Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(3), 163-167
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73021

Hans汉斯

The Generalized Commutativity Degree of 4-Latters Symmetric Group S_4

Xin Li, Fang Zhou

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: shuxueaxin@163.com, fangzhou20@.aliyun.com

Received: Apr. 29th, 2017; accepted: May 13th, 2017; published: May 17th, 2017

Abstract

The generalized commutativity degree and subgroup commutativity degree of 4-letters symmetric group S_4 are obtained by using modified elements and normalization of symmetric group S_n.

Keywords

Modified Element, Normalization, Commutativity Degree, Symmetric Group

4次对称群S_4的广义交换度

李　欣，周　芳

太原师范学院数学系，山西　晋中
Email: shuxueaxin@163.com, fangzhou20@.aliyun.com

收稿日期：2017年4月29日；录用日期：2017年5月13日；发布日期：2017年5月17日

摘　要

利用变形元和对称群 S_n 子群的正规化子计算了 S_4 的子群交换度和广义交换度。

关键词

变形元，正规化子，交换度，对称群

文章引用: 李欣, 周芳. 4 次对称群 S_4 的广义交换度[J]. 理论数学, 2017, 7(3): 163-167.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73021

1. 引言

本文所讨论的群均为有限群。

有限群的交换度及子群的交换度和广义交换度是刻画交换性质的三个重要数量指标。Tărnăuceanu [1]定义了群 G 的子群交换度

$$sd(G)=\frac{\left|\left\{(H,K)\in\mathcal{L}(G)^2 \mid HK\in\mathcal{L}(G)\right\}\right|}{\left|\mathcal{L}(G)\right|^2}$$

其中 $\mathcal{L}(G)$ 为群 G 的子群格。Russo [2]定义了群 G 的广义交换度，为了方便计算，采用如下记法：

$$gd(G)=\frac{\sum_{X\in\mathcal{L}(G)}\left|N_G(X)\right|}{|G|\left|\mathcal{L}(G)\right|}$$

以此对比于交换度

$$d(G)=\frac{\left|(x,y)\in G\times G \mid xy=yx\right|}{|G|^2}$$

并已获得很多重要的结果。文[3]通过考虑一类内交换群，探索了有限群的幂零性与其广义交换度之间的关系，并对于对称群及非交换单群的广义交换度能否计算提出了疑问，而 n 次对称群 S_n 是一个重要的群。当 n 较大时，要找出的 S_n 所有子群及各个子群的结构非常困难。本文对 S_4 的交换性进行了分析，并给出具体的计算公式。

文[4]给出了 S_4 的所有子群。

2 个平凡子群：

$$H_1=\{(1)\},H_2=S_4;$$

9 个 2 阶子群：

$$\begin{aligned}&H_3=\{(1),(12)\},H_4=\{(1),(13)\},H_5=\{(1),(14)\},H_6=\{(1),(23)\},\\&H_7=\{(1),(24)\},H_8=\{(1),(34)\},H_9=\{(1),(12)(34)\},\\&H_{10}=\{(1),(13)(24)\},H_{11}=\{(1),(14)(23)\};\end{aligned}$$

4 个 3 阶子群：

$$\begin{aligned}&H_{12}=\{(1),(123),(132)\},H_{13}=\{(1),(124),(142)\},\\&H_{14}=\{(1),(134),(143)\},H_{15}=\{(1),(234),(243)\};\end{aligned}$$

7 个 4 阶子群：

$$\begin{aligned}&H_{16}=\{(1),(1234),(13)(24),(1432)\},H_{17}=\{(1),(1243),(14)(23),(1342)\},\\&H_{18}=\{(1),(1324),(12)(34),(1423)\},H_{19}=\{(1),(12),(34),(12)(34)\},\\&H_{20}=\{(1),(13),(24),(13)(24)\},H_{21}=\{(1),(14),(23),(14)(23)\},\\&H_{22}=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\};\end{aligned}$$

4 个 6 阶子群：

$$H_{23}=\{(1),(12),(13),(123),(132),(23)\},H_{24}=\{(1),(12),(14),(124),(142),(24)\},$$
$$H_{25}=\{(1),(13),(14),(134),(143),(34)\},H_{26}=\{(1),(23),(24),(234),(243),(34)\};$$

3 个 8 阶子群：

$$H_{27}=\{(1),(1234),(1432),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(13),(24)\},$$
$$H_{28}=\{(1),(1243),(1342),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(14),(23)\},$$
$$H_{29}=\{(1),(1324),(1423),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(12),(34)\};$$

1 个 12 阶群 A_4：

$$H_{30}=\{(1),(123),(132),(134),(143),(124),(142),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}.$$

文[5]给出了对称群 S_n 中各类子群正规化子的计算。两个元素 a,b 称为是共轭的，如果该群中存在元 g，使 $gag^{-1}=b$ 成立，这时 b 称作 a 的变形，称 g 为将 a 变形为 b 的变形元。其中对称群 S_n 中的共轭类是由具有相同循环结构的元素组成。文[5]给出了对称群 S_n 中不同形式元素的变形元形式。对称群 S_n 中由 a 生成的循环子群 $H=(a)$ 的正规化子是由 a 的一切自变形元构成。一般子群 H 的正规化子，先将 H 的元分成若干个共轭类，然后求出使各共轭类中的元素互变的子集 G_i，即为各元素变形元的交集。再求各个 G_i 的交集，此即为 H 在 S_n 中的正规化子。

2. 子群的正规化子

首先，通过子群结构分析正规化子。接下来，利用文[2]的方法给出正规化子来计算广义交换度等。

显然，两个平凡子群 $H_1,H_2 \lhd S_4$。

2.1. 2 阶子群

S_4 有 9 个 2 阶子群，且均为循环群。子群 H_3 的生成元为 (12)，则 H_3 的正规化子由 (12) 的一切自变形元构成，且正规化子个数为 4。而 (12) 的自变形元为 H_{19}，即 $H_3 \lhd H_{19}$。而由生成元的结构，同理可得 $H_4 \lhd H_{20}$，$H_5 \lhd H_{21}$，$H_6 \lhd H_{21}$，$H_7 \lhd H_{20}$，$H_8 \lhd H_{19}$。对于剩余的 H_9，H_{10}，H_{11} 可计算得正规化子个数为 8。子群 H_9 的生成元 $(12)(34)$ 的自变形元为 H_{29}，即 $H_9 \lhd H_{29}$，同理可得 $H_{10} \lhd H_{27}$，$H_{11} \lhd H_{28}$。

2.2. 3 阶子群

同上 2 阶子群的讨论，S_4 有 4 个 3 阶子群，且均为循环群。子群 H_{12} 的生成元为 (123)，则 H_{12} 的正规化子由 (123) 的一切自变形元构成，且正规化子个数为 6。而 (123) 变形为自身的自变形元为 (1)，(123)，(132)；(123) 变形为 (132) 的自变形元为 (23)，(12)，(13)。所以 $H_{12} \lhd H_{23}$。同理可得 $H_{13} \lhd H_{24}$，$H_{14} \lhd H_{25}$，$H_{15} \lhd H_{26}$。

2.3. 4 阶子群

S_4 有 7 个 4 阶子群，其中 3 个为循环群：H_{16}，H_{17}，H_{18}。剩余为 4 个 Klein4 元群：H_{19}，H_{20}，H_{21}，H_{22}。子群 H_{16} 的生成元为 (1234)，则 H_{16} 的正规化子由 (1234) 的一切自变形元构成，且正规化子个数为 8。而 (1234) 变形为自身的自变形元为 (1)，(1234)，$(13)(24)$，(1432)；(1234) 变形为 (1432) 的自变形元为 (24)，(13)，$(12)(34)$，$(14)(23)$。所以 $H_{16} \lhd H_{27}$。同理可得 $H_{17} \lhd H_{28}$，$H_{18} \lhd H_{29}$。

子群 H_{19} 为非循环子群，有 3 个共轭类：$\{(1)\}$，$\{(12),(34)\}$，$\{(12)(34)\}$。显然共轭类 $\{(1)\}$ 的正规

化子为 S_4。(12) 变形为自身的自变形元为 H_{19}；(12) 变形为 (34) 的自变形元为 $(13)(24)$，(1423)，(1324)，$(23)(14)$；即共轭类 $\{(12),(34)\}$ 的正规化子为 H_{29}。共轭类 $\{(12)(34)\}$ 的正规化子为 $(12)(34)$ 的自变形元，即 H_{29}。所以 $H_{19} \lhd H_{29}$。同理可得 $H_{20} \lhd H_{27}$， $H_{21} \lhd H_{28}$。

而 H_{22} 有 2 个共轭类：$\{(1)\}$，$\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$。显然共轭类 $\{(1)\}$ 的正规化子为 S_4。第二个共轭类的正规化子为各元素互变的自变形元的集合。$(12)(34)$ 变形为自身的自形元为 H_{29}；$(12)(34)$ 变形为 $(13)(24)$ 的自变形元为 $\{(23),(324),(123),(1243),(1342),(142),(14),(134)\}$；$(12)(34)$ 变形为 $(14)(23)$ 的自变形元为 $\{(423),(24),(1234),(124),(132),(13),(1432),(143)\}$。所以第二个共轭类的正规化子为 S_4。取交集可得 $H_{22} \lhd S_4$。

2.4. 6 阶子群

S_4 有 4 个同构于 S_3 的 6 阶子群：H_{23}，H_{24}，H_{25}，H_{26}，其中子群 H_{23} 有 3 个共轭类：$\{(1)\}$，$\{(12),(13),(23)\}$，$\{(123),(132)\}$。显然共轭类 $\{(1)\}$ 的正规化子为 S_4。共轭类 $\{(12),(13),(23)\}$ 的正规化子为 G_2。(12) 变形为自身的自变形元为 H_{19}；(12) 变形为 (13) 的自变形元为 (23)，(324)，(123)，(1243)；(12) 变形为 (23) 的自变形元为 $\{(132),(13),(1432),(143)\}$。所以

$$G_2 = \{(1),(12),(34),(12)(34),(23),(243),(123),(1243),(132),(13),(143),(1432)\}$$

第三个共轭类 $\{(123),(132)\}$ 的正规化子为 G_3。(123) 变形为自身的自变形元为 $\{(1),(123),(132)\}$；(123) 变形为 (132) 的自变形元为 $\{(23),(12),(13)\}$。所以 $G_3 = H_{23}$。取交集，迫使 H_{23} 的正规化子为自身。同理可得 H_{24}，H_{25}，H_{26} 的正规化子只能为自身。

2.5. 8 阶子群

S_4 有 3 个 8 阶子群：H_{27}，H_{28}，H_{29}，其中子群 H_{29} 有 4 个共轭类：$\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，$\{(1)\}$，$\{(1324),(1423)\}$，$\{(12),(34)\}$。显然共轭类 $\{(1)\}$ 的正规化子为 S_4；共轭类 $\{(12),(34)\}$ 的正规化子为 H_{29}；共轭类 $\{(1324),(1423)\}$ 的正规化子为 H_{29}；共轭类 $\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ 的正规化子为 S_4。取交集，迫使 H_{29} 的正规化子为自身。同理可得 H_{27}，H_{28} 的正规化子只能为自身。

2.6. 12 阶子群

S_4 有且仅有 1 个 12 阶子群 $A_4 = H_{30} \lhd S_4$。

3. S_n 的广义交换度

下面计算 S_4 的广义交换度及子群交换度。

广义交换度：

$$gd(S_4) = \frac{11}{30}$$

子群交换度：

$$sd(S_4) = \frac{49}{150}$$

本文第二部分给出了 S_4 部分元素的稳定子。显然，1 阶元和 2 阶元的稳定子都已给出。接下给出剩余的 3 阶元和 4 阶元的稳定子。(123) 和 (132) 的稳定子为 H_{12}；(124) 和 (142) 的稳定子为 H_{13}；(134) 和 (143) 的稳定子为 H_{14}；(234) 和 (243) 的稳定子为 H_{15}。(1234) 和 (1432) 的稳定子为 H_{16}；(1243) 和 (1342) 的稳定子为 H_{17}；(1324) 和 (1423) 的稳定子为 H_{18}。此时可以计算交换度。所以，S_4 的交换度为：

$$d(S_4)=\frac{5}{24}$$

4. 结束语

本文给出了 S_4 的交换性刻画。此方法同样适用于较大阶的对称群 S_n 的交换性的计算。

基金项目

国家自然基金(11401424)项目资助。

参考文献 (References)

[1] Tărnăuceanu, M. (2009) Subgroup Commutativity Degrees of Finite Groups. *Journal of Algebra*, **321**, 2508-2520. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2009.02.010

[2] Russo, F. (2009) The Generalized Commutativity Degree in a Finite Group. *Acta Universitatis Apulensis. Mathematics-Informatics*, **18**, 161-167.

[3] 周峰, 周芳, 刘合国. 有限群的广义交换度[J]. 数学年刊, 2016, 37A(2): 1-10.

[4] 孙自行, 崔方达. 4 次对称群 S_4 的子群个数及其证明[J]. 阜阳师范学院学报自科版, 2005, 22(4): 13-16.

[5] 郭旭初. 关于对称群的 S_n 中各子群的正规化子[J]. 常德师范学院学报自科版, 1999, 11(4): 4-6.