Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(5), 467-474
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.85062

Positive Solution for Second-Order Singular Semipositone Differential Equations Three-Point Boundary Value Problems

Jifa Chen

Jining Technician College, Jining Shandong
Email: swhgxxg@163.com

Received: Aug. 2nd, 2018; accepted: Aug. 16th, 2018; published: Aug. 23rd, 2018

Abstract

Using the Krasnoselskii's fixed point theorem on compression and expansion of cone, this paper investigates a class of second-order singular semipositone differential equations with three-point boundary value problems; a sufficient and the existent range of positive solutions are given.

Keywords

Three-Point Boundary Value Problems, Positive Solution, Fixed Point, Semipositone

二阶半正微分方程三点边值问题的正解

陈吉发

济宁技师学院，山东 济宁
Email: swhgxxg@163.com

收稿日期：2018年8月2日；录用日期：2018年8月16日；发布日期：2018年8月23日

摘 要

利用锥拉伸与压缩不动点定理讨论了一类奇异半正二阶微分方程的三点边值问题，得到了正解存在的一个充分条件，并且给出了正解存在的范围。

关键词

三点边值问题，正解，不动点，半正

文章引用: 陈吉发. 二阶半正微分方程三点边值问题的正解[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 467-474.
DOI: 10.12677/pm.2018.85062

1. 引言

非线性微分方程奇异边值问题是一个十分重要的研究领域，有关方程正解存在的结论已经有很多，这些研究中非线性项非负的情况比较多(文[1] [2] [3])，近期对非线性项半正的研究也活跃起来，文[4] [5]要求非线性项有下累，文[6] [7]则允许非线性项后加一项可负项，但对附加项又增加了一定限制，本文等虑下面二阶奇异半正三边问题：

$$\begin{cases} -u''+k^2u=f(t,u), 0<t<1, \\ u(0)=\beta u(\eta), u(1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中非线性项 $f(t,u)$ 在 $t=0,1$ 可以是奇异的， $\eta\in(0,1),\beta>0$ 。

本文的研究与已知文献比较，方程形式不同于文[1]-[7]，并且为三点边值问题，还放宽了对非线性项 $f(t,u)$ 的限制，扩大了适应条件的函数类，最后给出了正解的存在范围。

记 $I=[0,1], J=[0,1], R^+=(0,+\infty]$，一个函数 $u(t)\in PC^1(I,R)\cap C^2(J^1,R)$ 称为方程(1)的解，是指满足方程(1)的各项条件，若 $u(t)$ 在 J 上恒正，则称为正解。

2. 预备知识

设 $K(t,s)$ 是 $-u''+k^2u=f(t,u), u(0)=\beta u(\eta), u(1)=0$ 格林函数， $G(t,s)-u''+k^2u=f(t,u)$， $u(0)=\beta u(\eta), u(1)=0$ 的格林函数，则 $\sinh(k)\neq\sinh(k(1-\eta))$ 时，

$$K(t,s)=G(t,s)+\frac{\sinh(k(1-t))}{\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))}\beta G(\eta,s)。 \tag{2}$$

二阶半正微分方程三点边值问题的正解

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{\sinh(ks)\sinh(k(1-t))}{\sinh(k)k}, 0<s\le t, \\ \dfrac{\sinh(kt)\sinh(k(1-s))}{\sinh(k)k}, t\le s\le 1, \end{cases} \tag{3}$$

引理 1： $G(t,s), K(t,s)$ 具有以下性质：

i) $\dfrac{k}{\sinh(k)}t(1-t)\le G(t,t)\le\dfrac{\sinh(k)}{k}t(1-t)\le\dfrac{\sinh(k)}{k}$；

ii) $\dfrac{k}{\sinh(k)}G(t,t)\le G(s,s)\le G(t,s)\le G(t,t)$；

iii)当 $\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))>0$ 时 $mt(1-t)s(1-s)\le K(t,s)\le Ms(1-s)$ 。这里 $M=\left(\dfrac{\sinh(k)(1+\beta)-\beta\sinh(k(1-\eta))}{\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))}\right)\dfrac{\sinh(k)}{k}, m=\dfrac{k^3}{\sinh(k)^3}$；

iv) 当 $\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))>0$ 时， $M_1(1-t)G(s,s)\le K(t,s)\le M_2(1-t)$，其中

$$M_1=\frac{\beta k}{\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))}\frac{k}{\sinh(k)}G(\eta,\eta)\text{，}\quad M_2=\frac{\sinh(k)}{k}+\frac{\beta\sinh(k)}{\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))}G(\eta,\eta)\text{。}$$

证明：令 $H_1(t)=\sinh(k)t-\sinh(kt),H_2(t)=\sinh(kt)-kt,t\in[0,1]$，$H_1(0)=H_1(1)=0$，$H_1''(t)=-k^2\sinh(kt)\le 0,\forall t\in[0,1]$，

因此 $H_1(t)\ge 0,H_2(0)=0,H_2'(0)=0,H_2''(t)\ge 0,\forall t\in[0,1]$。

于是

$$kt\le\sinh(kt)\le\sinh(k)t,t\in[0,1]\text{，}\tag{4}$$

由(3) (4)知 i) ii)成立。当 $\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))>0$ 时，再由(2)得

$$K(t,s)\ge G(t,s)\ge\frac{\sinh(k)}{k}G(s,s)\ge\frac{k^3}{\sinh(k)^3}t(1-t)s(1-s)$$

$$\begin{aligned}K(t,s)&\le G(s,s)+\frac{\sinh(k(1-t))}{\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))}\beta G(s,s)\\&=1+\left(\frac{\sinh(k(1-t))}{\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))}\beta\right)G(s,s)\\&\le 1+\left(\frac{\sinh(k)\beta}{\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))}\right)\frac{\sinh(k)}{k}s(1-s)\\&=Ms(1-s)\end{aligned}$$

于是 iii)成立。

由(2) (4)式及 ii)

$$K(t,s)\ge\frac{\beta k}{\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))}\cdot\frac{k}{\sinh(k)}G(\eta,\eta)G(s,s)(1-t)=M_1=(1-t)G(s,s)$$

$$K(t,s)\le\frac{k}{\sinh(k)}t(1-t)+\frac{\beta\sinh(k)}{\sinh(k)-\beta\sinh(k(1-\eta))}G(\eta,\eta)(1-t)\le M_2(1-t)$$

于是 iv)成立。

由 i) iv)可得

$$m_2t(1-t)s(1-s)\le K(t,s)\le M_2(1-t)\tag{5}$$

其中，$m_2=M_1\dfrac{K}{\sinh(k)}$。

为了证明主要结果，还需要下面的引理：

引理 2：(范数形式下的锥拉伸不动点定理) (文[8])设 E 是实 Banach 空间，P 是 E 中的锥，Ω_1,Ω_2 是 E 中的开集，$\theta\in\Omega_1,\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2,A:P\cap\left(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1\right)\to P$ 全连续，如果满足条件：

$\|Au\|\le\|u\|,\forall u\in P\cap\theta\Omega_1\|Au\|\ge\|u\|,\forall u\in P\cap\theta\Omega_2$

那么 A 在 $P\cap\left(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1\right)$ 中必有不动点。

设 $E=C[0,1],\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$，$P=\{u|u(t)\ge 0,u\in E\}$，$Q=\{u|u\in P,u(t)\ge\varepsilon\|u\|e(t),t\in I\}$。

其中 $e(t)=1-t,\varepsilon=\dfrac{m_2}{M}\cdot m_2$，$M$ 如引理 1 所述。显然 Q 是 E 中的锥，(E,Q) 构成 Banach 空间。

3. 主要结果及证明

本文给出以下假设

(H1) 存在函数 $p,q\in C\left(J,R^{+}\right),h\in C\left(R^{+},R^{+}\right),g\left(t,u\right)\in C\left(J\times R^{+},R^{+}\right)$ 使得 $g\left(t,u\right)-q\left(t\right)\le f\left(t,u\right)\le p\left(t\right)h\left(u\right),\forall t\in J,u\in R^{+}$。

(H2) 存在闭区间 $\left[a,b\right]\subset I$，使得 $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{g\left(t,u\right)}{u}=+\infty$ 在 $\left[a,b\right]$ 上一致成立。

(H3) 存在 $r>0$，使得下面两个式子成立：

$$0<\int_0^1 q\left(s\right)\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon r}{M_2} \tag{6}$$

$$0<\int_0^1 p\left(s\right)+q\left(s\right)\mathrm{d}s<\frac{r}{M\max\limits_{0\le\tau\le t}\left\{h\left(\tau\right),1\right\}}。 \tag{7}$$

其中 M,ε 如上所述。令 $e\left[a,b\right]=\min\left\{e\left(a\right),e\left(b\right)\right\}$，由 $e\left(t\right)$ 的表达式知道

$$e\left(t\right)\ge e\left[a,b\right]>0,t\in\left[a,b\right], \tag{8}$$

令

$$x_0\left(t\right)=\int_0^1 K\left(t,s\right)q\left(s\right)\mathrm{d}s,t\in I。 \tag{9}$$

由引理 1 及可知

$$0\le x_0\left(t\right)\le\int_0^1 Ms\left(1-s\right)q\left(s\right)\mathrm{d}s\le\int_0^1 Mq\left(s\right)\mathrm{d}s,t\in I, \tag{10}$$

于是 $x_0\in P$，并且满足

$$\begin{cases}-x_0''+k^2x_0=q\left(t\right),0<t<1,\\ x_0\left(0\right)=\beta x_0\left(\eta\right),x_0\left(1\right)=0.\end{cases} \tag{11}$$

定理 1：设(H1)~(H3)满足，当 $\sinh\left(k\right)-\beta\sinh\left(k\left(1-\eta\right)\right)>0$ 时方程(1)至少存在一个正解 $\omega\left(t\right)$ 且存在常数 $M_4>M_3>0$，使得

$$M_3e\left(t\right)\le\omega\left(t\right)\le M_4e\left(t\right),t\in I。 \tag{12}$$

证明：对任意 $k\in E$，记

$$\left[k\left(t\right)\right]_+=\begin{cases}kt,k\left(t\right)\ge 0,\\ 0,k\left(t\right)\le 0.\end{cases}$$

定义算子 A 如下：

$$Au\left(t\right)=\int_0^1 K\left(t,s\right)f\left(s,\left[u\left(s\right)-x_0\left(s\right)\right]_+\right)+q\left(s\right)\mathrm{d}s,\forall u\left(t\right)\in P \tag{13}$$

对任意 $u\left(t\right)\in P$，显然有 $\left[u\left(s\right)-x_0\left(s\right)\right]_+\le u\left(s\right)\le\left\|u\right\|$，由(H1)知道

$$\begin{aligned}&f\left(s,\left[u\left(s\right)-x_0\left(s\right)\right]_+\right)+q\left(s\right)p\left(s\right)h\left(\left[u\left(s\right)-x_0\left(s\right)\right]_+\right)+q\left(s\right)\\ &\le\max_{0\le\tau\le\left\|u\right\|}\left\{h\left(\tau\right),1\right\}\left(p\left(s\right)+q\left(s\right)\right),\forall s\in J\end{aligned} \tag{14}$$

有引理 1 及(13) (14) (H1)得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 K(t,s)\Big(f\big(s,[u(s)-x_0(s)]_+ + q(s)\big)\Big)\mathrm{d}s\\&\le M_2 e(t)\max_{0\le\tau\le\|u\|}\{h(\tau),1\}\int_0^1\big(p(s)+q(s)\big)\mathrm{d}s\\&\le M_2\max_{0\le\tau\le\|u\|}\{h(\tau),1\}\int_0^1\big(p(s)+q(s)\big)\mathrm{d}s\le+\infty, t\in I\end{aligned}\tag{15}$$

由此得到算子 A 是良定义的。下面分三步进行：

i) A 为映 Q 到 Q 的全连续算子

对任意 $u\in Q$，令 $y(t)=Au(t)$，由(H1)知道

$$f\big(s,[u(s)-x_0(s)]_+\big)+q(s)\ge g\big(s,[u(s)-x_0(s)]_+\big)\ge 0, s\in J 。$$

由引理 1：iii)及(13) (15)得到

$$Ay(t)\le M\int_0^1 s(1-s)\Big(f\big(s,[u(s)-x_0(s)]_+\big)+q(s)\Big)\mathrm{d}s$$

于是

$$\|y\|\le M\int_0^1 s(1-s)\Big(f\big(s,[u(s)-x_0(s)]_+\big)+q(s)\Big)\mathrm{d}s$$

结合引理 1 中的(5)式得到

$$y(t)\ge\int_0^1 m_2 e(t)s(1-s)\Big(f\big(s,[u(s)-x_0(s)]_+\big)+q(s)\Big)\mathrm{d}s\ge\frac{m_2}{M}\|y\|e(t)=\varepsilon\|y\|e(t)$$

所以 A 映 Q 到 Q。

设 $D\subset Q$ 是有界集，于是存在常数 $L_1>0$，使得 $\forall u\in D,\|u\|\le L_1$，且

$$[u(s)-x_0(s)]_+\le u(s)\le L_1$$

由(13)及(H1)知

$\|Au\|\le M\max_{0\le\tau\le\|u\|}\{h(\tau),1\}\int_0^1 s(1-s)\big(p(s)+q(s)\big)\mathrm{d}s\le M\max_{0\le\tau\le\|u\|}\{h(\tau),1\}\int_0^1\big(p(s)+q(s)\big)\mathrm{d}s<+\infty$ 即 $A(D)$ 一致有界。

又因为 $K(t,s)$ 在 $I\times I$ 上连续，从而一致连续，因此，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $t_1,t_2\in I,|t_1-t_2|<\delta$ 时，对任意 $s\in I$ 有

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\varepsilon\left(\max_{0\le\tau\le\|u\|}\{h(\tau),1\}\int_0^1\big(p(s)+q(s)\big)\mathrm{d}s\right)^{-1}$$

从而对任意 $u\in D$，结合上式及(14)式有

$$\begin{aligned}&|Au(t_1)-Au(t_2)|\\&=\int_0^1|K(t_1,s)-K(t_2,s)|f\big(s,[u(s)-x_0(s)]_+\big)+q(s)\mathrm{d}s\\&\le\max_{0\le\tau\le\|u\|}\{h(\tau),1\}\int_0^1|K(t_1,s)-K(t_2,s)|\big(p(s)+q(s)\big)\mathrm{d}s<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 AD 是等度连续的，由 Arzela-Ascoli 定理知 AD 是相对紧集。

$u_n, u_0 \in Q, u_n \to u_0 (n \to +\infty)$，则 $\{u_n\}$ 有界。令 $L_2 = \sup\{\|u_n\|, n = 0,1,2,\cdots\}$，则由(14)式有

$$\begin{aligned} & f\left(s,\left[u_n(s)-x_0(s)\right]_+\right)+q(s) \\ & \le \max_{0\le\tau\le\|u\|}\{h(\tau),1\}\left(p(s)+q(s)\right), n=0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{16}$$

由算子 A 的定义得到

$$\begin{aligned} & \left|Au_n(t)-Au_0(t)\right| \\ & \le M\int_0^1 s(1-s)\left|\left(f\left(s,\left[u_n(t)-x_0(t)\right]_+\right)-f\left(s,\left[u_0(t)-x_0(t)\right]_+\right)\right)\right|\mathrm{d}s \\ & \le M\int_0^1\left|\left(f\left(s,\left[u_n(t)-x_0(t)\right]_+\right)-f\left(s,\left[u_0(t)-x_0(t)\right]_+\right)\right)\right|\mathrm{d}s, n=0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{17}$$

由(16)(17)(H3)及 $f(t,u)$ 的连续性和 Lebsgue 控制收敛定理知 A 是连续的，因此 $A: Q \to Q$ 是全连续算子。

ii) 算子 A 在 Q 中有不动点

对(H3)中所述的 r，令 $\Omega_r = \{u \in E \mid \|u\| < r\}$。

$\forall x \in \partial\Omega_r \cap Q$，由(14)式得到

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_0^1 K(t,s) f\left(s,\left[x(s)-x_0(s)\right]_+\right)+q(s)\mathrm{d}s \\ &\le M\max_{0\le\tau\le\|u\|}\{h(\tau),1\}\int_0^1\left(p(s)+q(s)\right)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

由(7)式得到

$$\|Ax\| \le r = \|x\|, \forall x \in \partial\Omega_r \cap Q。 \tag{18}$$

由条件(H3)中(6)知存在充分大的自然数 m_0，使得

$$\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s < \frac{m_0}{m_0+1}\frac{\varepsilon r}{M_2} \tag{19}$$

取 $L > (m_0+1)\left(\varepsilon e[a,b]\max_{t\in I}\int_a^b K(t,s)\mathrm{d}s\right)^{-1}$

由(H2)知存在常数 $R_1 > r$，使

$$g(t,u) \ge Lu, \forall t \in [a,b], u \ge R_1 \tag{20}$$

取

$$R > \max\left\{r, \frac{(m_0+1)R_1}{\varepsilon e[a,b]}\right\} \tag{21}$$

下证

$$\|Ay\| \ge \|y\|, \forall y \in \partial\Omega_R \cap Q \tag{22}$$

$\forall y \in \partial\Omega_R \cap Q$，有 $y(t) \ge \varepsilon\|y\|e(t)$。于是由(8) (19)式得到

$$\begin{aligned} x_0(t) &\le M_2 e(t)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s = \varepsilon\|y\| e(t)\frac{M_2}{\varepsilon\|y\|}\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s \\ &\le \frac{M_2 y(t)}{\varepsilon R}\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s \le \frac{m_0}{m_0+1}y(t), t\in I \end{aligned} \tag{23}$$

结合(8) (21) (23)式有

$$\begin{aligned} y(t)-x_0(t) &\ge \left(1-\frac{m_0}{m_0+1}\right)y(t) \ge \frac{\varepsilon}{m_0+1}\|y\| e(t) \\ &\ge \frac{\varepsilon R}{m_0+1}e[a,b] \ge R_1, t\in[a,b] \end{aligned} \tag{24}$$

由条件(H1) (20) (24)式及 L 的取法得到

$$\begin{aligned} Ay(t) &\ge \int_0^1 K(t,s) g\left(s,\left[y(s)-x_0(s)\right]_+\right)\mathrm{d}s \\ &\ge \int_0^1 K(t,s) g\left(s,\left[y(s)-x_0(s)\right]\right)\mathrm{d}s \\ &\ge \int_a^b K(t,s) L\left(\left[y(s)-x_0(s)\right]\right) \\ &\ge \frac{\varepsilon R}{m_0+1}e[a,b]\int_a^b K(t,s)\mathrm{d}s, \forall t\in I \end{aligned}$$

于是(22)式成立。

由(18) (22)式及引理 1 知道 A 在 $Q\cap\left(\Omega_R\setminus\overline{\Omega_r}\right)$ 上至少有一个不动点 $z_0(t)$，且 $r\le\|z_0\|\le R$，$z_0(t)$ 还满足

$$z_0(t)=\int_0^1 K(t,s)\left(f\left(s,\left[z_0(s)-x_0(s)\right]_+ + q(s)\right)\right)\mathrm{d}s \tag{25}$$

iii) 方程(1)存在正解

由 $\|z_0\|\ge r$ 及(23)式得到

$$z_0(t)-x_0(t)\ge\frac{1}{m_0+1}z_0(t)\ge 0 \tag{26}$$

结合(25)知道 $z_0(t)$ 满足

$$\begin{cases} -z_0''+k^2 z_0 = f\left(t,z_0(t)-x_0(t)\right)+q(t), 0<t<1, \\ z_0(0)=\beta z_0(\eta), z_0(1)=0. \end{cases}, \tag{27}$$

令 $\omega(t)=z_0(t)-x_0(t), t\in I$，则由(26)知

$$\omega(t)\ge\frac{1}{m_0+1}z_0(t)\ge\frac{\varepsilon r}{m_0+1}e(t)>0, t\in J$$

结合(11) (27)可得

$$\begin{cases} -\omega_0''+k^2\omega_0 = f\left(t,\omega(t)\right)+q(t), 0<t<1, \\ \omega_0(0)=\beta\omega_0(\eta), \omega_0(1)=0. \end{cases}$$

故 $\omega(t)$ 是方程(1)的正解。

取 $M_3=\dfrac{\varepsilon r}{m_0+1}$，则 $\omega(t)\ge M_3e(t),t\in I$。

由(25)式知道

$$z_0(t)\le M_2e(t)\int_0^1 f\left(s,\left[z_0(s)-x_0(s)\right]_+ +q(s)\right)\mathrm{d}s$$

由 $\omega(t)\le z_0(t)$ 及上式知(12)式成立，其中

$$M_4=M_2\int_0^1 f\left(s,\left[z_0(s)-x_0(s)\right]_+ +q(s)\right)\mathrm{d}s\text{。}$$

参考文献

[1] Zhao, Z. and Zhang, X. (2007) C(I)Positive Solutions of Nonlinear Singular Differential Equations for Nonmonotonic Function Terms. *Nonlinear Analysis*, **66**, 22-37.

[2] 赵增勤. 一类非线性奇异微分方程正解的存在性定理[J]. 数学物理学报, 2005, 25A(3): 393-403.

[3] 刘衍胜. Banach 空间中非线性奇异微分方程边值问题的正解[J]. 数学学报, 2004, 47(1): 131-140.

[4] Xu, X. (2007) Possitive Solutions for Singular Semi-Positone Three-Point Systems. *Nonlinear Analysis*, **66**, 791-805. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.12.019

[5] 陈祥平, 赵增勤. 一类半正奇异二阶脉冲微分方程的正解[J]. 高校应用数学学报, 2009A(3): 281-289.

[6] Zhang, X.G., Liu, L.S. and Wu, Y.H. (2007) Existence of Positive Solutions for Second-Order Semipositone Differential Equations on the Half-Line. *Applied Mathematics and Computation*, **185**, 628-635. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.056

[7] 陈祥平, 赵增勤. 一类奇异脉冲微分方程周期边值问题的多解性[J]. 应用数学, 2009(3): 559-565.

[8] Guo, D. and Lakshmikantham, V. (1988) Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, San Diego.