Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(3), 155-158
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73019

A Finite Extension of a Finitely Generated Torsion-Free Nilpotent Groups with Automorphisms of Order Four

Xiaodi Ma[1], Yanping Zhang[2], Tao Xu[2*]

[1]College of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu
[2]College of Science, Hebei University of Engineering, Handan Hebei
Email: Dmaxiaodi@163.com, ping801013@sina.com, *gtxutao@163.com

Received: Apr. 26th, 2017; accepted: May 12th, 2017; published: May 16th, 2017

Abstract

Let G be a finite extension of a finitely generated torsion-free nilpotent group and α be an automorphism of order four of G. If the map $G \to G$ defined by $g^{\varphi} = [g, \alpha]$ is surjective, then the second derived subgroup G'' is included in the centre of G and $C_G(\alpha^2)$ is an Abelian group.

Keywords

Finitely Generated, Torsion-Free Nilpotent Group, Finite Extension, Automorphism

有限生成无挠幂零群的有限扩张的4阶自同构

马晓迪[1]，张艳萍[2]，徐　涛[2*]

[1]南京理工大学计算机科学与工程学院，江苏 南京
[2]河北工程大学数理学院，河北 邯郸
Email: Dmaxiaodi@163.com, ping801013@sina.com, *gtxutao@163.com

收稿日期：2017年4月26日；录用日期：2017年5月12日；发布日期：2017年5月16日

摘　要

设G是有限生成无挠幂零群的有限扩张，α是G的4阶自同构且$\varphi: G \to G(g \mapsto [g, \alpha])$是满射，则$G$的

*通讯作者。

文章引用: 马晓迪, 张艳萍, 徐涛. 有限生成无挠幂零群的有限扩张的 4 阶自同构[J]. 理论数学, 2017, 7(3): 155-158.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73019

二阶导群 G'' 包含在 G 的中心 $Z(G)$ 里且 $C_G(\alpha^2)$ 是Abel群。

关键词

有限生成，无挠幂零群，有限扩张，自同构

1. 引言和主要结果

本文采用的符号和术语都是标准的，按照[1]。

在群论里，如果群 G 的自同构 α 没有非平凡的不动点，则称 α 是正则自同构。

对于 2 阶正则自同构，Burnside [2]证明了一个经典结果。即

命题 1.1. 设 G 是有限群，α 是 G 的 2 阶正则自同构当且仅当 G 是奇阶 Abel 群。

对于素数阶正则自同构，Higman [3]用 Lie 环的方法证明了：如果局部幂零群的 G 具有素数 p 阶的正则自同构，那么 G 是幂零类不超过 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是只与 p 有关的函数。

舍去自同构的正则性，在满射的条件下，考虑自同构的阶数对群结构的影响，我们在[4]中研究了有限生成无挠幂零群的素数 p 阶自同构，证明了：如果 α 是有限生成无挠幂零群 G 的 p 阶自同构，且 $\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$ 是满射，则 G 是幂零类不超过 $h(p)$ 的幂零群，其中 $h(p)$ 是只与 p 有关的函数。

在[5]中，我们考虑了有限生成无挠幂零群的 4 阶自同构的情况，得到了：

命题 1.3. 设 G 是有限生成无挠幂零群，α 是 G 的 4 阶自同构且 $\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$ 是满射，则以下结论成立

(i) $G'' \le Z(G)$；

(ii) $C_G(\alpha^2)$ 是 Abel 群。

在本文中，我们研究了有限生成无挠幂零群的有限扩张的 4 阶自同构，得到了下面的结果，推广了命题 1.3。

定理 1.1. 设 G 是有限生成无挠幂零群的有限扩张，α 是 G 的 4 阶自同构且 $\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$ 是满射，则以下结论成立:

(i) $G'' \le Z(G)$；

(ii) $C_G(\alpha^2)$ 是 Abel 群。

2. 定理的证明

引理 2.1. 设 G 是一群，α 是 G 的 n 阶自同构且 $\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$ 是满射，则对于任意的 $x \in G$，有 $xx^{\alpha}x^{\alpha^2}\cdots x^{\alpha^{n-1}} = 1$。

证明 因为 φ 是满射，所以对于任意的 $x \in G$，存在某个 $g \in G$，使得 $x = [g,\alpha]$。因此

$$xx^{\alpha}x^{\alpha^2}\cdots x^{\alpha^{n-1}} = [g,\alpha][g,\alpha]^{\alpha}[g,\alpha]^{\alpha^3}\cdots[g,\alpha]^{\alpha^{n-1}} = g^{-1}g^{\alpha^n} = g^{-1}g = 1$$

引理 2.2. 设 G 是有限群，α 是 G 的一个自同构，如果映射 $\varphi: G \to G\left(g \mapsto [g,\alpha]\right)$ 是满射，则 α 是 G

的正则自同构。

证明 因为G是有限群，所以φ是单射。任取$x\in G$，设$x^{\alpha}=x$，则有$x^{\varphi}=[x,\alpha]=x^{-1}x^{\alpha}=1$，进而$x=1$。因此$\alpha$是正则自同构。

引理 2.3. 设G是一群，H是G的指数有限的特征子群。如果映射$\varphi:G\to G(g\mapsto[g,\alpha])$是满射，其中$\alpha$是$G$的一个自同构，则$\alpha$在$G/H$上诱导的自同构是正则的。

证明 因为φ是满射，所以$\overline{\varphi}:G/H\to G/H(gH\mapsto[gH,\alpha])$是满射，由引理 2.2 知$\alpha$诱导了$G/H$的正则自同构。

引理 2.4. 设G是有限生成无挠幂零群的有限扩张，α是G的n阶自同构且$\varphi:G\to G(g\mapsto[g,\alpha])$是满射，则$G$有一个指数有限的特征子群$H$，使得以下结论成立

(i) $\bigcap_{t>0}H^{p^t}=1$；

(ii) 对于任意的正整数t，α诱导了G/H^{p^t}的正则自同构α_t。

证明 (i) 设G/N是有限群，N是有限生成的无挠幂零群。设G/N的幂指数为e，则$G^e\le N$是有限生成的无挠幂零群。记$G^e=H$，则G/H是有限群，由[1]的定理 5.2.21 可知H是剩余有限p-群。因此对于任意的正整数t，H/H^{p^t}是有限p-群且$\bigcap_{t>0}H^{p^t}=1$。

(ii) 易知$\overline{\varphi}:G/H^{p^t}\to G/H^{p^t}\left(gH^{p^t}\mapsto\left[gH^{p^t},\alpha\right]\right)$是满射，由引理 2.3 可知$\alpha_t$是正则自同构。

引理 2.5. [6] 设G是局部有限群，α是G的 4 阶正则自同构，则G''包含在$Z(G)$中。

定理 1.1 的证明 (i) 取$p\ne2$，根据引理 2.4 的(ii)我们可以知道对于任意的正整数t，α诱导了G/H^{p^t}的正则自同构α_t。易知α_t的阶数整除 4。由命题 1.1 和引理 2.5 知道$\left(G/H^{p^t}\right)''$包含在G/H^{p^t}的中心里。因此$\left[\left(G/H^{p^t}\right)'',G/H^{p^t}\right]=1$。即$\left[G''H^{p^t},G\right]\le H^{p^t}$。从而

$$[G'',G]\le\left[G''H^{p^t},G\right]\le H^{p^t}$$

进而

$$[G'',G]\le\bigcap_{t>0}H^{p^t}$$

因为$\bigcap_{t>0}H^{p^t}=1$，所以$G''\le Z(G)$。

(ii) 记$\varphi=\alpha^2$，只需证$C_G(\varphi)$是 Abel 群即可。取$p\ne2$，考虑$C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})$。如果$C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})=1$，则$\overline{\varphi}$是$G/H^{p^t}$的 2 阶正则自同构。由命题 1.1 知道$G/H^{p^t}$是 Abel 群。因此对于任意的$g_1,g_2\in G$，有$[\overline{g}_1,\overline{g}_2]=1$。即$[g_1,g_2]\in H^{p^t}$。因为$\bigcap_{t>0}H^{p^t}=1$，所以$[g_1,g_2]=1$。这表明$G$是 Abel 群。显然$C_G(\varphi)$也是 Abel 群。如果$C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})\ne1$，则$C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})$是$\overline{\alpha}$-不变，因此$\overline{\alpha}$是$C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})$的 1 阶或 2 阶自同构。注意到

$$C_{C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})}(\overline{\alpha})\le C_{G/H^{p^t}}(\overline{\alpha})=1$$

于是$\overline{\alpha}$是$C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})$的正则自同构。因为$C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})\ne1$，所以$\overline{\alpha}$是$C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})$的 2 阶正则自同构。由命题 1.1 知道$C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})$是 Abel 群。注意到

$$C_G(\varphi)/C_G(\varphi)\cap H^{p^t}\cong C_G(\varphi)H^{p^t}/H^{p^t}\le C_{G/H^{p^t}}(\overline{\varphi})$$

我们有$C_G(\varphi)/C_G(\varphi)\cap H^{p^t}$是 Abel 群。所以对于任意的$g_1,g_2\in C_G(\varphi)$，有$[\overline{g}_1,\overline{g}_2]=1$。即

$[g_1, g_2] \in C_G(\varphi) \cap H^{p^t} \le H^{p^t}$。因为$\bigcap_{t>0} H^{p^t} = 1$，所以$[g_1, g_2] = 1$。这表明$C_G(\varphi)$是 Abel 群。

基金项目

国家数学天元青年基金(11626078)，河北省教育厅青年基金(QN2016184)和邯郸市科学技术研究与发展计划项目(1624230057-3)资助。

参考文献 (References)

[1] Robinson, D.J.S. (1996) A Course in the Theory of Groups. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8594-1

[2] Burnside, W. (1955) Theory of Groups of Finite Order. 2nd Edition, Dover Publications Inc., New York.

[3] Higman, G. (1957) Groups and Rings Having Automorphisms without Non-Trivial Fixed Elements. *Journal of the London Mathematical Society*, **s1-32**, 321-334. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-32.3.321

[4] Tao, X. and Liu, H.G. (2016) Finitely Generated Torsion-Free Nilpotent Groups Admitting an Automorphism of Prime Order. *Communications in Mathematical Research*, **32**, 167-172.

[5] 马晓迪, 徐涛. 有限生成无挠幂零群的 4 阶自同构[J]. 理论数学, 2016, 6(5): 437-440.

[6] Kovács, L.G. (1961) Group with Regular Automorphisms of Order Four. *Mathematische Zeitschrift*, **75**, 277-294. https://doi.org/10.1007/BF01211026