Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(3), 137-140
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73016

Periodicity of a Class of Functional Equations

Xiaoli Zhou[1], Tiejun Zhou[1,2]

[1]College of Science, Hunan Agricultural University, Changsha Hunan
[2]College of Orient Science and Technology, Hunan Agricultural University, Changsha Hunan
Email: hntjzhou@126.com

Received: Apr. 22nd, 2017; accepted: May 6th, 2017; published: May 10th, 2017

Abstract

The sufficient conditions are obtained that the $f(x)$ is a periodic function with period $2T$, $3T$ or $4T$ for the functional equation $f(x+T)f(x)=af(x+T)+bf(x)+c$. The results generalize the existing conclusions.

Keywords

Functional Equation, Period

一类函数方程的周期性

周小利[1]，周铁军[1,2]

[1]湖南农业大学理学院，湖南 长沙
[2]湖南农业大学东方科技学院，湖南 长沙
Email: hntjzhou@126.com

收稿日期：2017年4月22日；录用日期：2017年5月6日；发布日期：2017年5月10日

摘　要

本文针对函数方程 $f(x+T)f(x)=af(x+T)+bf(x)+c$ 分别获得 $f(x)$ 是周期为$2T$、$3T$、$4T$函数的充分条件，推广了已有结论。

关键词

函数方程，周期

文章引用: 周小利, 周铁军. 一类函数方程的周期性[J]. 理论数学, 2017, 7(3): 137-140.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73016

1. 引言

对于函数方程的解，我们经常要讨论它的周期性，并确定它的周期[1] [2] [3] [4] [5]。文献[1]中讨论了 8 种特殊形式的函数方程并给出了它们的周期。本文将该文相关结果推广到如下一般形式的函数方程：

$$f(x+T)f(x)=af(x+T)+bf(x)+c. \tag{1}$$

显然，当 $(a+b)^2+4c\geq 0$ 时，方程(1)存在平凡周期解：

$$f(x)=\frac{a+b}{2}\pm\frac{\sqrt{(a+b)^2+4c}}{2}$$

不难验证，当 $ab+c=0$ 时，方程(1)有常数解 $f(x)=a$ 或 $f(x)=b$，这是平凡周期解。那么对于 $f(x)$ 不为常数的情形，方程(1)是否存在周期解？如果存在周期解，它的周期是多少?这是本文要解决的问题。

2. 主要定理

对于方程(1)是否存在非常数周期解的问题，我们有如下结论：

定理 设 $f(x)$不为常数，

(i) 如果 $a=b, c\neq -a^2$，那么 $f(x)$ 是周期为 $2T$ 的函数。

(ii) 如果 $a\neq b, b=0, c=-a^2$，那么 $f(x)$ 是周期为 $3T$ 的函数。

(iii) 如果 $a\neq b, a^2+b^2+2c=0$，那么 $f(x)$ 是周期为 $4T$ 的函数。

证明：由于 $f(x)$ 不为常数，则由(1)式可得：

$$f(x+T)=\frac{bf(x)+c}{f(x)-a}. \tag{2}$$

于是有 $f(x+2T)=\dfrac{bf(x+T)+c}{f(x+T)-a}$。将(2)式代入并整理得：

$$f(x+2T)=\frac{(b^2+c)f(x)+c(b-a)}{(b-a)f(x)+c+a^2}. \tag{3}$$

(i) 如果 $a=b$，则由(3)式可得 $f(x+2T)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 $2T$ 的函数。

(ii) 由(2)式得

$$f(x+3T)=\frac{bf(x+2T)+c}{f(x+2T)-a},$$

将(3)式代入上式并整理得

$$f(x+3T)=\frac{(b^3+2bc-ac)f(x)+c(a^2+b^2-ab+c)}{(a^2+b^2-ab+c)f(x)-(a^3+2ac-bc)}. \tag{4}$$

如果 $a\neq b, b=0, c=-a^2$，那么有 $f(x+3T)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 $3T$ 的函数。

(iii) 由(3)式得

$$f\left(x+4T\right)=\frac{\left(b^2+c\right)f\left(x+2T\right)+c\left(b-a\right)}{\left(b-a\right)f\left(x+2T\right)+c+a^2}.$$

再将(3)式代入上式并整理得

$$f\left(x+4T\right)=\frac{\left[\left(b^2+c\right)^2+c\left(b-a\right)^2\right]f\left(x\right)+c\left(b-a\right)\left(a^2+b^2+2c\right)}{\left(b-a\right)\left(a^2+b^2+2c\right)f\left(x\right)+\left(a^2+c\right)^2+c\left(b-a\right)^2}.$$

当 $a\neq b, a^2+b^2+2c=0$ 时，有 $\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2+2c\right)=0$，于是得

$$a^4+2a^2c=b^4+2b^2c$$

从而 $\left(a^2+c\right)^2=\left(b^2+c\right)^2$，故有

$$f\left(x+4T\right)=\frac{\left[\left(b^2+c\right)^2+c\left(b-a\right)^2\right]f\left(x\right)}{\left(a^2+c\right)^2+c\left(b-a\right)^2}=f\left(x\right).$$

所以 $f\left(x\right)$ 是周期为 $4T$ 的函数。

3. 几个实例

下面举例说明上述定理的应用。

例1. 若函数 $f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 满足 $f\left(x+T\right)f\left(x+S\right)=c$，其中 $T>S, c\neq 0$，则 $f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 是周期为 $2\left(T-S\right)$ 的函数(文献[3]定理3)。

证明： 令 $y=x+S$，则有 $f\left(y+T-S\right)f\left(y\right)=c$，对应方程(1)中，$a=b=0$，$c\neq a^2=0$，故由定理中(i)知，$f\left(x\right)$ 是周期为 $2\left(T-S\right)$ 的函数。

注： 文献[1]中第7点结论是本例在 $c=1$ 时的特殊情形，文献[2]中定理1的两个方程是本例在 $c=\pm 1$ 时的情形。

例2. 若函数 $f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 满足 $f\left(x+T\right)=\dfrac{a^2}{a-f\left(x\right)}$，则 $f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 是以$3T$为周期的函数。

证明： 由条件可得

$f\left(x+T\right)f\left(x\right)=af\left(x+T\right)-a^2$，

因此在方程(1)中，$b=0, c=-a^2$，由定理中(ii)知道，$f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 是以$3T$为周期的函数。

注： 若$a=1$，则得到文献[1]中第8点结论。

例3. 若函数 $f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 满足 $f\left(x+T\right)=\dfrac{mf\left(x\right)+c}{f\left(x\right)-m}$，则 $f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 是以$2T$为周期的函数。

证明： 由条件可得

$$f\left(x+T\right)f\left(x\right)=mf\left(x+T\right)+mf\left(x\right)+c$$

因此在方程(1)中 $a=b=m$，由定理1中(i)知道，$f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 是以$2T$为周期的函数。

注： 若 $m=-1$，$c=1$，则得到文献[1]中第9点结论及文献[2]定理2的推论；若 $m=1$，$c=1$，则得到文献[1]中第11点结论及文献[2]中的定理2。

例4. 若函数 $f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 满足 $f\left(x+T\right)=\dfrac{m^2+mf\left(x\right)}{m-f\left(x\right)}$，则 $f\left(x\right)\left(x\in R\right)$ 是以$4T$为周期的函数。

证明： 由条件可得

$f(x+T)f(x)=mf(x+T)-mf(x)-m^2$，

因此在方程(1)中 $a=m,b=-m,c=-m^2$，显然 $a\neq b,a^2+b^2+2c=0$，故由定理1中(iii)知道，$f(x)(x\in R)$是以$4T$ 为周期的函数。

注： 如果 $m=1$，就得到文献[1]中第 10 点结论及文献[2]中定理 3 的推论；如果 $m=-1$，就得到文献[2]中定理 3 的结论。

4. 结论

我们的研究表明，抽象函数方程(1)除了在系数满足条件$(a+b)^2+4c\geq 0$或$ab+c=0$时存在常数形式的平凡周期解外，还可能在不同条件下分别存在周期为 $2T$、$3T$ 和 $4T$ 的非常数的周期解。

参考文献 (References)

[1] 陈维华, 强海萍. 抽象函数的周期性研究[J]. 中学数学杂志, 2011(5): 41.

[2] 周继军. 由一类函数方程确定的周期函数[J]. 数学教学通讯, 1991(5): 19-20.

[3] 王良成. 也谈由函数方程确定的周期函数[J]. 数学教学通讯. 1992(5): 14-15.

[4] 宋泽熙, 周铁军. 一类函数方程周期解周期的确定[J]. 大学数学, 2016(6): 87-90.

[5] Mickens, R.E. (2016) Periodic Solutions of the Functional Equation $f^2(t)+g^2(t)=1$. *Journal of Difference Equations and Applications*, **22**, 67-74. https://doi.org/10.1080/10236198.2015.1075520