Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(3), 265-268
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.83034

Hans汉斯

A Note on Generalized Quaternion 2-Group

Yanheng Chen*, Songfang Jia

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges University, Chongqing
Email: *math_yan@126.com, jiasongfang@163.com

Received: May 4th, 2018; accepted: May 17th, 2018; published: May 25th, 2018

Abstract

This article uses the theory of the finite *p*-group, giving out two sufficiency and necessity conditions for the generalized quaternion 2-groups, thus obtaining the following conclusion: let *G* be a finite *p*-group. Then every abelian subgroup of *G* is cyclic if and only if *G* has only one subgroup of order *p*.

Keywords

Finite *p*-Group, Generalized Quaternion 2-Group, Sufficiency and Necessity Conditions

关于广义四元数2-群的一个注记

陈彦恒*，贾松芳

重庆三峡学院，数学与统计学院，重庆
Email: *math_yan@126.com, jiasongfang@163.com

收稿日期：2018年5月4日；录用日期：2018年5月17日；发布日期：2018年5月25日

摘　要

运用有限p-群的有关知识，给出了两个判定广义四元数2-群的充要条件，进而得到结论：设G是一个有限p-群。则G的每个交换子群皆循环当且仅当G仅有一个p-阶子群。

关键词

有限p-群，广义四元数2-群，充要条件

*通讯作者。

文章引用: 陈彦恒, 贾松芳. 关于广义四元数 2-群的一个注记[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 265-268.
DOI: 10.12677/pm.2018.83034

1. 引言

本文中 G 表示有限群。若 G 为 p-群，$s_k(G)$ 表示 G 的 p^k 阶子群的个数，从而 $s_1(G)$ 表示 G 的 p 阶子群的个数。本文的其他数学符号都是标准的，如果有需要可参考文献[1] [2]。

众所周知，广义四元数 2-群 Q_{2^n}，

$$Q_{2^n}=\left\langle a,b \middle| a^{2^{n-1}}=1,b^2=a^{2^{n-2}},b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle,n\geq 3,$$

是四元数群 Q_8

$$Q_8=\left\langle a,b \middle| a^4=1,b^2=a^2,b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle$$

在有限 p-群上的推广。Q_{2^n} 是一类十分重要的有限 p-群，具有很多优良的性质。例如，

1) Q_{2^n} 是一类具有极大循环的子群的有限 p-群；
2) Q_{2^n} 是一类最大类有限 p-群；
3) Q_{2^n} 是一类仅有一个 2 阶元的有限 p-群等等。本文讨论了广义四元数 2-群另两个性质：
4) Q_{2^n} 的每一个交换子群都循环；
5) Q_{2^n} 仅有一个 2 阶子群，

从而得到两个判定广义四元数 2-群的充要条件，进而也得到如下有趣结论：

设 G 是一个有限 p-群。则 G 的每个交换子群皆循环的充要条件是 G 仅有一个 p 阶子群。

2. 预备引理

为了方便主要定理的证明，下面引入几个引理。

引理 1：设 G 是一个 p-群，且 G 的每个交换正规子群皆循环。

1) 若 $p>2$，则 G 本身是循环群；
2) 若 $p=2$，则 G 有极大循环子群。

证明：可参考文献[1]第 V 章定理 5.10。

引理 2：设 $|G|=p^n$，G 有 p^{n-1} 阶循环子群 $\langle a\rangle$。则 G 只有以下七种不同构的类型：

I) p^n 阶循环群：$G=\left\langle a \middle| a^{p^n}=1\right\rangle,n\geq 1$。

II) $\left(p^{n-1},p\right)$ 型交换群：$G=\left\langle a,b \middle| a^{p^{n-1}}=b^p=1,ab=ba\right\rangle,n\geq 1$。

III) $G=\left\langle a,b \middle| a^{p^{n-1}}=b^p=1,b^{-1}ab=a^{1+p^{n-2}}\right\rangle,p\neq 2,n\geq 3$。

IV) 广义四元数 2-群：

$$G=\left\langle a,b \middle| a^{2^{n-1}}=1,b^2=a^{2^{n-2}},b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle,p=2,n\geq 3.$$

V) 二面体 2-群：

$$G=\left\langle a,b \middle| a^{2^{n-1}}=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle,p=2,n\geq 3.$$

VI) 半广义四元数 2-群：

$$G=\left\langle a,b \middle| a^{2^{n-1}}=b^2=1, b^{-1}ab=a^{1+2^{n-2}} \right\rangle, p=2, n\geq 4 .$$

VII) $G=\left\langle a,b \middle| a^{2^{n-1}}=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1+2^{n-2}} \right\rangle, p=2, n\geq 4$ 。

证明：可参考文献[1]第 V 章定理 5.14。

引理 3：设 $|G|=p^n$ 。若 $s_1(G)=1$，则 G 是循环群或广义四元数 2-群。

证明：可参考文献[1]第 IV 章定理 6.1。

引理 4：若 G 是一个广义四元数 2-群，则 G 的每个交换子群皆是循环群。

证明：设 G 是 $2^{n-1}(n\geq 3)$ 阶的广义四元数 2-群。由参考文献[3]的引理 3(2)和定理 1(3)知，

i) G 的 2 阶和 2^2 阶子群都是循环的；

ii) G 的 2^k 阶子群除一个循环群外，其余都是广义四元数 2-群类型的群，其中 $k=3,\cdots,n-1$ 。

因此广义四元数 2-群的循环子群就是它的全部交换子群，即证。

3. 主要定理

定理 1：设 G 是一个非循环 p-群。则下列三个条件等价。

1) G 是一个广义四元数 2-群；

2) G 的每个交换子群皆循环；

3) G 仅有一个 p 阶子群。

证明：首先证明(1)和(2)等价。由引理 4 知，(1) $\Rightarrow$ (2)显然成立。下证(2) $\Rightarrow$ (1)。

由于 G 的每个交换子群皆循环，所以 G 的每个交换正规子群也皆循环。因而由引理 1 知，G 要么为循环群，要么为具有循环极大子群的 2-群。既然 G 不循环，从而 G 是有循环极大子群的 2-群。因此 G 可能为引理 2 中七类群中 $(2^{n-1},2)$ 型交换群(II)、广义四元数 2-群(VI)、二面体 2-群(V)、半广义四元数 2-群(VI)和(VII)类型群。但由文献[3]的定理 1 的证明过程知，(II)、(VI)、(V)和(VII)类型群都有 $(2,2)$ 型的交换子群，故 G 仅能为广义四元数 2-群。

其次证明(1)和(3)等价。

(1) $\Rightarrow$ (3)。设 G 是一个广义四元数 2-群 Q_{2^n} 。则 Q_{2^n} 仅有一个 2 阶元 $\left\langle a^{2^{n-1}} \right\rangle$，从而 G 仅有一个 2-阶子群。

(3) $\Rightarrow$ (1)。既然 G 仅有一个 p 阶子群，即 $s_1(G)=1$ 。由引理 3 知，G 要么为循环群，要么为广义四元数 2-群。又由 G 不循环，G 仅能为广义四元数 2-群。

因此在命题假设下，(1)，(2)，(3)条是等价的，即证。

从定理 1 中，我们很容易得到一个有趣的推论。

推论：设 G 是一个有限 p-群。则 G 的每个交换子群皆循环当且仅当 G 仅有一个 p 阶子群。

证明：对于 G 循环的情形是显然的；对于 G 不循环的情形可由定理 1 得到，即证。

基金项目

该文由重庆市教委科研项目(KJ1710254)，重庆三峡学院重点项目(14ZD16)资助。

参考文献

[1] 徐明耀. 有限群导引(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1993: 55, 123-125, 154-158, 178.

[2] Huppert, B. (1967) Endliche Gruppen I. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

https://doi.org/10.1007/978-3-642-64981-3

[3] 陈彦恒, 曹洪平. 各阶非平凡子群的个数为 $p+1$ 的 p-群的完全分类[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(2): 11-14.