Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(3), 289-295
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.83038

Hans汉斯

Many Radial Solutions of Singular k-Hessian Equations

Huayuan Sun, Meiqiang Feng*

School of Applied Science, Beijing Information Science & Technology University, Beijing
Email: *meiqiangfeng@sina.com

Received: May 7th, 2018; accepted: May 21st, 2018; published: May 29th, 2018

Abstract

We prove that many nontrivial radial solutions exist for the singular k-Hessian problem $\begin{cases} S_k\left(D^2u\right)=H\left(|x|\right)f\left(-u\right), & x\in B, \\ u=0, & x\in\partial B. \end{cases}$ **Here** $k\in\{1,2,\cdots,N\}$, $S_k\left(D^2u\right)$ **is the k-Hessian operator, and** B **is the unit ball in** $R^N\left(N\ge 2\right)$**. The main interest is that the weight function** $H\in C(B)$ **is unbounded as** $x\to\partial B$**, and many nontrivial radial solutions to the above k-Hessian problem are derived. Our approach to show existence and multiplicity, exploits fixed point index theory.**

Keywords

k-Hessian Equation, Singular Weight Function, Many Radial Solutions, Existence, Fixed Point Index Theory

奇异k-Hessian方程的多个径向解

孙华远，冯美强*

北京信息科技大学理学院，北京
Email: *meiqiangfeng@sina.com

收稿日期：2018年5月7日；录用日期：2018年5月21日；发布日期：2018年5月29日

摘 要

本文研究奇异k-Hessian方程多个非平凡径向解的存在性：$\begin{cases} S_k\left(D^2u\right)=H\left(|x|\right)f\left(-u\right), & x\in B, \\ u=0, & x\in\partial B. \end{cases}$ 其中，

*通讯作者。

文章引用: 孙华远, 冯美强. 奇异 k-Hessian 方程的多个径向解[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 289-295.
DOI: 10.12677/pm.2018.83038

$\boldsymbol{k \in \{1,2,\cdots,N\}, S_k\left(D^2u\right)}$**是k-Hessian算子，*B*表示** $\boldsymbol{R^N\left(N \ge 2\right)}$ **中的单位球。研究的主要意义在于权函数** $\boldsymbol{H \in C\left(B\right)}$ **在*B*的边界上无界，并且证明上述k-Hessian有多个非平凡解。研究方法主要采用不动点指数定理。**

关键词

k-Hessian方程，奇异权函数，多个径向解，存在性，不动点指数定理

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

K-Hession 问题源自几何学，流体力学和其他应用学科。例如，当 $k=N$ 时，k-Hessian 问题可以表示 Weingarten 曲率或者是反射面形状，参见文献[1]。近年来，越来越多作者开始研究 k-Hessian 问题，并取得了很多优秀的成果，详见文献[2]-[12]。

k-Hessian 方程的一般形式如下：

$$\begin{cases} S_k\left(D^2u\right)=H\left(x\right)f\left(-u\right), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

其中 $k=\{1,2,\cdots,N\}$，

$$S_k\left(D^2u\right)=P_k\left(\Lambda\right)=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le N}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k},$$

$\Lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N\right)$ 是 Hessian 矩阵 D^2u 的特征值。在文献[13] [14]中，Wang 证明了 $P_k\left(\Lambda\right)$ 表示 Λ 中的第 k 个初等对称多项式。

不难看出，k-Hessian 算子是一族算子，包括 Laplace 算子(当 $k=1$ 时)和 Monge-Ampère 算子(当 $k=N$ 时)，以及其他著名算子。

近几年来，有许多人研究了 k-Hessian 问题径向解的存在性，包括 Clement *et al.* [15]，Wang 和 An [16]，Wang [17]，Han，Ma 和 Dai [18] (当 $k=N$ 时)，Sánchez 和 Vergara [6] [19] (当 $1\le k<N/2$ 时)，Jacobsen [20] (当 $1\le k<N$ 时)、Escuder 和 Torres [21] (当 $2\le k<N$ 时)。其中，权函数 H 和非线性项 f 都是特殊情形，而没有对它们的一般情形进行讨论。

本文考虑奇异 k-Hessian 方程

$$\begin{cases} S_k\left(D^2u\right)=H\left(|x|\right)f\left(-u\right), & x\in B, \\ u=0, & x\in\partial B. \end{cases} \tag{1.1}$$

多个非平凡径向解的存在性。其中，$k\in\{1,2,\cdots,N\}, S_k\left(D^2u\right)$ 是 k-Hessian 算子，B 表示 $R^N\left(N\ge2\right)$ 中的单位球，f 是连续函数。

目前对于问题(1.1)的特殊情况，已有不少结果。例如，Zhang 和 Zhou 在文献[22]中证明了当权函数 H 连续且 f 是连续的增函数时，问题(1.1)有一个径向解。Wei 在文献[23]中考虑了权函数 H 恒为 1 的情况，通过运用 Pohozaev 型恒等式和单调分离法证明了问题(1.1)满足如下条件时至多有一个径向解：

1) $f \in C^2([0,+\infty)), f(0)=0, f(s)>0 \ (0 \le s < +\infty)$；

2) $-sf'(-s) > kf(-s) \ (s<0)$；

3) $-sf'(-s) < kf(-s) \ (s<0)$。

基于上述文献的工作，本文主要研究问题(1.1)多个径向解的存在性。我们注意到这可能是第一次讨论 k-Hessian 方程存在多个径向解的结果，尤其是当权函数 H 在单位球边界无界时，这方面的结果更少。

2. 几个引理

为了证明我们的主要结论，本节给出几个引理。

首先，考虑 k-Hessian 算子的径向坐标形式

$$S_k(D^2u) = C_{N-1}^{k-1} t^{1-N} \left(\frac{t^{N-k}}{k} (u')^k \right), t=|x|, x \in R^N.$$

进而，我们可以把问题(1.1)写成如下形式：

$$\begin{cases} C_{N-1}^{k-1} t^{1-N} \left(\dfrac{t^{N-k}}{k} (-u')^k \right)' = \lambda H(t) f(-u), \quad 0<t<1, \\ u'(0)=0, \quad u(1)=0. \end{cases} \tag{2.1}$$

令 v=－u，则问题(2.1)可化为定义在[0,1]上的如下问题：

$$\begin{cases} C_{N-1}^{k-1} t^{1-N} \left(\dfrac{t^{N-k}}{k} (-v')^k \right)' = \lambda H(t) f(v), \ 0<t<1, \\ v'(0)=0, \quad v(1)=0. \end{cases} \tag{2.2}$$

这里 $k=\{1,2,\cdots,N\}$。在本文中，我们假定 H 和 f 满足下述条件

(H_1) $f \in C(R^+, R^+)$，其中 $R^+=[0,+\infty)$；

(H_2) 非负函数 $H \in C([0,1))$，$\int_0^1 H(t)\mathrm{d}t < +\infty$，且其在[0,1]任意子区间上不恒为 0。

由(2.1)和(2.2)式可以得到引理 2.1。

引理 2.1：假定条件(H_1)和(H_2)成立，则有

1) 如果 $v(t)$是问题(2.2)的一个解，那么 $u(t)=-v(t)$ 也是问题(2.1)在 J 上的一个解；

2) 如果 $u(t)$是问题(2.1)的一个解，那么 $v(t)=-u(t)$ 也是问题(2.2)在 J 上的一个解。

接下来将研究问题(2.2)正解的存在性。

本文是基于 $E=C[0,1]$ 空间进行讨论的。显然，E 是实的 Banach 空间，其范数 $\|\cdot\|$ 定义为 $\|v\| = \max_{t \in J} |v(t)|$。如果 $v \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1)$，且满足(2.2)式，那么称 v 是问题(2.2)的解。

通过直接计算可以得到下述结论。

引理 2.2：假定条件(H_1)和(H_2)成立，则 v 是问题(2.2)的解当且仅当 $v \in E$ 是下述方程的解

$$v(t) = \int_t^1 \left(\int_0^\tau k \tau^{k-N} s^{N-1} \left(C_{N-1}^{k-1} \right)^{-1} H(s) fv(s) \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{k}} \mathrm{d}\tau \tag{2.3}$$

并且

$$\min_{t \in J_\theta} v(t) \ge \theta \|v\|, \tag{2.4}$$

其中，$\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，$J_\theta = [\theta, 1-\theta]$。

为了估计问题(2.2)的多个正解的存在性，我们构造 E 上的锥 K 如下：

$$K = \left\{ v \in E : v \geq 0, \min_{t \in J_\theta} v(t) \geq \theta \|v\| \right\}.$$

对正实数 ρ，我们同样可以定义

$$\Omega_\rho = \left\{ v \in K : \min_{t \in J} v(t) < \gamma\rho \right\} = \left\{ v \in E : \gamma \|v\| \leq \min_{t \leq J_\theta} v(t) < \gamma\rho \right\}.$$

下面的结论的证明请参考文献([24]，引理 2.5，p. 693)。

引理 2.3：([24]的引理 2.5) Ω_ρ 有如下性质：

1) Ω_ρ 是 K 中开集；

2) $K_{\gamma\rho} \subset \Omega_\rho \subset K_\rho$；

3) $v \in \partial\Omega_\rho \Leftrightarrow \min_{t \in J_\theta} v(t) = \gamma\rho$；

4) 如果 $v \in \partial\Omega_\rho$，则有 $\gamma\rho \leq v(t) \leq \rho\ (\forall t \in J_\theta)$。

定义算子 $T: K \to E$ 为：

$$(Tv)(t) = \int_t^1 \left(\int_0^\tau k\tau^{k-N} s^{N-1} \left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1} H(s) f(v(s)) \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{k}} \mathrm{d}\tau \tag{2.5}$$

由文献[16]和简单推导可以得到：

引理 2.4：假定条件(H_1)和(H_2)成立，则算子 $T: K \to K$ 是全连续的。

引理 2.5：([24]的引理 2.4)设 K 是实 Banach 空间 X 上的锥，D 是 X 的开子集满足 $D_k = D \cap K \neq \varnothing$ 且 $\overline{D_k} \neq K$。假定算子 $A: \overline{D_k} \to K$ 是全连续的且 $x \neq Ax\ (\forall x \in \partial D_k)$，则下列结论成立：

1) 如果对 $\forall x \in \partial D_k, \|Ax\| \leq \|x\|$，则 $i_k(A, D_k) = 1$；

2) 如果 $\exists e \in K \setminus \{0\}$ 使得对 $\forall x \in \partial D_k$，$\forall \lambda > 0$ 有 $x \neq Ax + \lambda e$ 成立，则 $i_k(A, D_k) = 0$；

3) 设 U 是 K 中的开集且 $\overline{U} \in D_k$。如果 $i_k(A, D_k) = 1$ 且 $i_k(A, U_k) = 0$，则 A 在 $D_k \setminus \overline{U_k}$ 上有一个不动点。如果条件为 $i_k(A, D_k) = 0$ 且 $i_k(A, U_k) = 1$，则结论也成立。

3. 主要结论

为了简单起见，定义一些在证明过程中要用到的符号：

$$d = \int_0^1 H(s) \mathrm{d}s, d_* = \int_\theta^{1-\theta} H(s) \mathrm{d}s, f_{\gamma\rho}^\rho = \min\left\{ \frac{f(v)}{\rho^k} : v \in [\gamma\rho, \rho] \right\};$$

$$f_0^\rho = \max\left\{ \frac{f(v)}{\rho^k} : v \in [0, \rho] \right\}, f^\rho = \lim_{v \to \alpha} \frac{f(v)}{v^k} \left(\alpha := \infty \text{或} 0^+\right);$$

$$\frac{1}{l} = \left\{ dk \left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1} \right\}^{\frac{1}{k}} \frac{k}{2k-N}, \frac{1}{L} = \left\{ d_* k \left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1} \right\}^{\frac{1}{k}} \frac{k}{2k-N} \left[1 - (1-\theta)^{\frac{2k-N}{k}} \right].$$

定理 3.1：假定条件(H_1)和(H_2)，$k > \frac{N}{2}$，并且下列条件之一成立：

(H_3)存在 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (0, +\infty)$，且 $\rho_1 < \gamma\rho_2, \rho_2 < \rho_3$ 使得

$$f_0^{\rho_1} > l^k, f_{\gamma\rho_2}^{\rho_2} < L^k, f_0^{\rho_3} > l^k,$$

(H_4)存在 $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in(0,+\infty)$，且 $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ 使得

$$f_{\gamma\rho_1}^{\rho_1}>L^k, f_0^{\rho_2}<l^k, f_{\gamma\rho_3}^{\rho_3}>L^k,$$

则下述结论成立：

1) 问题(2.2)至少有两个正解 v_1,v_2 满足 $v_1\in\Omega_{\rho_2}\setminus\overline{K_{\rho_1}}, v_2\in K_{\rho_3}\setminus\overline{\Omega_{\rho_2}}$；

2) 问题(1.1)至少有两个非平凡径向解 u_1,u_2 满足 $u_1=-v_1,u_2=-v_2$。

证明：这里我们只考虑条件(H_3)成立的情况。如果条件(H_4)成立的情况，那么证明过程和条件(H_3)成立时的证明类似。

首先，我们证明 $i_k\left(T,K_{\rho_1}\right)=1$。实际上，由(2.5)中的 $f_0^{\rho_1}<l^k$ 知，对 $v\in\partial K_{\rho_1}$，有

$$\begin{aligned}
(Tv)(t)&=\int_t^1\left(\int_0^\tau k\tau^{k-N}s^{N-1}\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}H(s)f(v(s))\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}\tau\\
&\le\int_0^1\left(\int_0^1 k\tau^{k-N}s^{N-1}\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}H(s)f(v(s))\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}\tau<\int_0^1\left(\int_0^1 k\tau^{k-N}s^{N-1}\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}H(s)l^k\rho_1^k\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}\tau\\
&=\left(k\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{k}}l\rho_1\int_0^1\tau^{\frac{k-N}{k}}\mathrm{d}\tau\left(\int_0^1 s^{N-1}H(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{k}}\le\left(k\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{k}}l\rho_1\int_0^1\tau^{\frac{k-N}{k}}\mathrm{d}\tau\left(\int_0^1 H(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{k}}\\
&=\left(dk\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{k}}l\rho_1\frac{k}{2k-N},
\end{aligned}$$

即对 $v\in\partial K_{\rho_1}$ 有 $\|Tv\|<\|v\|$。由引理 2.5 的结论(1)可得 $i_k\left(T,K_{\rho_1}\right)=1$。

其次证明 $i_k\left(T,\Omega_{\rho_2}\right)=0$。

令 $e(t)\equiv1$，则 $e\in\partial K_1$。事实上，有

$$v\ne Tv+\lambda e, v\in\partial\Omega_{\rho_2},\lambda>0,$$

若不然，则存在 $v_0\in\partial\Omega_{\rho_2}$ 及 $\lambda_0>0$ 使得

$$v_0=Tv_0+\lambda_0 e. \tag{3.1}$$

那么，根据引理 2.3 和式 3.1 有

$$\begin{aligned}
v_0&=Tv_0+\lambda_0 e\ge\gamma\|Tv_0\|+\lambda_0 e\\
&\ge\gamma\int_{1-\theta}^1\left(\int_\theta^{1-\theta}k\tau^{k-N}s^{N-1}\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}H(s)f(v_0(s))\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}\tau+\lambda_0\\
&>\gamma L\rho_2\int_{1-\theta}^1\left(\int_\theta^{1-\theta}k\tau^{k-N}s^{N-1}\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}H(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}\tau+\lambda_0\\
&=\gamma L\rho_2\left(k\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{k}}\int_{1-\theta}^1\tau^{\frac{k-N}{k}}\mathrm{d}\tau\left(\int_\theta^{1-\theta}s^{N-1}H(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{k}}+\lambda_0\\
&\ge\gamma L\rho_2\left(k\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{k}}\int_{1-\theta}^1\tau^{\frac{k-N}{k}}\mathrm{d}\tau\left(\int_\theta^{1-\theta}H(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{k}}+\lambda_0\\
&=\gamma L\rho_2\left(k\left(C_{N-1}^{k-1}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{k}}\frac{k}{2k-N}\left[1-(1-\theta)^{\frac{2k-N}{k}}\right]+\lambda_0\\
&=\gamma\rho_2+\lambda_0,
\end{aligned}$$

这说明 $\gamma\rho_2>\gamma\rho_2+\lambda_0$，显然矛盾。所以由引理 2.5 的结论(2)可以得出 $i_k\left(T,\Omega_{\rho_2}\right)=0$。

最后，我们类似地可以证明 $i_k\left(T,K_{\rho 3}\right)=1$。由于 $\rho_1<\gamma\rho_2$，可以推出 $\overline{K_{\rho_1}}\subset K_{\gamma\rho_2}\subset\Omega_{\rho_2}$。因此，利用引理 2.5 可以得到问题(2.2)含有至少有 2 个正解 v_1,v_2，且有 $v_1\in\Omega_{\rho_2}\setminus\overline{K_{\rho_1}},v_2\in\Omega_{\rho_3}\setminus\overline{K_{\rho_2}}$。再由 $v=-u$ 得到问题(1.1)至少存在两个非负径向解，满足 $u_1=-v_1,u_2=-v_2$。

若(H_4)成立时，我们同样可以证明定理 3.1 成立。证毕。

注释 3.1： 从定理 3.1 的证明中可以看出，问题(2.2)在 K_{ρ_1} 上有第三个非负解 v_3，进而得到问题(1.1)存在第三个径向解 u_3。由于 $v_3\in K_{\rho_1}$，所以 u_3 可能是平凡的径向解。

定理 3.1： 的可以推广到多解的情况。

定理 3.2： 假定条件(H_1)和(H_2)成立，且 $k>\dfrac{N}{2}$，则有如下结论：

1) 如果存在 $\{\rho_i\}_{i=1}^{2m_0}\subset(0,+\infty)$，满足 $\rho_1<\gamma\rho_2<\rho_2<\rho_3<\gamma\rho_4<\cdots<\rho_{2m_0}$，使得

$$f_0^{\rho_{2m-1}}<l^k,f_{\gamma\rho_{2m}}^{\rho_{2m}}>L^k,m=1,2,\cdots,m_0,$$

则有

i) 问题(2.2)在 K 中至少有 $2m_0$ 个正解，

ii) 问题(1.1)至少有 $2m_0$ 个非负径向解。

2) 如果存在 $\{\rho_i\}_{i=1}^{2m_0}\subset(0,\infty)$，满足 $\rho_1<\rho_2$ 且 $\rho_2<\gamma\rho_3<\rho_3<\rho_4<\gamma\rho_5<\cdots<\rho_{2m_0+2}$，使得

$$f_{\gamma\rho_{2m-1}}^{\rho_{2m-1}}<L^k,f_0^{\rho_{mk}}>l^k,m=1,2,\cdots,m_0,$$

则有

i) 问题(2.2)在 K 中至少有 $2m_0$－1 个正解，

ii) 问题(1.1)至少有 $2m_0$－1 个非负径向解。

基金项目

本文由国家自然科学基金(11301178)，北京市自然科学基金(1163007)和北京市教育委员会科技面上基金(KM201611232017)资助。

参考文献

[1] Trudinger, N. and Wang, X. (2008) The Monge-Ampère Equation and Its Geometric Applications. *Handbook of Geometric Analysis*, **1**, 467-524. http://pdfs.semanticscholar.org/3e98/fded69b4c929d882393a609831df67a48e92.pdf

[2] Brandolini, B. (2013) On the Symmetry of Solutions to a k-Hessian Type Equation. *Advanced Nonlinear Studies*, **13**, 487-493. https://doi.org/10.1515/ans-2013-0213

[3] Della Pietra, F. and Gavitone, N. (2014) Upper Bounds for the Eigenvalues of Hessian Equations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **193**, 923-938. https://doi.org/10.1007/s10231-012-0307-5

[4] Gavitone, N. (2009) Isoperimetric Estimates for Eigenfunctions of Hessian Operators. *Ricerche di Matematica*, **58**, 163-183. https://doi.org/10.1007/s11587-009-0058-9

[5] Zhang, X. and Feng, M. (2018) Boundary Blow-Up Solutions to the k-Hessian Equation with Singular Weights. *Nonlinear Analysis*, **167**, 51-66. https://doi.org/10.1016/j.na.2017.11.001

[6] Sánchez, J. and Vergara, V. (2016) Bounded Solutions of a k-Hessian Equation in a Ball. *Journal of Differential Equations*, **261**, 797-820. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.03.021

[7] Nakamori, S. and Takimoto, K. (2015) A Ernstein Type Theorem for Parabolic k-Hessian Equations. *Nonlinear Analysis*, **117**, 211-220. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.01.010

[8] Wang, Q. and Xu, C.-J. (2014) $C^{1;1}$ Solution of the Dirichlet Problem for Degenerate k-Hessian Equations. *Nonlinear Analysis*, **104**, 133-146. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.03.016

[9] Huang, Y. (2010) Boundary Asymptotical Behavior of Large Solutions to Hessian Equations. *Pacific Journal of Ma-

thematics, **244**, 85-98. https://doi.org/10.2140/pjm.2010.244.85

[10] Dai, L. and Bao, J. (2011) On Uniqueness and Existence of Viscosity Solutions to Hessian Equations in Exterior Domains. *Frontiers of Mathematics in China*, **6**, 221-230. https://doi.org/10.1007/s11464-011-0109-x

[11] Wang, C. and Bao, J. (2013) Necessary and Sufficient Conditions on Existence and Convexity of Solutions for Dirichlet Problems of Hessian Equations on Exterior Domains. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **141**, 1289-1296. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2012-11738-1

[12] Urbas, J.I.E. (1990) On the Existence of Nonclassical Solutions for Two Classes of Fully Nonlinear Elliptic Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **39**, 355-382. https://doi.org/10.1512/iumj.1990.39.39020

[13] Wang, X.-J. (1994) A Class of Fully Nonlinear Elliptic Equations and Related Functionals. *Indiana University Mathematics Journal*, **43**, 25-54. https://doi.org/10.1512/iumj.1994.43.43002

[14] Wang, X.-J. (2009) The k-Hessian Equation, in: Geometric Analysis and PDEs. *Lecture Notes in Mathematics*, **1977**, 177-252. https://doi.org/10.1007/978-3-642-01674-5_5

[15] Clément, P., De Figueiredo, D.G. and Mitidieri, E. (1996) Quasilinear Elliptic Equations with Critical Exponents. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **7**, 133-170. https://doi.org/10.12775/TMNA.1996.006

[16] Wang, F. and An, Y. (2012) Triple Nontrivial Radial Convex Solutions of Systems of Monge-Ampère Equations. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 88-92. https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.07.016

[17] Wang, H. (2006) Convex Solutions of Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **318**, 246-252. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.05.067

[18] Han, X., Ma, R. and Dai, G. (2015) Eigenvalue, Bifurcation and Convex Solutions for Monge-Ampère Equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **45**, 135-164. https://doi.org/10.12775/TMNA.2015.041

[19] Sánchez, J. and Vergara, V. (2017) Bounded Solutions of a k-Hessian Equation Involving a Weighted Nonlinear Source. *Journal of Differential Equations*, **263**, 687-708. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.02.047

[20] Jacobsen, J. (1999) Global Bifurcation Problems Associated with k-Hessian Operators. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **14**, 81-130. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.02.047

[21] Escudero, C. and Torres, P.J. (2015) Existence of Radial Solutions to Biharmonic K-Hessian Equations. *Journal of Differential Equations*, **259**, 2732-2761. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.04.001

[22] Zhang, Z. and Zhou, Y. (2015) Existence of Entire Positive k-Convex Radial Solutions to Hessian Equations and Systems with Weights. *Applied Mathematics Letters*, **50**, 48-55. https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.05.018

[23] Wei, W. (2016) Uniqueness Theorems for Negative Radial Solutions of k-Hessian Equations in a Ball. *Journal of Differential Equations*, **261**, 3756-3771. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.06.004

[24] Lan, K. (2001) Multive Positive Solutions of Semilinear Differential Equations with Singularities. *Journal of the London Mathematical Society*, **63**, 690-704. https://doi.org/10.1112/S002461070100206X

Hans汉斯

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org