Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(3), 176-185
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73023

One Method of Transformation of Infinite Series

Yanli Chen, Laiping Zhang, Wanhui Ji

Department of Basic, Yinchuan Energy Institute, Yinchuan Ningxia
Email: chenyanli8866.hi@163.com

Received: Apr. 30th, 2017; accepted: May 14th, 2017; published: May 18th, 2017

Abstract

By selecting the "transformation kernel" function, some infinite series identities are given by using the residual theorem of the complex function.

Keywords

Transformation Kernels, Residue, Infinite Series, Gamma Function, Identity

无穷级数变换的一种方法

陈艳丽，张来萍，及万会

银川能源学院基础部，宁夏 银川
Email: chenyanli8866.hi@163.com

收稿日期：2017年4月30日；录用日期：2017年5月14日；发布日期：2017年5月18日

摘　要

本文选取“变换核”函数，利用复变函数的留数定理给出一些形式各异的无穷级数恒等式。

关键词

变换核，留数，无穷级数，伽马函数，恒等式

文章引用: 陈艳丽, 张来萍, 及万会. 无穷级数变换的一种方法[J]. 理论数学, 2017, 7(3): 176-185.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73023

1. 引言

无穷级数变换有许多文献。著作[1]收录 1000 多级数公式，著作[2]介绍无穷级数求和的各种技术。文[3] [4] [5]讨论组合数和式问题。文[6] [7] [8]用裂项法给出中心型和非中心型二项式系数倒数级数封闭型和式问题。无穷级数与数学各个分支紧密联系，也可以说无穷级数与数学各个分支融合在一起。因此研究无穷级数时常常利用微分，积分，伽马白塔函数，多对数，发生函数，递推关系等各种数学工具和方法。

我们选取一些“变换核”函数，证明形式各异的无穷级数恒等式。利用复变函数的留数定理计算函数在极点的留数，特别是通常多重留数计算公式 $\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$ 失效时，我们选用文[9] [10]中 2 重，3 重极点留数公式去计算留数，同时应用“变换核”函数在复平面上的围线积分，得到一些形式各异的级数恒等式。

2. 主要结果与证明

命题 1 如果 $\alpha,\beta>0$，且 $\alpha\beta=\pi^2/4$，则无穷级数恒等式成立

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left[\cosh(2n+1)\alpha+\cos(2n+1)\alpha\right]}\\&+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cosh\left((2n+1)\beta\right)\cos\left((2n+1)\beta\right)}{(2n+1)\pi\cosh\left((2n+1)\pi/2\right)\left[\cosh\left((4n+2)\beta\right)+\cos\left((4n+2)\beta\right)\right]}=\frac{\pi}{8}\end{aligned}\tag{1}$$

证明：选择变换核函数 $f(z)=\frac{1}{z\left[\cosh(\alpha z)+\cos(\alpha z)\right]\cos(\pi z/2)}$，函数 $f(z)$ 在矩形 C_N，$N\ge1$ 上积分，C_N 表示中心在原点，水平边和垂直边的矩形，当 $N\to\infty$ 时，有矩形 $C_N\to\infty$。$f(z)$ 有单极点 $z=0,\ z=2n+1$ 和 $z=(2n+1)\pi i(1\pm i)/2\alpha$。

1) 在极点在 $z=0$，计算 $f(z)$ 得留数，易得 $Res[f;0]=\frac{1}{2}$；

2) 在极点 $z=2n+1$，计算函数 $f(z)$ 的留数，用洛必达法则

$$\begin{aligned}Res[f;2n+1]&=\lim_{z\to2n+1}\frac{z-2n-1}{z\left[\cosh(\alpha z)+\cos(\alpha z)\right]\cos(\pi z/2)}\\&=\frac{1}{(2n+1)\left[\cosh(\alpha(2n+1))+\cos(\alpha(2n+1))\right]\left[(-\pi/2)\sin(\pi(2n+1)/2)\right]}\\&=\frac{-2(-1)^n}{\pi(2n+1)\left[\cosh(\alpha(2n+1))+\cos(\alpha(2n+1))\right]}=Res[f;-2n-1]\end{aligned}$$

3) 在极点 $z=(2n+1)\pi i(1+i)/2\alpha$，计算函数 $f(z)$ 的留数，用洛必达法则，利用并利用双曲函数展开式以及与三角函数关系计算，利用关系式 $\alpha\beta=\pi^2/4$

$$Res\left[f;(2n+1)\pi i(1+i)/2\alpha\right]=Res\left[f;(2n+1)\pi(-1+i)/2\alpha\right]$$
$$=\lim_{z\to(2n+1)\pi(-1+i)/2\alpha}\frac{z-(2n+1)\pi(-1+i)/2\alpha}{z\left[\cosh(\alpha z)+\cos(\alpha z)\right]\cos(\pi z/2)}$$
$$=\lim_{z\to(2n+1)\pi(-1+i)/2\alpha}\frac{1}{z\alpha\left[\sin h(\alpha z)-\sin(\alpha z)\right]\cos(\pi z/2)}$$
$$=\lim_{z\to(2n+1)\pi(-1+i)/2\alpha}\frac{2}{(2n+1)\pi(-1+i)\left[\sinh((2n+1)\pi(-1+i)/2)-\sin((2n+1)\pi(-1+i)/2)\right]\cos(\pi(2n+1)\pi(-1+i)/4\alpha)}$$
$$=\frac{2}{(2n+1)\pi(-1+i)(-1)^n(1+i)\cosh((2n+1)\pi/2)\cos((2n+1)(-1+i)\beta)}$$
$$=-\frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi/2)\cos((2n+1)(-1+i)\beta)}$$
$$=Res\left[f;-(2n+1)\pi(-1+i)/2\alpha\right]$$

4) 在极点 $z=(2n+1)\pi i(1-i)/2\alpha$，计算 $f(z)$ 的留数

$$Res\left[f;(2n+1)\pi i(1-i)/2\alpha\right]=Res\left[f;(2n+1)\pi(1+i)/2\alpha\right]$$
$$=\lim_{z\to(2n+1)\pi(1+i)/2\alpha}\frac{z-(2n+1)\pi(1+i)/2\alpha}{z\left[\cosh(\alpha z)+\cos(\alpha z)\right]\cos(\pi z/2)}$$
$$=\lim_{z\to(2n+1)\pi(1+i)/2\alpha}\frac{1}{z\alpha\left[\sinh(\alpha z)-\sin(\alpha z)\right]\cos(\pi z/2)}$$
$$=\lim_{z\to(2n+1)\pi(1+i)/2\alpha}\frac{1}{(2n+1)\pi(1+i)\left[\sinh((2n+1)\pi(1+i)/2)-\sin((2n+1)\pi(1+i)/2)\right]\cos(\pi(2n+1)\pi(1+i)/4\alpha)}$$
$$=\frac{1}{(2n+1)\pi(1+i)/2(-1)^n(-1+i)\cosh((2n+1)\pi/2)\cos((2n+1)(1+i)\beta)}$$
$$=-\frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi/2)\cos((2n+1)(1+i)\beta)}$$
$$=Res\left[f;-(2n+1)\pi(1+i)/2\alpha\right]$$

$$Res\left[f;(2n+1)\pi i(1-i)/2\alpha\right]+Res\left[f;(2n+1)\pi i(1+i)/2\alpha\right]$$
$$=-\frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi/2)}\left[\frac{1}{\cos((2n+1)(-1+i)\beta)}+\frac{1}{\cos((2n+1)(1+i)\beta)}\right]$$
$$=-\frac{(-1)^n\left[\cos((2n+1)(-1+i)\beta)+\cos((2n+1)(1+i)\beta)\right]}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi/2)\cos((2n+1)(-1+i)\beta)\cos((2n+1)(1+i)\beta)}$$
$$=-\frac{4(-1)^n\left[\cos((2n+1)i\beta)\cos((2n+1)\beta)\right]}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi/2)\left[\cos(2(2n+1)i\beta)+\cos(2(2n+1)\beta)\right]}$$
$$=-\frac{4(-1)^n\cos((2n+1)i\beta)\cos((2n+1)\beta)}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi/2)\left[\cos((4n+2)i\beta)+\cos((4n+2)\beta)\right]}$$
$$=Res\left[f;-(2n+1)\pi i(1-i)/2\alpha\right]+Res\left[f;-(2n+1)\pi i(1+i)/2\alpha\right]$$

根据文[11]留数基本定理如果函数 $f(z)$ 在 C_N 内只有有限个奇点，$\lim\limits_{N\to\infty}\int_{C_N} f(z)\mathrm{d}z = 0$。从而有

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left[\cosh(\alpha(2n+1)) + \cos(\alpha(2n+1))\right]} \\
-\frac{4}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\cosh((2n+1)\beta)\cos((2n+1)\beta)}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi/2)\left[\cosh((4n+2)\beta) + \cos((4n+2)\beta)\right]}
\end{aligned}
$$

由此得出
$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left[\cosh(2n+1)\alpha + \cos(2n+1)\alpha\right]} \\
&+ 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cosh((2n+1)\beta)\cos((2n+1)\beta)}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi/2)\left[\cosh((4n+2)\beta) + \cos((4n+2)\beta)\right]} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$
(1)式成立。

命题 2 设 α, β 为复数，且 $Re(\alpha+\beta) > 0$，下面伽马函数级数恒等式成立

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\Gamma(\alpha-k)\Gamma(\beta+k+1)} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\Gamma(\beta-k)\Gamma(\alpha+k+1)} \\
&= \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(\beta+1/2)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

证明：选取变换核函数 $f(z) = \dfrac{\pi}{(z-1/2)\sin(\pi z)\Gamma(\alpha+z)\Gamma(\beta-z+1)}$，$f(z)$ 有单极点 $z = 1/2$，$z = -k$，$z = k$

1) 在极点 $z = 1/2$，算 $f(z)$ 的留数

$$
Res[f;1/2] = \lim_{z\to 1/2}\frac{(z-1/2)\pi}{(z-1/2)\sin(\pi z)\Gamma(\alpha+z)\Gamma(\beta-z+1)} = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(\beta+1/2)}
$$

2) 在极点 $z = -k$，计算 $f(z)$ 的留数

$$
\begin{aligned}
Res[f;-k] &= \lim_{z\to -k}\frac{(z-k)\pi}{(z-1/2)\sin(\pi z)\Gamma(\alpha+z)\Gamma(\beta-z+1)} \\
&= \frac{\pi}{(-k-1/2)\pi\cos(-k\pi)\Gamma(\alpha-k)\Gamma(\beta+k+1)} \\
&= \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)\Gamma(\alpha-k)\Gamma(\beta+k+1)}
\end{aligned}
$$

3) 在极点 $z = k$，计算 $f(z)$ 的留数

$$
\begin{aligned}
Res[f;k] &= \lim_{z\to k}\frac{(z+k)\pi}{(z-1/2)\sin(\pi z)\Gamma(\alpha+z)\Gamma(\beta-z+1)} \\
&= \frac{\pi}{(k-1/2)\pi\cos(k\pi)\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta-k+1)} \\
&= \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta-k+1)}
\end{aligned}
$$

设 C_N 为中心在原点的矩形，顶点为 $(-1+i)N, (1+i)N, (1-i)N, (-1-i)N$ 的矩形，它的边长为 $2N$ 的

矩形当 $N\to\infty$ 时，$\int_{C_N} f(z)\mathrm{d}z = 0$，即

$$0=\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(\beta+1/2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)\Gamma(\alpha-k)\Gamma(\beta+k+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta-k)}$$

整理得到(2)式。

命题 3 无穷级数恒等式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sinh(n\pi)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n\left(\mathrm{e}^{2n\pi}-1\right)}=\frac{\pi}{3}-\ln 2 \tag{3}$$

证明：选择变换核函数 $f(z)=\dfrac{\pi}{z\left(\mathrm{e}^{2\pi z}-1\right)\sin(\pi z)}$，$f(z)$ 有单极点 $z=\pm ni$，$z=\pm n$ 和点 $z=0$ 有 3 重极点。

1) 展开函数 $f(z)$ 成幂级数

$$=\frac{\pi\csc(\pi z)}{z\left(\mathrm{e}^{2\pi z}-1\right)}=\frac{\pi\left[1/(\pi z)+(\pi z)/6+7(\pi z)^3/360+\cdots\right]}{z\left[(2\pi z)+(2\pi z)^2/2+(2\pi z)^3/6+\cdots\right]}$$

$$=\frac{\left(1+(\pi z)^2/6+7(\pi z)^4/360+\cdots\right)}{2\pi z^3\left[1+(\pi z)+(2\pi z)^2/6+\cdots\right]}$$

$$=\frac{\left(1+(\pi z)^2/6+7(\pi z)^4/360+\cdots\right)\left[1-\left(\pi z+2(\pi z)^2/3\right)+\left(\pi z+2(\pi z)^2/3\right)^2+\cdots\right]}{2\pi z^3}$$

$$=\frac{1}{2\pi z^3}\left(1+(\pi z)^2/6+7(\pi z)^4/360+\cdots\right)\left(1-\pi z+(\pi z)^2/3+\cdots\right)$$

幂级数中 z^{-1} 的系数，即为 $f(z)$ 的留数 $Res[f;0]=\dfrac{\pi}{3}$

2) 在极点 $z=\pm ni$，计算 $f(z)$ 的留数，用洛必达法则

$$Res[f;ni]=\lim_{z\to ni}\frac{z-ni}{\left(\mathrm{e}^{2\pi z}-1\right)}\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}=\lim_{z\to ni}\frac{1}{2\pi\mathrm{e}^{2\pi ni}}\frac{\pi}{ni\sin(\pi ni)}=-\frac{1}{2n\sinh(n\pi)};$$

$$Res[f;-ni]=\lim_{z\to -ni}\frac{z+ni}{\left(\mathrm{e}^{2\pi z}-1\right)}\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{e}^{-2\pi ni}}\frac{\pi}{-ni\sin(-n\pi i)}=-\frac{1}{2n\sinh(n\pi)};$$

3) 在极点 $z=\pm n$，计算 $f(z)$ 的留数

$$Res[f;n]=\lim_{z\to n}\frac{\pi}{z\left(\mathrm{e}^{2\pi z}-1\right)}\frac{(z-n)}{\sin(\pi z)}=\frac{\pi}{n\left(\mathrm{e}^{2n\pi}-1\right)}\frac{1}{[\pi\cos(\pi n)]}=\frac{(-1)^n}{n\left(\mathrm{e}^{2n\pi}-1\right)}$$

$$Res[f;-n]=\lim_{z\to -n}\frac{\pi}{z\left(\mathrm{e}^{2\pi z}-1\right)}\frac{(z+n)}{\sin(\pi z)}=\frac{\pi}{-n\left(\mathrm{e}^{-2n\pi}-1\right)}\frac{1}{[\pi\cos(-\pi n)]}$$

$$=\frac{(-1)^n}{-n\left(\mathrm{e}^{-2n\pi}-1\right)}=\frac{(-1)^n}{n}\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2n\pi}-1}\right]=\frac{(-1)^n}{n\left(\mathrm{e}^{2n\pi}-1\right)}+\frac{(-1)^n}{n}$$

根据文[9]留数基本定理 如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个奇点，那么 $f(z)$ 在所有各奇点(包括 ∞ 点)的留数总和必等于零。 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{C_N} f(z)\mathrm{d}z=0$ 。从而有

$$0=\frac{\pi}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\frac{1}{2n\sinh(n\pi)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\left(e^{2n\pi}-1\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

注意到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln(1+1)=-\ln 2$ 整理得到，

从而得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sinh(n\pi)}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n\left(e^{2n\pi}-1\right)}=\frac{\pi}{3}-\ln 2$

命题 4 设 $\alpha,\beta>0$，且 $\alpha\beta=\pi^2$，则无穷级数恒等式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\sinh^2(\beta k)}+\frac{2\coth(\beta k)}{\beta k^3}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\sinh^2(\alpha k)}=\frac{\alpha^2}{30}+\frac{\alpha\beta}{18}-\frac{\beta^2}{90} \tag{4}$$

证明：选择变换核函数 $f(z)=\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2\sinh^2(\alpha z)}$，函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 有 5 重极点，单极点 $z=k$，$z=i\pi k/\alpha$

1) 将 $f(z)$ 展开幂级数

$$\begin{aligned}f(z)&=\pi\left(\frac{1}{\pi z}-\frac{\pi z}{3}-\frac{\pi^3z^3}{45}+\cdots\right)\left\{\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{\alpha z}-\frac{\alpha z}{6}+\frac{7\alpha^3z^3}{360}+\cdots\right)^2\right\}\\&=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{3}-\frac{\pi^4z^4}{45}+\cdots\right)\left(\frac{1}{\alpha^2z^2}+\frac{\alpha^2z^2}{36}+\frac{49\alpha^6z^6}{360^2}-\frac{1}{3}+\frac{7\alpha^2z^2}{180}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$f(z)$ 展开幂级数 z^{-1} 系数，即 $f(z)$ 在 $z=0$ 的留数 $Res[f;0]=\frac{\alpha^2}{15}+\frac{\alpha\beta}{9}-\frac{\beta^2}{45}$；

2) 在极点 $z=k$，计算 $f(z)$ 的留数

$$Res[f;k]=\lim_{z\to k}\frac{(z-k)\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)z^2\sinh^2(\alpha z)}=\frac{\pi\cos(\pi z)}{\pi\cos(\pi z)z^2\sinh^2(\alpha z)}=\frac{1}{k^2\sinh^2(\alpha k)}$$

3) $f(z)$ 在 $z=i\pi k/\alpha$ 是 2 重极点，留数公式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-k)^2F(z)\right]$ 失效，我们利用文[11]公式计算留数。

令 $p(z)=\pi\cot(\pi z)$， $q(z)=z^2\sinh^2(\alpha z)$

$$Res[f;z]=2\frac{p'(z)}{q''(z)}-\frac{2p(z)q'''(z)}{3\left[q''(z)\right]^2}$$

计算 $p(z)$ 导数与导数值 $p(z)=\pi\cot(\pi z)$； $p'(z)=-\pi^2\csc^2(\pi z)$
于是有 $p(i\pi k/\alpha)=-\pi i\cot(\beta k)$； $p'(i\pi k/\alpha)=-\pi^2\operatorname{csch}^2(\beta k)$；
计算 $q(z)$ 导数 $q(z)=z^2\sinh^2(\alpha z)$；

$$q'(z)=2z\sinh^2(\alpha z)+z^2\alpha\sinh(2\alpha z)$$

$$\begin{aligned}q''(z)&=2\sinh^2(\alpha z)+2z\alpha\sinh(2\alpha z)+2z\alpha\sinh(2\alpha z)+2z^2\alpha^2\cosh(2\alpha z)\\&=2\sinh^2(\alpha z)+4z\alpha\sinh(2\alpha z)+2z^2\alpha^2\cosh(2\alpha z)\end{aligned}$$

$$q'''(z)=2\alpha\sinh(2\alpha z)+4\alpha\sinh(2\alpha z)+8z\alpha^2\cosh(2\alpha z)\\+4z\alpha^2\cosh(2\alpha z)+4z^2\alpha^3\sinh(2\alpha z)$$；

$q(z)$ 的导数值 $q''(i\pi k/\alpha)=-2\pi^2k^2$； $q'''(i\pi k/\alpha)=12\alpha\pi ki$；

将上述数据代入公式， $Res[f;i\pi k/\alpha]=-\dfrac{1}{k^2\sinh^2(\beta k)}-\dfrac{2\coth(\beta k)}{\beta k^3}$

根据文[9]留数基本定理如果函数 $f(z)$ 在 C_N 内只有有限个奇点， $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{C_N}f(z)\mathrm{d}z=0$。从而有

$$0=\frac{\alpha^2}{15}+\frac{\alpha\beta}{9}-\frac{\beta^2}{45}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2\sinh^2(\alpha k)}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\sinh^2(\beta k)}+\frac{2\coth(\beta k)}{\beta k^3}\right)$$

从而得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k^2\sinh^2(\beta k)}+\dfrac{2\coth(\beta k)}{\beta k^3}\right)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2\sinh^2(\alpha k)}=\dfrac{\alpha^2}{30}+\dfrac{\alpha\beta}{18}-\dfrac{\beta^2}{90}$

命题 5 设 $\alpha,\beta>0$， 且 $\alpha\beta=\pi^2$， 则无穷级数恒等式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{k\tanh^3(\alpha k)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta\cosh(\beta k)}{k\sinh^3(\beta k)}+\frac{1}{k^2\sinh^2(\beta k)}+\left(-\frac{\alpha}{k}+\frac{\alpha}{\beta k^3}\right)\coth(\beta k)\\=-\frac{2\alpha^2}{15}+\frac{\alpha\beta}{6}+\frac{\beta^2}{90} \tag{5}$$

证明：选取变换核函数 $F(z)=\dfrac{2\alpha\pi\cot(\pi z)}{z\tanh^3(\alpha z)}$， 函数 $F(z)$ 在 $z=0$ 有 5 重极点，单极点 $z=k$ 和 3 重极点 $z=i\pi k/\alpha$；

1) 展开成幂级数

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{2\alpha\pi\cot(\pi z)}{z\tanh^3(\alpha z)}=\frac{2\alpha\pi}{z}\cot(\pi z)\coth^3(\alpha z)\\&=\frac{2\alpha\pi}{z}\left(\frac{1}{\pi z}-\frac{\pi z}{3}-\frac{\pi^3z^3}{45}+\cdots\right)\left(\frac{1}{\alpha z}+\frac{\alpha z}{3}-\frac{\alpha^3z^3}{45}+\cdots\right)^3\\&=\frac{2\alpha}{z}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{3}-\frac{\pi^4z^4}{45}+\cdots\right)\left(\frac{1}{\alpha z}+\frac{\alpha z}{3}-\frac{\alpha^3z^3}{45}+\cdots\right)\left(\frac{1}{\alpha z}+\frac{\alpha z}{3}-\frac{\alpha^3z^3}{45}+\cdots\right)^2\\&=\frac{2}{z^3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{3}-\frac{\pi^4z^4}{45}+\cdots\right)\left(1+\frac{\alpha^2z^2}{3}-\frac{\alpha^4z^4}{45}+\cdots\right)\left(\frac{1}{\alpha^2z^2}+\frac{2}{3}+\frac{\alpha^2z^2}{15}+\cdots\right)\\&=\frac{2}{z^3}\left[1+\frac{\alpha^2-\pi^2}{3}z^2-\left(\frac{\alpha^4+\pi^4}{45}+\frac{\alpha^2\pi^2}{9}\right)z^4+\cdots\right]\left(\frac{1}{\alpha^2z^2}+\frac{2}{3}+\frac{\alpha^2z^2}{15}+\cdots\right)\end{aligned}$$

函数 $F(z)$ 展开幂级数 z^{-1} 系数，即为 $F(z)$ 在 $z=0$ 时的留数

$$Res[F(z);0]=2\left(\frac{4\alpha^2}{15}-\frac{\alpha\beta}{3}-\frac{\beta^2}{45}\right)$$

2) 在极点 $z=k$， 计算 $F(z)$ 的留数

$$\begin{aligned}Res[F;k]&=\lim_{z\to k}\frac{(z-k)\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\frac{2\pi a}{z\tanh^3(\alpha z)}\\&=\frac{\cos(\pi z)}{\pi\cos(\pi z)}\frac{2\pi a}{z\tanh^3(\alpha z)}=\frac{2a}{k\tanh^3(\alpha k)}\end{aligned}$$

3) 函数 $F(z)$ 在 $z=i\pi k/\alpha$ 是 3 重极点，留数公式 $\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-k)^3 F(z)\right]$ 失效，利用[10]公式计算留数。

设 $F(z)=p(z)/q(z)$，其中 p,q 在 a 点解析，$p(z)\neq 0$，q 在点 $z=i\pi k/\alpha$ 有 3 阶极点，则 3 重极点留数公式为

$$Res\left[F(z);z\right]=\frac{3p''(z)}{q'''(z)}-\frac{3p'(z)q^{(4)}(z)}{2\left[q'''(z)\right]^2}-\frac{3p(z)q^{(5)}(z)}{10\left[q'''(z)\right]^2}+\frac{3p(z)\left[q^{(4)}(z)\right]^2}{8\left[q'''(z)\right]^3}$$

令 $p(z)=2\pi\alpha\cot(\pi z)$，$q(z)=z\tanh^3(\alpha z)$

下面计算 $p(z)$ 的导数

$$p(z)=2\pi\alpha\cot(\pi z)\text{；}\quad p'(z)=-2\pi^2\alpha\csc^2(\pi z)\text{；}$$

$$p''(z)=-2\pi^2\alpha\left[-2\pi\csc^2(\pi z)\cot(\pi z)\right]=4\pi^3\alpha\csc^2(\pi z)\cot(\pi z)\text{；}$$

$p(z)$ 在 $z=k\pi i/\alpha$ 的函数值与导数值

$$p(k\pi i/\alpha)=2\pi\alpha\cot(\pi k\pi i/\alpha)=2\pi\alpha\cot\left(\pi^2 ki/\alpha\right)=2\pi\alpha\cot(\beta ki)=-2\pi\alpha i\coth(\beta k)\text{；}$$

$$p'(k\pi i/\alpha)=2\pi^2\alpha\mathrm{csch}^2(\beta k)\text{；}$$

$$p''(k\pi i/\alpha)=4\pi^3\alpha\csc^2\left(\pi^2 ki/\alpha\right)\cot\left(\pi^2 ki/\alpha\right)=4\pi^3\alpha i\mathrm{csch}^2(\beta k)\coth(\beta k)\text{；}$$

下面细心计算 $q(z)$ 的导数，计算过程有点长，需要细心

$$q(z)=z\tanh^3(\alpha z)\text{；}\quad q'(z)=\tanh^3(\alpha z)+3z\alpha\tanh^2(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\text{；}$$

$$\begin{aligned}q''(z)&=3\alpha\tanh^2(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)+3\alpha\tanh^2(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\\&\quad+6z\alpha^2\tanh(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)-6z\alpha^2\tanh^3(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\\&=6\alpha\tanh^2(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)+6z\alpha^2\tanh(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)\\&\quad-6z\alpha^2\tanh^3(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\end{aligned}\text{；}$$

$$\begin{aligned}q'''(z)&=12\alpha^2\tanh(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)-12\alpha^2\tanh^3(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\\&\quad+6\alpha^2\tanh(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)+6z\alpha^3\mathrm{sech}^6(\alpha z)\\&\quad-24z\alpha^3\tanh^2(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)-6\alpha^2\tanh^3(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\\&\quad-18z\alpha^3\tanh^2(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)+12z\alpha^3\tanh^4(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\text{；}\\&=18\alpha^2\tanh(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)-18\alpha^2\tanh^3(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\\&\quad-42z\alpha^3\tanh^2(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)+6z\alpha^3\mathrm{sech}^6(\alpha z)\\&\quad+12z\alpha^3\tanh^4(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\end{aligned}$$

计算导数值 $q'''(k\pi i/\alpha)=6\alpha^2 k\pi i$；

通过对 $q'''(z)$ 微分计算得到

$$\begin{aligned}q^{(4)}(z)&=24\alpha^3\mathrm{sech}^6(\alpha z)-168\alpha^3\tanh^2(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)\\&\quad-120z\alpha^4\tanh(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)+48z\alpha^4\tanh^4(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\\&\quad+216z\alpha^4\tanh^3(\alpha z)\mathrm{sech}^4(\alpha z)-24z\alpha^4\tanh^5(\alpha z)\mathrm{sech}^2(\alpha z)\end{aligned}$$

计算得 $q^{(4)}(k\pi i/\alpha)=24\alpha^3$；

对 $q^{(4)}(z)$ 微分计算得到 $q^{(5)}(z)$，我们在 $q^{(4)}(z)$ 表达式中仅微分 $\tanh(\alpha z)\operatorname{sech}^4(\alpha z)$ 得到 $\operatorname{sech}^6(\alpha z)$，将 $k\pi i/\alpha$ 代入此项得到导数值。其他项因含有 $\tanh(z)$ 项，导数值为 0。

在 $q^{(4)}(z)$ 中只有 $-120z\alpha^4\tanh(\alpha z)\operatorname{sech}^4(\alpha z)$ 微分后为 $-120z\alpha^5\operatorname{sech}^6(\alpha z)$；

所以 $-q^{(5)}(k\pi i/\alpha)=-120\alpha^4 k\pi i$；

将 $p(k\pi i/\alpha)$； $p'(k\pi i/\alpha)$； $p''(k\pi i/\alpha)$ 和 $q'''(k\pi i/\alpha)$； $q^{(4)}(k\pi i/\alpha)$； $q^{(5)}(k\pi i/\alpha)$；

代入 3 重极点留数公式

$$\begin{aligned}Res\left[F(z);k\pi i/\alpha\right]&=\frac{2\beta}{k}\operatorname{csch}^2(\beta k)\coth(\beta k)+\frac{2}{k^2}\operatorname{csch}^2(\beta k)\\&-\frac{2\alpha}{k}\coth(\beta k)+\frac{2\alpha}{\beta k^3}\coth(\beta k)\\&=\frac{2\beta\cosh(\beta k)}{k\sinh^3(\beta k)}+\frac{2}{k^2\sinh^2(\beta k)}-\frac{2\alpha}{k}\coth(\beta k)+\frac{2\alpha}{\beta k^3}\coth(\beta k)\end{aligned}$$

根据文[9]留数基本定理如果函数 $f(z)$ 在 C_N 内只有有限个奇点， $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{C_N} f(z)\mathrm{d}z=0$ 。从而有

$$\begin{aligned}0=2\left(\frac{4\alpha^2}{15}-\frac{\alpha\beta}{3}-\frac{\beta^2}{45}\right)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2a}{k\tanh^3(\alpha k)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\beta\cosh(\beta k)}{k\sinh^3(\beta k)}\\+\frac{2}{k^2\sinh^2(\beta k)}-\frac{2\alpha}{k}\coth(\beta k)+\frac{2\alpha}{\beta k^3}\coth(\beta k)\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{k\tanh^3(\alpha k)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta\cosh(\beta k)}{k\sinh^3(\beta k)}+\frac{1}{k^2\sinh^2(\beta k)}+\left(-\frac{\alpha}{k}+\frac{\alpha}{\beta k^3}\right)\coth(\beta k)\\&=-\frac{2\alpha^2}{15}+\frac{\alpha\beta}{6}+\frac{\beta^2}{90}\end{aligned}$$

(5)式得证。

参考文献 (References)

[1] Jolley, L.B.W. (1961) Summation of Series. 2nd Revised Edition, Dover Publications, Inc., New York, 156-159.

[2] Sofo, A. (2003) Computation Techniques for the Summation of Series. Kluwer Academic, Plenum Publishers, New York, 123. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0057-5

[3] Lehmer, D.H. (1985) Interesting Series Involving the Central Binomial Coefficient. *The American Mathematical Monthly*, **92**, 449-457. https://doi.org/10.2307/2322496

[4] Trif, T. (2000) Combinatorial Sums and Series Involving Inverses of Binomial Coefficients. *The Fibonacci Quarterly*, **38**, 79-84.

[5] Borwein, J.M. and Girgensohn, R. (2005) Evaluation of Binomial Series. *Aequationes Mathematicae*, **70**, 25-36. https://doi.org/10.1007/s00010-005-2774-x

[6] 及万会，张来萍. 关于正负相间二项式系数倒数级数[J]. 理论数学, 2012, 2(4): 192-201.

[7] 及万会，黑宝骊. 由裂项法导出二项式系数倒数级数[J]. 理论数学, 2013, 3(1): 18-30.

[8] 及万会，张来萍，杨春艳. 封闭形和式初步[M]. 第 1 版. 北京: 国家行政学院出版社, 2014: 204-264.

[9] Mansden, J.E. (1970) Basis Complex Analysis. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 208, 209, 213.

[10] Berndt, B.C. (1989) Ramanujan’s Notebooks, Part II. Springer-Verlag, New York, 324. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4530-8

[11] 盖云英，包革军. 复变函数与积分变换[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2007: 127-128.

说明

多重极点公式 $\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$ 只是在能约去公因子后再求导数。

例如 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^2}p(z)$，留数 $Res[f;a]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-a)^2 p(z)\right]=\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[p(z)\right]$。

如果不能约去公因子，这个公式不能用。因此我们找到书[10]和[11]公式解决了命题 4，5 计算留数问题。

当然如果 $z=0$ 的多重极点的留数，我们将函数展开成幂级数，找到 z^{-1} 的系数，即为 $Res[f;0]$。