Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 340-344
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84045

Study on Quantum Determinant and Related Problems

Wanmin Zhuang, Lixia Ye*

Department of Mathematics, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang
Email: *yelixia@sina.com

Received: Jun. 18th, 2018; accepted: Jul. 3rd, 2018; published: Jul. 10th, 2018

Abstract

By generalizing the determinant of the product of ordinary matrix, the quantum determinant formula for the product of two quantum matrices is obtained. The generalized quantum determinant is defined, and the corresponding row and column expansion theorem and the generalized quantum determinant for matrix product are constructed.

Keywords

Quantum Determinant, Quantum Matrix, Matrix Product, Generalized Quantum Determinant

量子行列式及相关问题研究

庄婉敏，叶丽霞*

浙江外国语学院数学系，浙江 杭州
Email: *yelixia@sina.com

收稿日期：2018年6月18日；录用日期：2018年7月3日；发布日期：2018年7月10日

摘 要

把普通矩阵乘积的行列式进行推广，得到量子矩阵乘积的量子行列式求法公式。定义了广义量子行列式，并构造了相应行列展开定理和矩阵乘积的广义量子行列式公式。

关键词

量子行列式，量子矩阵，矩阵乘积，广义量子行列式

*通讯作者。

文章引用: 庄婉敏, 叶丽霞. 量子行列式及相关问题研究[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 340-344.
DOI: 10.12677/pm.2018.84045

1. 引言

在数学和物理研究中，行列式和矩阵经常进行各种形变和推广。2000 年，潘庆年[1]定义了量子行列式，并把经典行列式的一些性质推广到量子行列式。文献[2]给出了行列式乘法的一个推广公式。文献[3]利用行列式按一行展开的性质，定义了一般矩阵的广义行列式。文献[4]给出了矩阵乘积的广义行列式的一般公式。基于这些研究，本文将[2]的结果推广至量子行列式的情形。同时，进一步定义量子矩阵的广义量子行列式，并把[3] [4]的结果推广至广义量子行列式的情形，构造相应行列展开定理及矩阵乘积的广义量子行列式公式。

2. 有关定义

定义 1 [1]设 A 是特征为零的域 k 上的一个代数，A 为 A 上一个方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

取定 k 上一个非零元 q，定义 A 的量子行列式或 q-行列式 $|A|_q$ 如下：

$$|A|_q=\sum_{\sigma\in S_n}(-q)^{-l(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

其中 $l(\sigma)$ 表示 σ 的长度，所谓 σ 的长度指当 σ 分解成对换的乘积时，有一种分解使它能包含对换的个数极小，这个极小个数就称为 σ 的长度。

定义 2 [1]代数 A 上一个 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 n 阶 q-矩阵，如果对于任意的 $i<j$， $k<m$，

$$\begin{cases} a_{ik}a_{im}=q^{-1}a_{im}a_{ik}, \\ a_{ik}a_{jk}=q^{-1}a_{jk}a_{ik}, \\ a_{im}a_{jk}=a_{jk}a_{im}, \\ a_{ik}a_{jm}-a_{jm}a_{ik}=\left(q^{-1}-q\right)a_{im}a_{jk}. \end{cases}$$

换句话说，如果 A 的每一个 2 阶子矩阵都是 q-矩阵，则称 A 为 q-矩阵。

文献[3]利用行列式按一行展开的性质，定义了一般矩阵的广义行列式，类似可定义量子矩阵的广义量子行列式如下。

定义 3 若矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 是量子矩阵，定义其广义量子行列式 $|A|_q$ 如下：

若 A 是 $1\times n(n\ge 1)$ 量子矩阵，则 $|A|_q=\sum_{i=1}^{n}(-q)^{1-i}a_{1i}$；

若矩阵 A 为 $2\times n(n\ge 2)$ 量子矩阵，则 $|A|_q=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{\hat{1}\hat{i}}$，其中 $A_{\hat{1}\hat{i}}=(-q)^{1-i}M_{\hat{1}\hat{i}}$，$M_{\hat{1}\hat{i}}$ 是 a_{1i} 的余子式，即 A 中去掉第 1 行第 i 列后其他元素按原序组成的 $1\times(n-1)$ 矩阵的广义量子行列式；

若矩阵 A 为 $m\times n$ 量子矩阵，当 $n\ge m$ 时，$|A|_q=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{\hat{1}\hat{i}}$，其中 $A_{\hat{1}\hat{i}}=(-q)^{1-i}M_{\hat{1}\hat{i}}$，$M_{\hat{1}\hat{i}}$ 是 A 中去掉第 1 行第 i 列后，其他元素按原序组成的 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵的广义量子行列式。当 $m>n$ 时，$|A|_q=|A^{\mathrm{T}}|_q$。

3. 主要结果

把经典行列式的倍加性质推广，可得量子行列式的相应性质如下。

定理 1 设 A 是代数 A 上的 n 阶量子矩阵，若 A 中的第 $i,i+1,\cdots,j-1$ $(i<j)$ 行和第 $1,2,\cdots,n$ 列组成的矩阵 $A_{i,i+1,\cdots,j-1}^{1,2,\cdots,n}$ 中不同行不同列的元素乘积都可交换，且 b 是代数 A 的中心元，则把 A 中第 i 行的 b 倍加到第 j 行后，量子行列式不变。

证明 由定义 1 得，若 $i<j$，把 A 中第 i 行的 b 倍加到第 j 行后的量子行列式展开为

$$b\sum_{\sigma\in S_n}(-q)^{-l(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in S_n}(-q)^{-l(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

考虑其一般项

$$(-q)^{-l(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

由条件得，$(-q)^{-l(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}=(-q)^{-l(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ 相等。由定义 2 得，$(-q)^{-l(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ 与 $(-q)^{-l(\sigma)-1}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ 能成对抵消，则量子行列式不变，结论成立。

文献[2]的定理 2 把行列式乘法公式 $|AX|=|A||X|$ 推广，得到了更一般的结果。实际上，若把这个结果放到量子行列式上讨论，结论在一定条件下仍成立。

定理 2 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{m1}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}$ 是代数 A 上的量子矩阵，且矩阵 A 与 B 的元素可交换，设 $d_{ij}=a_{i1}b_{j1}+a_{i2}b_{j2}+\cdots+a_{in}b_{jn}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，作一个 m 阶量子行列式 $D=\begin{vmatrix}d_{11}&\cdots&d_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\d_{m1}&\cdots&d_{mm}\end{vmatrix}_q$，则当 $m\le n$ 时，$D=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n}A_{i_1i_2\cdots i_m}B_{i_1i_2\cdots i_m}$，其中 $A_{i_1i_2\cdots i_m}=\begin{vmatrix}a_{1i_1}&\cdots&a_{1i_m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{mi_1}&\cdots&a_{mi_m}\end{vmatrix}_q$，$B_{i_1i_2\cdots i_m}=\begin{vmatrix}b_{1i_1}&\cdots&b_{1i_m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{mi_1}&\cdots&b_{mi_m}\end{vmatrix}_q$；当 $m>n$ 时，$D=0$。

证明 为方便起见，只证明 $m=2$ 时的情形，当 $m>2$ 时，证明过程类似。

设 A 与 B 为 $2\times n$ 矩阵且 A 与 B 的元素可交换，$D=\begin{vmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\end{vmatrix}_q$。若 $n<2$，由定义 1，2 易得 $D=a_{11}b_{11}a_{21}b_{21}-q^{-1}a_{11}b_{21}a_{21}b_{11}=0$。若 $n\ge 2$，对列数 n 作数学归纳法。

当 $n=2$ 时，由定义 1 及定义 2 得，

$$\sum_{1\le i_1<i_2\le n} A_{i_1i_2}B_{i_1i_2}=a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}+a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}-q^{-1}a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}-q^{-1}a_{12}a_{21}b_{22}b_{11}=D.$$

假设当 $n=k\ (k>2)$ 时，命题成立，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1k}b_{1k} & a_{11}b_{21}+\cdots+a_{1k}b_{2k} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2k}b_{1k} & a_{21}b_{21}+\cdots+a_{2k}b_{2k} \end{vmatrix}_q=\sum_{1\le i_1<i_2\le k} A_{i_1i_2}B_{i_1i_2}.$$

则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} (a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1k}b_{1k})+a_{1k+1}b_{1k+1} & (a_{11}b_{21}+\cdots+a_{1k}b_{2k})+a_{1k+1}b_{2k+1} \\ (a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2k}b_{1k})+a_{2k+1}b_{1k+1} & (a_{21}b_{21}+\cdots+a_{2k}b_{2k})+a_{2k+1}b_{2k+1} \end{vmatrix}_q \\ &=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1k}b_{1k} & a_{11}b_{21}+\cdots+a_{1k}b_{2k} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2k}b_{1k} & a_{21}b_{21}+\cdots+a_{2k}b_{2k} \end{vmatrix}_q+\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1k}b_{1k} & a_{1k+1}b_{2k+1} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2k}b_{1k} & a_{2k+1}b_{2k+1} \end{vmatrix}_q \\ &\quad+\begin{vmatrix} a_{1k+1}b_{1k+1} & a_{11}b_{21}+\cdots+a_{1k}b_{2k} \\ a_{2k+1}b_{1k+1} & a_{21}b_{21}+\cdots+a_{2k}b_{2k} \end{vmatrix}_q+\begin{vmatrix} a_{1k+1}b_{1k+1} & a_{1k+1}b_{2k+1} \\ a_{2k+1}b_{1k+1} & a_{2k+1}b_{2k+1} \end{vmatrix}_q \\ &=\sum_{1\le i_1<i_2\le k} A_{i_1i_2}B_{i_1i_2}+A_{1k+1}B_{1k+1}+\cdots+A_{kk+1}B_{kk+1}=\sum_{1\le i_1<i_2\le k+1} A_{i_1i_2}B_{i_1i_2} \end{aligned}$$

故结论成立。

文献[3]的命题 1 给出了广义行列式的展开式，文献[4]进一步得出矩阵乘积的广义行列式。本文将这些结果推广至广义量子行列式情形，得定理 3、4 及推论 1。

定理 3 设矩阵 A 是代数 A 上的 $m\times n(n\ge m)$ 量子矩阵，则 A 的广义量子行列式为

$$|A|_q=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n}(-q)^{-l(\sigma)-\left[i_1+i_2+\cdots+i_m-\frac{m(m+1)}{2}\right]}a_{1i_{\sigma(1)}}a_{2i_{\sigma(2)}}\cdots a_{mi_{\sigma(m)}},$$

其中 $\sigma\in S_m$。

证明 对矩阵 A 的行数 m 作数学归纳法。

当 $m=1$ 时，由定义 3，$|A|_q=\sum_{i=1}^{n}(-q)^{1-i}a_{1i}$，结论成立。

假设矩阵 A 的行数小于 m 时，结论成立。则当行数为 m 时，由定义 3，$|A|_q=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{\hat{1}\hat{i}}$ 且对任意的 $1\le i_1\le n$，$a_{1i_1}A_{\hat{1}\hat{i}_1}=(-q)^{1-i_1}a_{1i_1}M_{\hat{1}\hat{i}_1}$，结合定义 1 得，

$$\begin{aligned} a_{1i_1}A_{\hat{1}\hat{i}_1}&=(-q)^{1-i_1}a_{1i_1}\sum_{1\le i_2<\cdots<i_m\le n}(-q)^{-l(\sigma(2),\cdots,\sigma(m))-\left[i_2+\cdots+i_m-\frac{m(m-1)}{2}-(m-1-m_1)\right]}a_{2i_{\sigma(2)}}\cdots a_{mi_{\sigma(m)}} \\ &=\sum_{1\le i_2<\cdots<i_m\le n}(-q)^{-l(\sigma)-\left[i_1+i_2+\cdots+i_m-\frac{m(m+1)}{2}+m_1\right]}a_{1i_1}a_{2i_{\sigma(2)}}\cdots a_{mi_{\sigma(m)}} \end{aligned},$$

其中 $\sigma\in S_m$，$i_2,\cdots,i_m\ne i_1$，$i_{\sigma(1)}=i_1$，m_1 为 $i_2,i_3,\cdots,i_m$ 中小于 i_1 的个数，则

$$|A|_q=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}A_{\hat{1}\hat{i}}=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n}(-q)^{-l(\sigma)-\left[i_1+i_2+\cdots+i_m-\frac{m(m+1)}{2}\right]}a_{1i_{\sigma(1)}}a_{2i_{\sigma(2)}}\cdots a_{mi_{\sigma(m)}}.$$

由定理 3 易得以下推论成立。

推论 1 设矩阵 A 是代数 A 上的 $m\times n(n\ge m)$ 量子矩阵，则 A 的广义量子行列式为

$$|A|_q=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n}(-q)^{-\left[i_1+i_2+\cdots+i_m-\frac{m(m+1)}{2}\right]}M_{i_1i_2\cdots i_m},$$

其中 $M_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ 是 A 的第 $1,2,\cdots,m$ 行和第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列组成的 m 阶矩阵的量子行列式。

定理 4 若 $A=\left(a_{ij}\right)_{mn}$ 为代数 A 上 $m\times n\left(m<n\right)$ 量子矩阵，$B=\left(b_{ij}\right)_{ns}$ 为代数 A 上 $n\times s\left(m<s\right)$ 量子矩阵，则乘积 AB 的广义量子行列式为

$$\left|AB\right|_q=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le s}\left(-q\right)^{-\left[i_1+i_2+\cdots+i_m-\frac{m(m+1)}{2}\right]}\left|AB_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right|_q,$$

其中 $i_1 i_2\cdots i_m$ 为 $1\sim s$ 中 m 个元素按自然顺序组成的 m 级排列，$B_{i_1 i_2\cdots i_m}$ 为 B 中第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列构成的 $n\times m$ 子矩阵。

证明 由推论 1 知，

$$\left|AB\right|_q=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n}\left(-q\right)^{-\left[i_1+i_2+\cdots+i_m-\frac{m(m+1)}{2}\right]}M_{i_1 i_2\cdots i_m},$$

其中 $M_{i_1 i_2\cdots i_m}$ 为乘积 AB 的第 $1,2,\cdots,m$ 行和第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列组成的 m 阶矩阵的量子行列式。由矩阵乘法的定义得 $M_{i_1 i_2\cdots i_m}=\left|AB_{i_1 i_2\cdots i_m}\right|_q$，则结论成立。

参考文献

[1] 潘庆年. q-行列式及其性质[J]. 数学的实践与认识, 2000, 30(3): 358-362.

[2] 孙杰, 孙多. 行列式乘法的推广及应用[J]. 扬州教育学院学报, 2000(3): 76-77.

[3] 王立志. 一般矩阵的广义行列式[J]. 山西大学学报(自然科学版), 1995(3): 254-258.

[4] 郭忠海, 王立志. 关于矩阵乘积的广义行列式[J]. 忻州师范学院学报, 2003, 19(2): 46-48.