Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(5), 386-395
Published Online September 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.75050

Boundary Behavior of Blow-Up Solutions to Infinity-Laplacian Equation

Xuteng Wang, Min Xu, Qiufang Ren, Qingqing Zhang, Ling Mi*

College of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shangdong
Email: *mi-ling@163.com

Received: Aug. 25th, 2017; accepted: Sep. 8th, 2017; published: Sep. 14th, 2017

Abstract

In this paper, by upper-lower solution method, under suitable conditions on general nonlinearities f and weight functions b, we consider the exact boundary behavior of solutions to boundary blow-up elliptic problems $\Delta_\infty u = b(x) f(u),\ x \in \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = +\infty$, where Ω is a bounded domain with smooth boundary in R^N. Our analysis is based on Karamata regular variation theory.

Keywords

Infinity-Laplacian Equation, Blow-Up Solutions, Boundary Behavior

一类无穷拉普拉斯方程边界爆破解的渐近行为

王绪滕，许　敏，任秋芳，张庆庆，宓　玲*

临沂大学数学与统计学院，山东　临沂
Email: *mi-ling@163.com

收稿日期：2017年8月25日；录用日期：2017年9月8日；发布日期：2017年9月14日

摘　要

基于Karamata正规变化理论，采用上下解的方法，本文主要考虑了当非线性项 f 和权函数 b 满足适当的条件时，一类无穷拉普拉斯方程边界爆破问题 $\Delta_\infty u = b(x) f(u),\ x \in \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = +\infty$ (其中 Ω 是 R^N 中具有光滑边界的有界区域)的解在区域边界附近的精确渐近行为。

*通讯作者。

文章引用: 王绪滕, 许敏, 任秋芳, 张庆庆, 宓玲. 一类无穷拉普拉斯方程边界爆破解的渐近行为[J]. 理论数学, 2017, 7(5): 386-395. DOI: 10.12677/pm.2017.75050

关键词

无穷拉普拉斯方程，爆破解，边界渐近行为

1. 引言

本文中考虑下列边界爆破椭圆型问题的解在区域边界附近的精确渐近行为：

$$\Delta_\infty u = b(x) f(u),\ x\in\Omega,\ u|_{\partial\Omega} = +\infty, \tag{1}$$

其中 Δ_∞ 为无穷 Laplacian 算子，是由下列式子

$$\Delta_\infty u := \left\langle D^2uDu, Du\right\rangle = \sum_{i,j=1}^N D_iuD_{ij}uD_ju,$$

给出的一个高度退化的椭圆型微分算子，Ω 是在 $R^N\ (N\geq 2)$ 上光滑边界的有界域，权函数 b 满足

(b_1)：$b\in C(\bar{\Omega})$，且 b 在 Ω 中是正的；

且非线性项 f 满足

(f_1)：$f\in C^1[0,\infty)$，$f(0)=0$，f 在 $(0,\infty)$ 上是递增的；

(f_2)：存在 $p>3$ 使得 $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{sf'(s)}{f(s)}=p$。

无穷 Laplacian 的概念是由 Aronsson [1]在考虑将边界 $\partial\Omega$（Ω 是在 R^N 中的有界区域)上的函数延拓到 Ω 内时提出的。他指出 $\Delta_\infty u=0$ 恰好是上述延拓问题的 Euler-Lagrange 方程。由于无穷 Laplacian 算子的高度退化性，相关的 Dirichlet 问题可能没有古典解。鉴于此，Crandall 和 Lions [2]、Crandall 等[3]和 Crandall 等[4]提出了粘性解的概念(粘性解的定义可见第 2 节)。随后 Jensen [5]借助于粘性解的概念，证明了无穷调和方程 Dirichlet 问题解的惟一存在性。在此之后，无穷调和方程引起了广大学者的关注，读者可参考文献[6] [7] [8]。

若非负函数 $u\in C(\Omega)$ 在粘性意义下满足(1)中的方程，且当距离函数 $d(x):=dist(x,\Omega)\to 0$ 时，函数 u 满足条件 $u(x)\to\infty$，像这样的函数 u 称为问题(1)的边界爆破解。A. Mohammed 和 S. Mohammed [9] [10]首次给出了问题(1)解的存在性的充分必要条件是

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt[4]{F(s)}}<\infty,\ \forall a>0,\ F(s)=\int_0^s f(v)\,\mathrm{d}v, \tag{2}$$

椭圆方程边界爆破解的研究有着很长的历史，早期的研究主要集中于古典的 Laplacian 算子 Δ，即

$$\Delta u = b(x) f(u),\ u>0,\ x\in\Omega,\ u|_{\partial\Omega}=\infty, \tag{3}$$

问题(3)源于椭圆几何、数学物理或者种群动态，许多作者已对此问题进行了讨论和延伸，可参考文献[11]-[16]及里面所涉及的参考文献。

当非线性项 f 在 Ω 上满足条件(f_1)且 $b\equiv 1$ 时，Keller 和 Osserman [13] [14]首次对方程(3)解的存在性给出了充分必要条件

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2F(s)}} < \infty, \forall a > 0,\ F(s) = \int_0^s f(\nu)\mathrm{d}\nu. \tag{4}$$

Loewner 和 Nirenberg [15]证明了如果 $f(u) = u^{p_0}$ 且 $p_0 = (N+2)/(N-2)$，$N > 2$，则问题(3)有唯一的解 u 满足 $\lim\limits_{d(x)\to 0} u(x)(d(x))^{(N-2)/2} = (N(N-2)/4)^{(N-2)/4}$。

当 f 满足(f_1)，(f_{02})：存在 $C_f > 0$ 使得 $\lim\limits_{s\to+\infty} f'(s)\int_s^\infty \frac{\mathrm{d}\nu}{f(\nu)} = C_f$

及(f_3)：存在 $p > 1, S_0 > 0$ 使得 $f(s)/s^p$ 在 $[S_0, \infty)$ 上是递增的，

并且在 Ω 中 $b \in C^\alpha(\Omega)$ 是大于零的，且 b 满足

(b_{01})：存在 $b_0 > 0, \sigma \in (0,2)$ 使得 $\lim\limits_{d(x)\to 0} b(x)(d(x))^\sigma = b_0$。

Garcia-Melian [16] (通过非线性变换、摄动方法和比较原则)给出了下列结论：

(i) 若 $C_f > 1$，对问题(1)的任意解 u 满足

$$\lim_{d(x)\to 0} \frac{u(x)}{\psi\left(A(d(x))^{2-\sigma}\right)} = 1, \tag{5}$$

其中 $A = \dfrac{b_0}{(2-\sigma)\left((2-\sigma)(C_f - 1) + 1\right)}$

且 ψ 满足

$$\int_{\psi(t)}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{f(s)} = t, \forall t > 0. \tag{6}$$

(ii) 若 $C_f = 1$ 且对充分小的 $t > 0$ 有 $h(t) := tf'(\psi(t)) \ge 1$，结论(i)仍然成立。

受上述研究结果的启发，本文将考虑当权函数 $b(x)$ 和非线性项 $f(u)$ 满足适当的条件时，问题(1)的解在区域 Ω 边界附近的精确渐近行为。

本文中，假设 b 满足条件

(b_2)：存在正常数 $b_0 \in \mathbb{R}$，使得 $\lim\limits_{d(x)\to 0} \frac{b(x)}{(d(x))^{4-\lambda}} = b_0$，其中 $\lambda < 4$。

本文的主要结论如下：

定理 1.1： 如果非线性项 f 满足(f_1)-(f_2)，权函数 b 满足(b_1)-(b_2)，则问题(1)的解满足

$$\lim_{d(x)\to 0} \frac{u(x)}{\phi\left((d(x))^{\frac{4-\lambda}{3}}\right)} = \left(\left(\frac{4-\lambda}{3}\right)^3 \frac{p+1-\lambda}{b_0(p-3)}\right)^{\frac{1}{p-3}}, \tag{7}$$

其中函数 ϕ 由下列积分方程

$$\int_{\phi(t)}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{H(s)} = t, t > 0,\quad H(s) := (f(s))^{1/3},\ \forall s > 0$$

唯一确定。

注 1.1　关于问题(1)解的存在性的结论，可参见参考文献[9] [10]。

在第 2 节和第 3 节里，我们给出本文所涉及的定义与辅助结论作为预备知识，然后把这些预备知识

运用到全文中，且定理 1.1 的证明将在第 4 节中给出。

2. 预备知识

本文的研究主要依赖于由 Karamata 在 1930 年所创立的 Karamata 正规变化理论，这个理论是随机过程理论的基本工具(参考文献[17] [18] [19])。本节将对 Karamata 正规变化理论中的一些定义及正规变化函数的一些性质做一个简单的叙述。

定义 2.1 定义在$[a,\infty),(a>0)$上的函数 f，若 f 是正的可测函数，则称在∞处以指数ρ正规变化，记 $f\in RV_\rho$。如果对每一个$\xi>0,\rho\in\mathbb{R}$，有

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(\xi s)}{f(s)}=\xi^\rho, \tag{8}$$

特别是，当$\rho=0$时，称 f 在∞处缓慢变化。

若 $f\in RV_\rho$，则$L(s):=f(s)/s^\rho$在∞远处缓慢变化。

定义 2.2 定义在$[a,\infty),(a>0)$上的函数 f，若 f 是正的可测函数，则称在∞远处快速变化。若对每一个$\rho>1$，有

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s^\rho}=\infty. \tag{9}$$

一些基本的在∞远处缓慢变化的函数如下：

1) 定义在$[a,\infty)$上且在∞远处有正极限值的可测函数；

2) $(\ln s)^\beta$ 和 $(\ln(\ln s))^\beta, \beta\in\mathbb{R}$；

3) $\mathrm{e}^{(\ln s)^p}, 0<p<1$。

一些基本的在∞远处快速变化的函数如下：

1) e^s 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^s}$；

2) $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{(\ln s)^p}}, \mathrm{e}^{s^p}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{s^p}}, p>0$；

3) $s^\beta\mathrm{e}^{(\ln s)^p}$ 和 $(\ln s)^\beta\mathrm{e}^{(\ln s)^p}, p>1,\beta\in\mathbb{R}$；

4) $(\ln s)^\beta\mathrm{e}^{s^p}$ 和 $s^\beta\mathrm{e}^{s^p}, p>0,\beta\in\mathbb{R}$。

同样可以得到，定义在$(0,a),(a>0)$上的正的可测函数 g，称为在点 0 处以指数σ正规变化，记 $g\in RVZ_\sigma$，如果$t\to g(1/t)$属于$RV_{-\sigma}$，同样的，如果$t\to g(1/t)$快速变化，函数 g 称在点 0 处快速变化。

命题 2.1：(一致收敛定理) 若 $f\in RV_\rho$，则式(8)关于$\xi\in[c_1,c_2],(0<c_1<c_2)$一致收敛.而且，当$\rho<0$时，式(8)在区间$(a_1,\infty),(a_1>0)$上对$\xi$一致成立;当$\rho>0$时，式(8)在区间$(0,a_1],(a_1>0)$上对$\xi$一致成立。

命题 2.2：(表示定理) 函数 L 在∞远处是缓慢变化的，当且仅当它可以写成以下形式

$$L(s)=\varphi(s)\exp\left(\int_{a_1}^{s}\frac{y(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\right), s\geq a_1, \tag{10}$$

其中$a_1\geq a\geq 0$，函数φ和 y 均是可测的，且当$s\to\infty$时，$y(s)\to 0$；当$s\to\infty$时，$\varphi(s)\to c_0, c_0>0$。

我们称函数

$$\hat{L}(s)=c_0\exp\left(\int_{a_1}^{s}\frac{y(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau\right), s\geq a_1, \tag{11}$$

在∞远处标准的缓慢变化的函数；

并称函数 $f(s)=c_0 s^{\rho}\hat{L}(s), s\ge a_1$ 在 ∞ 远处是以指标 ρ 标准的正规变化的函数。

同样的，函数 g 称为在点 0 处以指数 σ 标准的正规变化的函数，记 $g\in NRVZ_{\sigma}$，如果 $t\to g(1/t)$ 属于 $NRV_{-\sigma}$。

函数 $f\in RV_{\rho}$，若 $f\in NRV_{\rho}$，当且仅当对某一 $a_1>0$，有 $f\in C^1[a_1,\infty)$
且

$$\lim_{s\to\infty}\frac{sf'(s)}{f(s)}=\rho. \tag{12}$$

命题 2.3：若函数为在 ∞ 远处缓慢变化的函数，则

(i) $L^{\sigma}(\sigma\in\mathbb{R}), c_1L+c_2L_1, (c_1\ge 0, c_2\ge 0, c_1+c_2>0), L\circ L_1(\text{when } t\to+\infty, L_1(t)\to+\infty)$ 均在无穷远处缓慢变化；

(ii) 对每一个 $\theta>0$，当 $t\to+\infty$ 时，有 $t^{\theta}L(t)\to+\infty, t^{-\theta}L(t)\to 0$。

(iii) 对每一个 $\rho\in\mathbb{R}$，有 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln(L(t))}{\ln t}\to 0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln(t^{\rho}L(t))}{\ln t}\to\rho$。

命题 2.4：以下结论成立：

(i) 若 $f_1\in RV_{\rho_1}, f_2\in RV_{\rho_2}$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}f_2(t)=\infty$，则 $f_1\circ f_2\in RV_{\rho_1\rho_2}$。

(ii) 若 $f\in RV_{\rho}$，则对每一个 $\alpha\in\mathbb{R}$，有 $f^{\alpha}\in RV_{\rho\alpha}$。

命题 2.5：(渐近行为) 若函数 L 在 ∞ 远处缓慢变化，则当 $a\ge 0$ 且 $t\to 0^+$ 时，有

(i) 当 $\beta>-1$ 时，$\int_a^t s^{\beta}L(s)\mathrm{d}s\cong(\beta+1)^{-1}t^{1+\beta}L(t)$；

(ii) 当 $\beta<-1$ 时，$\int_t^{\infty}s^{\beta}L(s)\mathrm{d}s\cong(-\beta-1)^{-1}t^{1+\beta}L(t)$。

命题 2.6：(渐近行为) 若函数 L 在点 0 处缓慢变化，则当 $a>0$ 且 $t\to 0^+$ 时，有

(i) 当 $\rho>-1$ 时，$\int_0^t s^{\rho}L(s)\mathrm{d}s\cong(\rho+1)^{-1}t^{1+\rho}L(t)$；

(ii) 当 $\rho<-1$ 时，$\int_t^{a}s^{\rho}L(s)\mathrm{d}s\cong(-\rho-1)^{-1}t^{1+\rho}L(t)$。

接下来，我们给出问题(1)粘性解的精确定义。

定义 2.3：若函数 $u\in C(\Omega)$，对 $\forall\varphi\in C^2(\Omega)$，$u-\varphi$ 在 $x_0\in\Omega$ 处有局部最大值，使得 $\Delta_{\infty}\varphi(x_0)\ge b(x_0)f(u(x_0))$，则称函数 u 是偏微分方程 $\Delta_{\infty}u=b(x)f(u)$ 在 Ω 内的粘性下解。

定义 2.4：若函数 $u\in C(\Omega)$，对 $\forall\varphi\in C^2(\Omega)$，$u-\varphi$ 在 $x_0\in\Omega$ 处有局部最小值，使得 $\Delta_{\infty}\varphi(x_0)\le b(x_0)f(u(x_0))$，则称函数 u 是偏微分方程 $\Delta_{\infty}u=b(x)f(u)$ 在 Ω 内的粘性上解。

定义 2.5：若函数 $u\in C(\Omega)$ 既是粘性上解又是粘性下解，称函数 u 是偏微分方程 $\Delta_{\infty}u=b(x)f(u)$ 在 Ω 内的粘性解。最后，若 u 是偏微分方程 $\Delta_{\infty}u=b(x)f(u)$ 的解，使得在 $\partial\Omega$ 上 $u=\infty$，则称 u 为问题(1)的解。

3. 一些辅助结论

本节将介绍定理证明过程中用到的一些辅助结论。

引理 3.1：假设 f 满足(f_1)-(f_2)，ϕ 是积分方程

$$\int_{\phi(t)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}=t, t>0,\quad H(s):=(f(s))^{1/3},\ \forall s>0$$

的解，则

(i) $-\phi'(t)=\left(f\left(\phi(t)\right)\right)^{\frac{1}{3}},\phi(t)>0,t>0,\phi(0):=\lim\limits_{t\to 0^+}\phi(t)=+\infty,$

$\phi''(t)=\frac{1}{3}\left(f\left(\phi(t)\right)\right)^{-\frac{1}{3}}f'\left(\phi(t)\right),t>0$；

(ii) $\phi\in NRVZ_{\frac{3}{3-p}}$；

(iii) $\phi'\in NRVZ_{\frac{p}{3-p}}$。

证明：(i) 由 ϕ 满足的积分方程，通过简单计算可知(i)成立。

(ii) 由式子(12)和命题 2.4 (ii)的证明知 $f^{-\frac{1}{3}}\in RV_{-\frac{p}{3}}$。

定义 $L_1(t):=f^{-\frac{1}{3}}(t)\big/t^{-\frac{p}{3}}$，则 L_1 是缓慢变化的。

由于 $p>3$，则 $-\frac{p}{3}<-1$。因此，结合命题 2.5，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{tf^{-\frac{1}{3}}(t)}{\int_t^{\infty}f^{-\frac{1}{3}}(s)\mathrm{d}s}=\lim_{t\to\infty}\frac{tL_1(t)t^{-\frac{p}{3}}}{\int_t^{\infty}L_1(s)s^{-\frac{p}{3}}\mathrm{d}s}=\frac{p-3}{3}.$$

因此，

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t\phi'(t)}{\phi(t)}=-\lim_{t\to 0^+}\frac{t\left(f\left(\phi(t)\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{\phi(t)}=-\lim_{s\to+\infty}\frac{\left(f(s)\right)^{\frac{1}{3}}\int_s^{\infty}\frac{\mathrm{d}v}{\left(f(v)\right)^{\frac{1}{3}}}}{s}=\frac{3}{3-p},$$

即 $\phi\in NRVZ_{\frac{3}{3-p}}$。

(iii) 由条件 (f_2) 和(i)可知

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{t\phi''(t)}{\phi'(t)}&=-\frac{1}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\phi(t)\right)\int_{\phi(t)}^{\infty}\left(f(s)\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}s}{\left(f\left(\phi(t)\right)\right)^{\frac{2}{3}}}\\&=-\lim_{s\to+\infty}\frac{f'(s)\int_s^{\infty}\left(f(v)\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}v}{3\left(f(s)\right)^{\frac{2}{3}}}\\&=-\frac{1}{3}\lim_{s\to+\infty}\frac{sf'(s)}{f(s)}\frac{\int_s^{\infty}\left(f(v)\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}v}{s\left(f(s)\right)^{-\frac{1}{3}}}=\frac{p}{3-p}\end{aligned}$$

即 $\phi'\in NRVZ_{\frac{p}{3-p}}$。

4. 定理的证明

首先，我们引入下列结果：

引理 4.1 (比较原理) ([10]，定理 2.5) 设 b 满足(b_1)，且 f 满足(f_1)。假设 $u,v\in C\left(\overline{\Omega}\right)$，使得在粘性意义下在 Ω 内成立 $\Delta_\infty u\ge b(x)f(u)$ 和 $\Delta_\infty v\le b(x)f(v)$；若在 Ω 的边界上成立 $u\le v$ 且 $0\le v$，则在 Ω 内成立 $u\le v$。

对任意的 $\delta>0$，定义 $\Omega_\delta=\{x\in\Omega:d(x)<\delta\}$。因为是 Ω 光滑的，所以存在 $\delta_0>0$，使得 $d\in C^2(\Omega_{\delta_0})$ 且 $|\nabla d(x)|=1,\forall x\in\Omega_{\delta_0}$，从而在粘性意义下在 Ω 内成立 $\Delta_\infty d=0$。

定理 1.1 的证明：固定一小常数 $\varepsilon>0$。设 $\delta_\varepsilon\in\left(0,\frac{\delta_0}{2}\right)$，$\rho\in(0,\delta_\varepsilon)$。

定义

$$\overline{u}_\varepsilon=(\xi_0+\varepsilon)\phi\big(h(d(x))-h(\rho)\big),\quad \forall\, x\in\Omega_{2\delta_\varepsilon}\setminus\overline{\Omega}_\rho=:\Omega_\rho^-$$

和

$$\underline{u}_\varepsilon=(\xi_0-\varepsilon)\phi\big(h(d(x))+h(\rho)\big),\quad \forall\, x\in\Omega_{2\delta_\varepsilon-\rho}=:\Omega_\rho^+,$$

其中 $h(t)=\frac{3}{4-\lambda}t^{\frac{4-\lambda}{3}}$，$\xi_0=\left(\frac{p+1-\lambda}{b_0(p-3)}\right)^{\frac{1}{p-3}}$。

令 $\eta(t)=(\xi_0+\varepsilon)\phi\big(h(t)-h(\rho)\big),t\in(\rho,2\delta_\varepsilon)$。注意到 h 和 ϕ 在它们各自定义的范围内分别是递增和递减的，因此可选取充分小的 δ_ε 使得 η 在区间 $(\rho,2\delta_\varepsilon)$ 上是递减的。令 ζ 是 η 的反函数，容易验证

$$\zeta'(t)=\frac{1}{\eta'(\zeta(t))}=\Big((\xi_0+\varepsilon)\phi'\big(h(\zeta(t))-h(\rho)\big)h'(\zeta(t))\Big)^{-1}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\zeta''(t)=&-(\xi_0+\varepsilon)^{-2}\Big(\phi'\big(h(\zeta(t))-h(\rho)\big)h'(\zeta(t))\Big)^{-3}\\&\times\Big(\phi''\big(h(\zeta(t))-h(\rho)\big)\big(h'(\zeta(t))\big)^2+\phi'\big(h(\zeta(t))-h(\rho)\big)h''(\zeta(t))\Big).\end{aligned}\tag{14}$$

令 $(x_0,\psi)\in\Omega_\rho^-\times C^2(\Omega_\rho^-)$ 在 x_0 的某领域 N 内满足 $\overline{u}_\varepsilon\ge\psi$，并且 $\overline{u}_\varepsilon(x_0)=\psi(x_0)$。因此在 N 内成立 $\varphi=\zeta(\psi)\in C^2(\Omega_\rho^-)$ 且 $d(x)\le\varphi(x),d(x_0)=\varphi(x_0)$。

由于在 Ω_ρ^- 内满足 $\Delta_\infty d=0$，因此可得出 $\Delta_\infty\varphi(x_0)\ge0$。通过简单计算有

$$\Delta_\infty\varphi=\zeta''(\psi)\big(\zeta'(\psi)\big)^2|D\psi|^4+\big(\zeta'(\psi)\big)^3\Delta_\infty\psi.$$

由 $\Delta_\infty\varphi(x_0)\ge0$ 和 $\zeta'<0$，可得

$$\Delta_\infty\psi(x_0)\le-\zeta''(\psi(x_0))\big(\zeta'(\psi(x_0))\big)^{-1}|D\psi(x_0)|^4.$$

此外，当 $x\in\Omega_\rho^-$，有 $|Dd(x)|=1$，且 $d^--\varphi$ 在 x_0 处有局部最大值，所以有

$$|Dd(x_0)|=\big|\zeta'(\psi(x_0))D\psi(x_0)\big|,$$

即

$$\Delta_\infty\psi(x_0)\le-\zeta''(\psi(x_0))\big(\zeta'(\psi(x_0))\big)^{-5}.$$

由公式(13)和(14)，可进一步得到

$$\begin{aligned}\Delta_\infty\psi(x_0)\le&(\xi_0+\varepsilon)^3\Big(\phi'\big(h(\zeta(\psi(x_0)))-h(\rho)\big)\Big)^3\\&\times\left[\frac{\phi''\big(h(\zeta(\psi(x_0)))-h(\rho)\big)\big(h'(\zeta(\psi(x_0)))\big)^4}{\phi'\big(h(\zeta(\psi(x_0)))-h(\rho)\big)}+h''(\zeta(\psi(x_0)))\big(h'(\zeta(\psi(x_0)))\big)^2\right].\end{aligned}$$

由 $\varphi=\zeta(\psi)$ 得

$$\begin{aligned}
&\Delta_\infty\psi(x_0)-b(x_0)f(\bar{u}_\varepsilon(x_0))\\
&\le(\xi_0+\varepsilon)^3\left(-\phi'\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)\right)^3\left(d(x_0)\right)^{-\lambda}\\
&\times\left[-\frac{\phi''\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)}{\phi'\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)}\frac{\left(h'\left(d(x_0)\right)\right)^4}{h\left(d(x_0)\right)\left(d(x_0)\right)^{-\lambda}}\frac{h\left(d(x_0)\right)}{h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)}\right.\\
&\left.-\frac{h''\left(d(x_0)\right)\left(h'\left(d(x_0)\right)\right)^2}{\left(d(x_0)\right)^{-\lambda}}-(\xi_0+\varepsilon)^{-3}\frac{b(x_0)}{\left(d(x_0)\right)^{-\lambda}}\frac{f(\bar{u}_\varepsilon(x_0))}{\left(-\phi'\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)\right)^3}\right]\\
&\le(\xi_0+\varepsilon)^3\left(-\phi'\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)\right)^3\left(d(x_0)\right)^{-\lambda}\\
&\times\left[-\frac{\phi''\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)}{\phi'\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)}\frac{\left(h'\left(d(x_0)\right)\right)^4}{h\left(d(x_0)\right)\left(d(x_0)\right)^{-\lambda}}\right.\\
&\left.-\frac{h''\left(d(x_0)\right)\left(h'\left(d(x_0)\right)\right)^2}{\left(d(x_0)\right)^{-\lambda}}-(\xi_0+\varepsilon)^{-3}\frac{b(x_0)}{\left(d(x_0)\right)^{-\lambda}}\frac{f(\bar{u}_\varepsilon(x_0))}{\left(-\phi'\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)\right)^3}\right]\\
&=:(\xi_0+\varepsilon)^3\left(-\phi'\left(h\left(d(x_0)\right)-h(\rho)\right)\right)^3\left(d(x_0)\right)^{-\lambda}I(x_0).
\end{aligned}$$

当 $\delta_\varepsilon\to0$ 时，$h\left(d(x_0)\right)\to0$ （x_0 趋于 Ω 的边界)，因此，结合引理 3.1 以及条件(b_2)和(f_1)可得当 $\delta_\varepsilon\to0$ 时，

$$I(x_0)\to\frac{p+1-\lambda}{p-3}-b_0(\xi_0+\varepsilon)^{p-3}.$$

因此，根据 ξ_0 的取值，可选取 $\delta_\varepsilon\in\left(0,\frac{\delta_0}{2}\right)$ 充分小使得 $I(x_0)<0$。从而 $\Delta_\infty\psi(x_0)\le b(x_0)f(\bar{u}_\varepsilon(x_0))$，即 $\bar{u}_\varepsilon$ 是问题(1)在 Ω_ρ^- 内的上解。同样的证明方法，可以证明 $\underline{u}_\varepsilon$ 是问题(1)在 Ω_ρ^+ 内的下解。

现在设 u 是问题(1)的任意一解。可以断言存在正的常数 M 使得

$$u\le M(\delta)+\bar{u}_\varepsilon,\ x\in\Omega_\rho^- \tag{15}$$

$$\underline{u}_\varepsilon\le u+M(\delta),\ x\in\Omega_\rho^+ \tag{16}$$

事实上，我们可选取 $M(\delta):=\max\{u(x):d(x)\ge2\delta\}$ 使得在

$$\Gamma_{2\delta}:=\{x\in\Omega:d(x)=2\delta\}$$

上成立 $u\le M(\delta)+\bar{u}_\varepsilon$。

由条件(f_1)可知 $M(\delta)+\bar{u}_\varepsilon$ 也是方程(1)在 Ω_ρ^- 内的一上解。又因为在 $\Gamma_\rho:=\{x\in\Omega:d(x)=\rho\}$ 上成立 $u<\bar{u}_\varepsilon$，则由比较原理(引理 4.1)可得式子(15)成立。

同样的，可证式子(16)成立。

因此，对 $x\in\Omega_\rho^-\cap\Omega_\rho^+$ 成立，当 $\rho\to0$ 时

$$\xi_0-\varepsilon-\frac{M}{\phi\left(h\left(d(x)\right)\right)}\le\frac{u(x)}{\phi\left(h\left(d(x)\right)\right)}$$

和

$$\frac{u(x)}{\phi(h(d(x)))} \le \xi_0 + \varepsilon + \frac{M}{\phi(h(d(x)))}.$$

此外，根据引理 3.1 知 $\phi(0)=\infty$，因此可得

$$\xi_0 - \varepsilon \le \liminf_{d(x)\to 0} \frac{u(x)}{\phi(h(d(x)))}$$

和

$$\limsup_{d(x)\to 0} \frac{u(x)}{\phi(h(d(x)))} \le \xi_0 + \varepsilon.$$

在上两式中令 $\varepsilon \to 0$，有

$$\lim_{d(x)\to 0} \frac{u(x)}{\phi(h(d(x)))} = \xi_0. \tag{17}$$

另一方面，由引理 3.1 (ii)可知

$$\lim_{d(x)\to 0} \frac{\phi(h(d(x)))}{\phi\left((d(x))^{\frac{4-\lambda}{3}}\right)} = \left(\frac{3}{4-\lambda}\right)^{\frac{3}{3-p}}. \tag{18}$$

结合公式(17)和(18)可知定理的结论成立。

基金项目

本文由临沂大学大学生创新创业训练计划项目(编号：201610452004)部分资助。

参考文献 (References)

[1] Aronsson, G. (1967) Extension of functions Satisfying Lipschitz Conditions. *Arkiv för Matematik*, **6**, 551-561. https://doi.org/10.1007/BF02591928

[2] Crandall, M. and Lions, P.L. (1983) Viscosity Solutions and Hamilton-Jacobi Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **277**, 1-42. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8

[3] Crandall, M., Evans, L.C. and Lions, P.L. (1984) Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **282**, 487-502. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1984-0732102-X

[4] Crandall, M., Ishii, H. and Lions, P.L. (1992) User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **27**, 1-67. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1992-00266-5

[5] Jensen, R. (1993) Uniqueness of Lipschitz Extensions: Minimizing the Sup Norm of the Gradient. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **123**, 51-74. https://doi.org/10.1007/BF00386368

[6] Aronson, G., Crandall, M.G. and Juutinen, P. (2004) A Tour of the Theory of Absolute Minimizing Functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **41**, 439-505. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-04-01035-3

[7] Crandall, M.G. (2008) A Visit with the 1-Laplace Equation. In: Dacorogna, B. and Marcellini, P., Eds., *Calculus of Variations and Nonlinear Partial Differential Equations*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1927, Springer, Berlin, Heidelberg, 75-122. https://doi.org/10.1007/978-3-540-75914-0_3

[8] Juutinen, P. and Rossi, J. (2008) Large Solutions for the Infinity Laplacian. *Advances in Calculus of Variations*, **1**, 271-289. https://doi.org/10.1515/ACV.2008.011

[9] Mohammed, A. and Mohammed, S. (2012) Boundary Blow-Up Solutions to Degenerate Elliptic Equations with

Non-Monotone Inhomogeneous Terms. *Nonlinear Analysis*, **75**, 3249-3261.

[10] Mohammed, A. and Mohammed, S. (2011) On Boundary Blow-Up Solutions to Equations Involving the ∞-Laplacian, *Nonlinear Analysis*, **74**, 5238-5252.

[11] Cirstea, F. and Radulescu, V. (2002) Uniqueness of the Blow-Up Boundary Solution of Logistic Equations with Absorption. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series I*, **335**, 447-452.

[12] Cirstea, F. and Radulescu, V. (2006) Nonlinear Problems with Boundary Blow-Up: A Karamata Regular Variation Theory Approach. *Asymptotic Analysis*, **46**, 275-298.

[13] Keller, J.B. (1957) On Solutions of $\Delta u = f(u)$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **10**, 503-510. https://doi.org/10.1002/cpa.3160100402

[14] Osserman, R. (1957) On the Inequality $\Delta u \geq f(u)$. *Pacific Journal of Mathematics*, **71**, 641-1647.

[15] Loewner, C. and Nirenberg, L. (1974) Partial Differential Equations Invariant under Conformal or Projective Transformations, Contributions to Analysis (A Collection of Papers Dedicated to Lipman Bers). Academic Press, New York, 245-272.

[16] Garcia-Meliaán, J. (2007) Boundary Behavior of Large Solutions to Elliptic Equations with Singular Weights. *Nonlinear Analysis*, **67**, 818-826.

[17] Maric, V. (2000) Regular Variation and Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1726, Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0103952

[18] Resnick, S.I. (1987) Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. Springer-Verlag, New York, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-0-387-75953-1

[19] Seneta, R. (1976) Regular Varying Functions. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 508, Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0079658