Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(3), 259-264
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.83033

Hans汉斯

Simultaneous Approximation Properties of Complex Baskakov-Kantorovich Operators in Compact Disks

Wenxia Li, Qiulan Qi

College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei
Email: 1306638045@qq.com, liwenxiaabc@163.com

Received: May 3rd, 2018; accepted: May 17th, 2018; published: May 25th, 2018

Abstract

In this paper, the approximation properties of the Baskakov-Kantorovich operators in the complex space are studied according to the definition and properties of the operator in the complex space. We obtain the simultaneous approximation order for complex Baskakov-Kantorovich operators attached to entire functions or to analytic functions in compact disks.

Keywords

Baskakov-Kantorovich Operators, Simultaneous Approximation, Voronovskaja-Type Results

Baskakov-Kantorovich算子在紧圆盘上的同时逼近性质

李文霞，齐秋兰

河北师范大学数学与信息科学学院，河北 石家庄
Email: 1306638045@qq.com, liwenxiaabc@163.com

收稿日期：2018年5月3日；录用日期：2018年5月17日；发布日期：2018年5月25日

摘 要

本文根据Baskakov-Kantorovich算子在复空间的定义及性质研究Baskakov-Kantorovich算子在复空间的逼近性质，得到了Baskakov-Kantorovich算子在紧圆盘上的同时逼近性质。

文章引用: 李文霞, 齐秋兰. Baskakov-Kantorovich 算子在紧圆盘上的同时逼近性质[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 259-264.
DOI: 10.12677/pm.2018.83033

关键词

Baskakov-Kantorovich算子，同时逼近，Voronovskaja型结果

1. 引言

在复空间 C 上，令 $D_R := \{z \in C : |z| < R, R > 1\}$， $H(D_R)$ 表示 D_R 上解析函数空间。

函数 $f:[R,+\infty)\cup\overline{D_R} \to C$ 在 $[R,+\infty)\cup\overline{D_R}$ 上连续，在 D_R 上解析。若 $f \in H(D_R)$，对所有的 $z \in D_R$，有 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$，其中 $\|f\|_r = \sup\{|f(z)| : |z| \le r\}$。则复的改进的 Baskakov-Kantorovich 型算子的定义为：

$$K_n(f,z)=\sum_{j=0}^{\infty} v_{n,j}(z)\int_0^1 f\left(\frac{j+t}{n+1}\right)\mathrm{d}t,$$

其中

$$v_{n,j}(z)=\binom{n+j-1}{j} z^j (1+z)^{-n-j}.$$ [1]-[10]

引理 1.1 [11]：[Cauchy 积分公式]设区域 D 的边界是周线(或复周线) C，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D} = D + C$ 上连续，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \quad (z \in D).$$

引理 1.2 [11]：[泰勒展式]设 $f(z)$ 在区域 D 内解析， $a \in D$，只要圆 $L:|z-a| < R$ 含于 D，则 $f(z)$ 在 L 内能展成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

其中系数

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

$$(\tau_\rho : |\xi - a| = \rho, 0 < \rho < R; n = 0,1,2,\cdots)$$

且展式是惟一的。

定理 1.1：设 $f \in H(D_R)$ 且有界于 $[0,+\infty)$，$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, z \in D_R$，若 $1 \le r < r_1 < \frac{R}{2}$，对任意 $|z| \le r, z \ne -1$ 以及 $n, p \in N$，有

$$\left|K_n^{(p)}(f,z) - f^{(p)}(z)\right| \le \frac{p!\, r_1 C_{r_1}(f)}{n(r_1 - r)^{p+1}},$$

其中

$$C_{r_1}(f)=\frac{3}{2}\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|m(m+1)(m+1)!(2r_1)^m<+\infty.$$

定理 1.2: 设 $f\in H(D_R)$ 且有界于 $[0,+\infty)$，$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m, z\in D_R$，若 $1\le r<r_1<\frac{R}{2}$，对任意 $|z|\le r, z\ne -1$ 以及 $n,p\in N$，假设 f 在 D_R 上不是阶小于等于 $\max\{1,p-1\}$ 的多项式，当引理 2.2 中级数收敛时，有

$$\left\|K_n^{(p)}(f,z)-f^{(p)}(z)\right\|_r\ge\frac{1}{n}B_{r_1}(f),$$

其中 $B_{r_1}(f)$ 依赖于 f 和 r,r_1，但 n,p 与无关。

推论： 设 $f\in H(D_R)$ 且有界于 $[0,+\infty)$，$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m, z\in D_R$，若 $1\le r<r_1<\frac{R}{2}$，对任意 $|z|\le r, z\ne -1$ 以及 $n,p\in N$，假设 f 在 D_R 上不是阶小于等于 $\max\{1,p-1\}$ 的多项式，当引理 2.2 中级数收敛时，有

$$\left\|K_n^{(p)}(f,z)-f^{(p)}(z)\right\|_r\sim\frac{1}{n}N_{r_1}(f),$$

其中 $N_{r_1}(f)$ 依赖于 f 和 r,r_1，但 n,p 与无关。

注：本文 C 表示不依赖于 x 或者 z 与 n 的常数，不同地方代表不同数值。

2. 重要引理

引理 2.1 [12]： 设 $f\in H(D_R)$ 且有界于 $[0,+\infty)$，$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m, z\in D_R$，若 $1\le r<\frac{R}{2}$，对任意 $|z|\le r, z\ne -1$ 以及 $n\in N$，有

$$\left|V_n^*(f,z)-f(z)\right|\le\frac{3}{2n}\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|m(m+1)(m+1)!(2r)^m,$$

其中

$$C_r(f)=\frac{3}{2}\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|m(m+1)(m+1)!(2r)^m<+\infty.$$

引理 2.2 [12]： 设 $f\in H(D_R)$ 且有界于 $[0,+\infty)$，$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m, z\in D_R$，若 $1\le r<\frac{R}{2}$，对任意 $|z|\le r, z\ne -1$ 以及 $n\in N$，有

$$\left|V_n^*(f,z)-f(z)-\frac{1-2z}{2(n+1)}f'-\frac{z(1+z)}{2(n+1)}f''(z)\right|\le\frac{11}{n^2}\sum_{m=2}^{\infty}|a_m|m(m-1)^2(m+1)!(2r)^m,$$

其中

$$A_r(f)=11\sum_{m=2}^{\infty}|a_m|m(m-1)^2(m+1)!(2r)^m<+\infty.$$

引理 2.3 [12]： 设 $f\in H(D_R)$ 且有界于 $[0,+\infty)$，$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m, z\in D_R$，若 $1\le r<\frac{R}{2}$，对任意 $|z|\le r, z\ne -1$ 以及 $n\in N$，有

$$\left\|V_n^*(f)-f\right\|\ge\frac{1}{n}B_r(f),$$

其中 $B_r(f)$ 依赖于 f 和 r，但与 n 无关。

3. 定理的证明

定理1.1的证明

证明：令 γ 是以 O 为圆心，半径 $r_1>1$ 的圆，对任意 $|z|\le r, z\ne -1$ 和 $v\in\gamma$，此时，$|v-z|\ge r_1-r$，由高阶 Cauchy 积分公式得

$$\left|K_n^{(p)}(f,z)-f^{(p)}(z)\right|=\frac{p!}{2\pi}\left|\int_\gamma\frac{K_n(f,v)-f(v)}{(v-z)^{p+1}}\mathrm{d}v\right|$$
$$\le\frac{C_{r_1}(f)}{n}\cdot\frac{p!}{2\pi}\cdot\frac{2\pi r_1}{(r_1-r)^{p+1}}=\frac{p!r_1C_{r_1}(f)}{n(r_1-r)^{p+1}}.$$

命题得证。

定理 1.2 的证明

证明：对所有的 $v\in\gamma$ 和 $n\in N$，有

$$K_n(f,v)-f(v)=\frac{1}{n}\left\{\frac{1-2v}{2(n+1)}f'(v)+\frac{v(1+v)}{2(n+1)}f''(v)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n}\left[n^2\left(K_n(f,v)-f(v)-\frac{1-2v}{2(n+1)}f'(v)-\frac{v(1+v)}{2(n+1)}f''(v)\right)\right]\right\}$$

运用高阶 Cauchy 积分公式，可得：

$$K_n^{(p)}(f,z)-f^{(p)}(z)$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(1-2v)f'(v)}{2(v-z)^{p+1}}\mathrm{d}v+\int_\gamma\frac{v(1+v)f''(v)}{2(v-z)^{p+1}}\mathrm{d}v\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n}\frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{n^2\left[\left(K_n(f,v)-f(v)-\frac{1-2v}{2(n+1)}f'(v)-\frac{v(1+v)}{2(n+1)}f''(v)\right)\right]}{(v-z)^{p+1}}\mathrm{d}v\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\left[\frac{(1-2z)}{2}f'(z)\right]^{(p)}+\left[\frac{z(1+z)}{2}f''(z)\right]^{(p)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n}\frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{n^2\left[\left(K_n(f,v)-f(v)-\frac{1-2v}{2(n+1)}f'(v)-\frac{v(1+v)}{2(n+1)}f''(v)\right)\right]}{(v-z)^{p+1}}\mathrm{d}v\right\}$$

所以对所有的 $|z|\le r, z\ne -1$ 和 $n,p\in N$，有

$$\left|K_n^{(p)}(f,z)-f^{(p)}(z)\right|$$
$$\geq\frac{1}{n}\left\{\left\|\left[\frac{(1-2z)}{2}f'(z)\right]^{(p)}+\left[\frac{z(1+z)}{2}f''(z)\right]^{(p)}\right\|\right.$$
$$\left.-\frac{1}{n}\left\|\frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{n^2\left[\left(K_n(f,v)-f(v)-\frac{(1-2v)}{2(n+1)}f'(v)-\frac{v(1+v)}{2(n+1)}f''(v)\right)\right]}{(v-z)^{p+1}}\mathrm{d}v\right\|\right\},$$

由引理2.2，对所有的$|z|\leq r,z\neq -1$和$n,p\in N$，有

$$\left|\frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{n^2\left[\left(K_n(f,v)-f(v)-\frac{1-2v}{2(n+1)}f'(v)-\frac{v(1+v)}{2(n+1)}f''(v)\right)\right]}{(v-z)^{p+1}}\mathrm{d}v\right|$$
$$\leq\frac{p!}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi r_1n^2}{(r_1-r)^{p+1}}\cdot\frac{11}{n^2}\sum_{m=2}^{\infty}|a_m|m(m-1)^2(m+1)!(2r)^m$$
$$\leq\frac{11p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}}\sum_{m=2}^{\infty}|a_m|m(m-1)^2(m+1)!(2r)^m.$$

由 f 的假设条件，知$\left\|\left(\frac{1-2z}{2}f'(z)+\frac{z(1+z)}{2}f''(z)\right)^{(p)}\right\|_r>0$。事实上，若否，则任意$z\in\overline{D_r}$，有$(1-2z)f'(z)+z(1+z)f''(z)=Q_{p-1}(z)$，其中$Q_{p-1}(z)$为阶小于等于$p-1$的多项式，故$Q_{p-1}(z)=\sum_{j=1}^{p-1}A_jz^j$。令$f'(z)=g(z)$，对任意$z\in\overline{D_r}$，有$(1-2z)g(z)+z(1+z)g'(z)=Q_{p-1}(z)$，由于$g(z)$解析，令$g(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_jz^j$代入上述微分方程，比较系数可知：$g(z)$为阶小于等于$p-2$的多项式，故$f(z)$为阶小于等于$p-1$的多项式，与假设矛盾。令$C_0=\left\|\left(\frac{1-2z}{2}f'(z)+\frac{z(1+z)}{2}f''(z)\right)^{(p)}\right\|_r$，参照引理2.3证明过程(参见文献[12])，可以得到定理1.2。即存在一个整数$n_0\in N$取决于f,r,r_1和p，使得$n\geq n_0$，有$\left\|K_n^{(p)}(f,z)-f^{(p)}(z)\right\|_r\geq\frac{1}{n}\cdot\frac{C_0}{2}$。当$n\in\{1,2,\cdots,n_0-1\}$时类似可证。

基金项目

国家自然科学基金(10571040)。

参考文献

[1] Ditzian, Z. and Totik, V. (1987) Modulus of Smoothness. Springer-Verlag, Berlin/New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4778-4

[2] Guo, S. and Qi, Q. (2003) Strong Converse Inequalities for Baskakov Operators. *Journal of Approximation Theory*, **124**, 219-231. https://doi.org/10.1016/S0021-9045(03)00119-9

[3] Ispir, N. (2007) Rate of Convergence of Generalized Rational Type Baskakov Operators. *Mathematical and Computer*

Modelling, **46**, 625-631. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2006.11.025

[4] Govil, N.K. and Gupta, V. (2008) Convergence Rate for Generalized Baskakov Type Operators. *Nonlinear Analysis*, **69**, 3795-3801. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.10.015

[5] Gal, S.G. (2009) Approximation by Complex Bernstein and Convolution-Type Operators. World Scientific Publ Co., Singapore, Hong Kong, London, New Jersey. https://doi.org/10.1142/7426

[6] Mahmudov, N.I. and Kara, M. (2013) Approximation Theorems for Complex Szász-Kantorovich Operators. *Journal of Computational Analysis and Applications*, **15**, 32-38.

[7] Gal, S.G. and Opris, B.D. (2015) Approximation with an Arbitrary Order by Modified Baskakov-Type Operators. *Applied Mathematics and Computation*, **265**, 329-332. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.034

[8] Gal, S.G. and Opris, B.D. (2016) Approximation of Analytic Functions with an Arbitrary Order by Generalized Baskakov-Faber Operators in Compact Sets. *Complex Analysis and Operator Theory*, **10**, 369-377. https://doi.org/10.1007/s11785-015-0467-6

[9] Gal, S.G., Mahmudov, N.I. and Opris, B.D. (2016) Approximation with an Arbitrary Order by Szász-Kantorovich and Baskakov Complex Operators in Compact Disks. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **6**, 3-12.

[10] Gal, S.G. and Gupta, V. (2014) Approximation by Complex Szasz-Durrmeyer Operators in Compact Disks. *Acta Mathematica Scientia*, **34B**, 1157-1165. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(14)60076-X

[11] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[12] 李文霞, 齐秋兰. Baskakov-Kantorovich 型算子在紧圆盘上的逼近性质[J]. 数学物理学报, 2018, 38A(4).