{\alpha-1}}{1+t_2}-\frac{(t_1-\tau)^{\alpha-1}}{1+t_1}\right]\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f\left(s,u(s)\right)\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right] \\
&\le M_1\left(\frac{5M^*}{2}R+M^*\right)(t_2-t_1)+\frac{\frac{5M^*}{2}R+M^*}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{t_2^\alpha}{1+t_2}-\frac{t_1^\alpha}{1+t_1}-\frac{(t_2-t_1)^\alpha}{1+t_2}\right] \\
&\le M_1\left(\frac{5M^*}{2}R+M^*\right)(t_2-t_1)+\frac{\frac{5M^*}{2}R+M^*}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{t_2^\alpha}{1+t_2}-\frac{t_1^\alpha}{1+t_1}\right] \\
&\le \left(\frac{5M^*}{2}R+M^*\right)\left[M_1+\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](t_2-t_1)
\end{aligned}$$

.

令

$$\delta_1=\left\{\left(\frac{5M^*R}{2}+M^*\right)\left[M_1+\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]\right\}^{-1}\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$

因此对任意 $u\in V$ ， $t_1,t_2\in \mathrm{I}$，当 $t_2-t_1<\delta_1$ 时，有

$$\left\|\frac{(Tu)(t_2)}{1+t_2}-\frac{(Tu)(t_1)}{1+t_1}\right\|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon .$$

当 $t_1\ge t_2$ 时，同理可证上式成立。所以 $\frac{(TV)(t)}{1+t}$ 在 I 上是等度连续的。

其次证明 $(TV)'(t)$ 在 I 上是等度连续的。对任意 $u\in V$ ， $t_1,t_2\in \mathrm{I}$，不妨假设 $t_1<t_2$ ，由(11)知，

$$\begin{aligned}\left\|(Tu)'(t_2)-(Tu)'(t_1)\right\|&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left\|\int_0^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^{\tau}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right.\\&\quad\left.-\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^{\tau}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\|\\&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left\|\int_0^{t_1}(t_2-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^{\tau}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right.\\&\quad+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^{\tau}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&\quad\left.-\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^{\tau}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\|\\&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left\|\int_0^{t_1}\left[(t_2-\tau)^{\alpha-2}-(t_1-\tau)^{\alpha-2}\right]\varphi_q\left(\int_0^{\tau}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right\|\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_{t_1}^{t_2}\varphi_q\left(\int_0^{\tau}\left\|f(s,u(s))\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{5M^*}{2}R+M^*\right)\left[t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}-(t_2-t_1)^{\alpha-1}\right]\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{5M^*}{2}R+M^*\right)(t_2-t_1)\\&\le\frac{2^{\alpha-2}-1}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{5M^*}{2}R+M^*\right)(t_2-t_1)\end{aligned}$$

令

$$\delta_2=\left\{\frac{2^{\alpha-1}-1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{5M^*R}{2}+M^*\right)\right\}^{-1}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

因此对任意 $u\in V$ ， $t_1,t_2\in \mathrm{I}$，当 $t_2-t_1<\delta_2$ 时，有

$$\left\|(Tu)'(t_2)-(Tu)'(t_1)\right\|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon .$$

当 $t_1\ge t_2$ 时，同理可证上式成立。所以 $(TV)'(t)$ 在 I 上是等度连续的。

综上所述，引理得证。

引理 6 假设条件(H_1)成立并且 V 是 $DC[I,E]$ 中的有界集，则

$$\alpha_D(TV)=\max\left\{\sup_{t\in I}\alpha_E\left(\frac{(TV)(t)}{1+t}\right),\sup_{t\in I}\alpha_E(TV)'(t)\right\}.$$

3. 主要结果

下面给出边值问题(1)解的存在性。

定理 1 假设(H_1)-(H_3)成立，则边值问题(1)在$DC[I,E]$中至少有一个解。

证明：我们仅需证明算子T在$DC[I,E]$中至少有一个不动点即可。由(H_1)知，我们可以选择实数R，使得

$$R>\int_0^1 b(\tau)\mathrm{d}\tau\left\{M^{-1}-\int_0^1\left[(1+\tau)a(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\}^{-1}.$$

令

$$B:=B_D(\theta,R)=\left\{u\in DC[I,E]:\|u\|_D\le R\right\}.$$

首先证明$TB\subset B$。事实上，对任意$u\in B$，由(8)知

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(Tu)(t)}{1+t}\right\|&\le M_1\int_0^1\varphi_q\left(\int_0^\tau\left\|f(s,u(s))\right\|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&\le M_1\left\{\int_0^1\left[(1+\tau)a(\tau)\right]\|u\|_D\,\mathrm{d}\tau+\int_0^1 b(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\\&\le M_1\left\{R\int_0^1\left[(1+\tau)a(\tau)\right]\mathrm{d}\tau+R\left[M^{-1}-\int_0^1\left[(1+\tau)a(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right]\right\}^{-1}\\&<R\end{aligned}\quad. \tag{19}$$

同理可证，$\left\|(Tu)'(t)\right\|<R$。由引理 4 知，$TB\subset B$。令$D=\overline{co}_D(TB)$，即：$D$是$TB$在$DC[I,E]$中的凸闭包。显然，$D$是$B$的非空有界凸闭包。由引理 5 知，$\frac{(TB)(t)}{1+t}$和$(TB)'(t)$在 I 上是等度连续的，再由$D$的定义知，$\frac{D(t)}{1+t}$和$D'(t)$在 I 上是等度连续的。

下证算子T是由D映到D的严格集压缩映像。由$D\subset B$，$TB\subset D$，根据引理 4 知，$T:D\to D$是有界连续的。最后证明对任意$V\subset D$，有$\alpha_D(TV)\le l\alpha_D(V)$成立，其中

$$l=M\int_0^1\left[(1+s)l_1(s)+l_2(s)\right]\mathrm{d}s.$$

事实上，由引理 6 知，我们仅需证明

$$\sup_{t\in I}\alpha_E\left(\frac{(TV)(t)}{1+t}\right)\le l\alpha_D(V), \tag{20}$$

$$\sup_{t\in I}\alpha_E(TV)'(t)\le l\alpha_D(V). \tag{21}$$

先证(20)成立。由(H_2)及D的定义知$\left\{f(s,u(s),u'(s)):u\in D\right\}$在 I 上是等度连续的。因此，由$(H_3)$知，

$$\begin{aligned}\alpha_E\left(\frac{(TV)(t)}{1+t}\right) &\le \frac{m_1}{m_0-m_1}\left(\frac{k_1}{k_0-k_1}+t\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-2}\varphi_q\left(\int_0^\tau \alpha_E\left(\left\{f\left(s,u(s)\right):u\in V\right\}\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{k_1}{k_0-k_1}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau \alpha_E\left(f\left(s,u(s)\right):u\in V\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi_q\left(\int_0^\tau \alpha_E\left(f\left(s,u(s)\right):u\in V\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\ &\le M_1\int_0^1\varphi_q\left(\int_0^\tau \alpha_E\left(\left\{f\left(s,u(s)\right):u\in V\right\}\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau \\ &\le M_1\int_0^1\left[l_1(s)\alpha_E\left(V(s)\right)\right]\mathrm{d}s \\ &\le M_1\int_0^1\left[(1+s)l_1(s)\alpha_E\left(\frac{V(s)}{1+s}\right)\right]\mathrm{d}s \\ &\le M_1\alpha_D(V)\int_0^1\left[(1+s)l_1(s)\right]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

因为 t 是任意的，所以(20)成立。同理可证(21)成立。由引理 6 及(19)，(20)知，T 是由 D 映到 D 的严格集压缩映像。显然，T 也是凝聚的。由引理 1 知，T 在 D 中只有一个不动点，即：边值问题(1)在 $DC[I,E]$ 中至少有一个解。

4. 结论

本文主要利用 Kuratowski 非紧性测度的性质和 Sadovskii 不动点定理，在 Banach 空间中得到了带有 P-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题(1)解的存在性结果。

致　谢

作者对审稿人提出的宝贵意见表示衷心的感谢。

参考文献 (References)

[1] Li, C.F. and Luo, X.N. (2010) Existence of Positive Solutions of the Boundary Value Problem for Nonlinear Fractional Differentiial Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 1363-1375. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.029

[2] Rehman, M. and Khan, R. (2010) Existence and Uniqueness of Solutions for Multi-Point Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations. *Applied Mathematics Letters*, **23**, 1038-1044. https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.04.033

[3] Li, S.J., Liu, L.S., Wiwatanapataphee, B. and Wu, Y.H. (2013) Extremal Solutions for P-Laplacian Differential Systems via Iterative Computation. *Applied Mathematics Letters*, **26**, 1151-1158. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.06.014

[4] Zhang, C.G., Liu, L.S., Wiwatanapataphee, B. and Wu, Y.H. (2014) The Egenvalue for a Class of Singular P-Laplacian Fractional Differential Equations Involving the Riemann-Stieltjes Integral Boundary Conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **235**, 412-422. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.02.062

[5] Wang, J.H. and Xiang, H.J. (2010) Upper and Lower Solutions Method for a Class of Singular Fractional Boundary Value Problem with P-Laplacian Operator. *Abstract and Applied Analysis*, **2010**, Article ID: 971824. https://doi.org/10.1155/2010/971824

[6] Lu, L.H., Han, Z.L., Sun, S. and Liu, L. (2013) Existence of Positive Solutions for the Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations with P-Laplacian. *Advances in Difference Equations*, **2013**, 30. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-30

[7] Yang, X., Wei, Z.L. and Dong, W. (2011) Existence of Positive Solutions for the Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equations. *Common Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **6**, 1371-1385.

[8] Aubin, J.P. and Ekeland, I. (1984) Applied Nonlinear Analysis. John Wiley and Sons, New York.