Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(5), 499-507
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.85067

Valiron Quasi-Deficient of Meromorphic Functions

Linke Ma, Dan Liu

Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
Email: 785231789@qq.com, liudan@scau.edu.cn

Received: Aug. 18th, 2018; accepted: Sep. 4th, 2018; published: Sep. 11th, 2018

Abstract

In this paper, we mainly study the problem of Valiron quasi-degenerate value over the meromorphic function and prove that: Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic function such that $\overline{\lim_{r\to\infty}}\dfrac{\log T\left(r+\dfrac{1}{T(r,f)},f\right)}{\log T(r,f)}<+\infty$. If $0<\delta<1$, then there exist $a_n\,(n=1,2,\cdots)$, such that the set

$$\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$$

is a subset of

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\left\{a:|a-a_n|<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\sigma n}}\right\},$$

where $\sigma=\dfrac{\log\dfrac{2}{2-\delta}}{\left[\dfrac{10}{\delta}\right]}>0$, which is a set of finite μ-measure.

Keywords

Meromorphic Function, μ-Measure, Valiron Quasi-Deficient

超越亚纯函数的拟亏值

马琳珂，刘　丹

华南农业大学应用数学研究所，广东　广州
Email: 785231789@qq.com, liudan@scau.edu.cn

文章引用: 马琳珂, 刘丹. 超越亚纯函数的拟亏值[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 499-507.
DOI: 10.12677/pm.2018.85067

收稿日期：2018年8月18日；录用日期：2018年9月4日；发布日期：2018年9月11日

摘　要

本文主要研究超越亚纯函数的Valiron拟亏值问题，证明了：设 $f(z)$ 是复平面上满足 $\overline{\lim_{r\to\infty}}\dfrac{\log T\left(r+\dfrac{1}{T(r,f)},f\right)}{\log T(r,f)}<+\infty$ 的超越亚纯函数。若 $0<\delta<1$，则存在一列复数 $a_n\,(n=1,2,\cdots)$，使得集合

$$\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$$

含于

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\left\{a:|a-a_n|<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\sigma n}}\right\},$$

其中 $\sigma=\dfrac{\log\dfrac{2}{2-\delta}}{\left[\dfrac{10}{\delta}\right]}>0$，即 $\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$ 为一个有穷 μ 测度集。

关键词

亚纯函数，μ测度集，Valiron拟亏值

1. 引言

在本文中，假设读者熟知 Nevanlinna 值分布理论的相关基础知识以及常见符号[1]。设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数，a 为任意的复数，Nevanlinna 定义 a 关于 $f(z)$ 的亏量为 $\delta(a,f)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\dfrac{N(r,a)}{T(r,f)}$，当 $\delta(a,f)>0$ 时，a 称为 $f(z)$ 的 Nevanlinna 亏值.Valiron 进一步定义 $\Delta(a,f)=1-\underline{\lim_{r\to\infty}}\dfrac{N(r,a)}{T(r,f)}$，称为 a 关于 $f(z)$ 的 Valiron 亏量，当 $\Delta(a,f)>0$ 时，a 称为 $f(z)$ 的 Valiron 亏值。

1970 年，Hyllengren [2]证明了对于有穷级亚纯函数和任意 $0<\delta<1$，集合 $\left\{a:\Delta(a,f)>\delta\right\}$ 一定是一个有穷 μ 测度集。即存在一列复数 $a_n\,(n=1,2,\cdots)$，使得上述集合含于

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\left\{a:|a-a_n|<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\sigma n}}\right\}.$$

记 $N_{1)}(r,a)$ 为 $\{z\,|\,z\le r\}$ 内 $f(z)-a$ 的单重零点密指量，杨乐[3]引进了 $\delta_{1)}(a,f)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\dfrac{N_{1)}(r,a)}{T(r,f)}$，当

$\delta_{1)}(a,f)>0$ 时，a 称为 $f(z)$ 的 Nevanlinna 拟亏值。之后杨乐又定义了 $\Delta_{1)}(a,f)=1-\varliminf_{r\to\infty}\dfrac{N_{1)}(r,a)}{T(r,f)}$，当 $\Delta_{1)}(a,f)>0$ 时，a 称为 $f(z)$ 的 Valiron 拟亏值，并且证明了

定理 A [4]：设 $f(z)$ 为开平面有穷级的超越亚纯函数，若 $0<\delta<1$，则存在一列复数 $a_n\ (n=1,2,\cdots)$，使得集合 $\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$ 含于

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\left\{a:|a-a_n|<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\sigma n}}\right\},$$

其中 $\sigma=\dfrac{\log\dfrac{2}{2-\delta}}{\left[\dfrac{10}{\delta}\right]}>0$。

之后 Furuta 和 Toda 他们引进了[5]

$$T_0(r,f)=\int_1^r\frac{T(t,f)}{t}\mathrm{d}t,N_0(r,a)=\int_1^r\frac{N(t,a)}{t}\mathrm{d}t,\Delta_0(a,f)=1-\varliminf_{r\to\infty}\frac{N_0(r,a)}{T_0(r,f)}。$$

当 $\Delta_0(a,f)>0$ 时，a 称为 $f(z)$ 的修正 Valiron 亏量。

相对于杨乐的做法，方明亮、郭辉定义了

$$N_{1)0}(r,a)=\int_1^r\frac{N_{1)}(t,a)}{t}\mathrm{d}t,\Delta_{1)0}(a,f)=1-\varliminf_{r\to\infty}\frac{N_{1)0}(r,a)}{T_0(r,f)}。$$

当 $\Delta_{1)0}(a,f)>0$ 时，a 称为 $f(z)$ 的修正 Valiron 拟亏值。

相对于修正的 Valiron 亏值以及拟亏值，对于超越亚纯函数可以把“有穷级”的限制条件去掉。从而得到以下定理

定理 B [6]：设 $f(z)$ 是复平面上的超越亚纯函数。若 $0<\delta<1$，则存在一列复数 $a_n\ (n=1,2,\cdots)$，使得集合 $\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$ 含于

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\left\{a:|a-a_n|<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\sigma n}}\right\},$$

其中 $\sigma=\dfrac{\log\dfrac{2}{2-\delta}}{\left[\dfrac{10}{\delta}\right]}>0$。

对于定理 A，去掉“有穷级”是否可以呢？刘丹等人得出如下定理

定理 C [7]：设 $f(z)$ 是复平面上满足 $\varlimsup_{r\to\infty}\dfrac{\log T\left(r+\dfrac{1}{r},f\right)}{\log T(r,f)}<+\infty$ 的超越亚纯函数。若 $0<\delta<1$，则存在一列复数 $a_n\ (n=1,2,\cdots)$，使得集合 $\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$ 含于

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\left\{a:|a-a_n|<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\sigma n}}\right\},$$

其中 $\sigma=\dfrac{\log\dfrac{2}{2-\delta}}{\left[\dfrac{10}{\delta}\right]}>0$。

本文将定理 C 进行了推广和扩展，使得运用更加广泛。即

定理 1：设 $f(z)$ 是复平面上满足 $\varlimsup_{r\to\infty}\dfrac{\log T\left(r+\dfrac{1}{T(r,f)},f\right)}{\log T(r,f)}<+\infty$ 的超越亚纯函数。若 $0<\delta<1$，则存在一列复数 $a_n\,(n=1,2,\cdots)$，使得集合

$$\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$$

含于

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\left\{a:|a-a_n|<\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\sigma n}}\right\},$$

其中 $\sigma=\dfrac{\log\dfrac{2}{2-\delta}}{\left[\dfrac{10}{\delta}\right]}>0$。即 $\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$ 为一个有穷 μ 测度集。

2. 几个引理

引理 1 [9]：设 $f(z)$ 是 $\{z\,|\,|z|<R\}$ 内的亚纯函数。若 $f(0)\neq 0,\infty$，则对于 $0<r<\rho<R$ 有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\le 4\log^+T(\rho,f)+4\log^+\rho+3\log^+\frac{1}{\rho-r}+2\log^+\frac{1}{r}+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+10。$$

引理 2 [9]：对于 $x>0, A\ge \mathrm{e}$，则有

$$\log x+A\log^+\log^+\frac{1}{x}\le\log^+x+A(\log A-1)。$$

引理 3 [4]：设 $f(z)$ 为复平面上的超越亚纯函数。若 $0<\delta<1$，当 $r_k\to+\infty\,(k\to\infty)$ 时，$T(r_k,f)=\left(\dfrac{2}{2-\delta}\right)^k$ $(k=1,2,\cdots)$，则集合 $\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$ 含于集

$$\left\{a:1-\varliminf_{k\to\infty}\frac{N_{1)}(r_k,a)}{T(r_k,f)}>\frac{\delta}{2}\right\}。$$

证：如果对某个复数 a 有 $\Delta_{1)}(a,f)>\delta$，则一定存在一列 ρ 趋于 ∞，使得对每个 ρ 都有

$$T(\rho,f)-N_{1)}(\rho,a)>\delta' T(\rho,f),\ (\delta'>\delta)。$$

对于每个 ρ 都存在相应的 k，使得 $r_k\le\rho<r_{k+1}$，则

$$\begin{aligned}T(r_k,f)-N_{1)}(r_k,a)&\ge\frac{2-\delta}{2}T(r_{k+1},f)-N_{1)}(\rho,a)\ge\frac{2-\delta}{2}T(\rho,f)-N_{1)}(\rho,a)\\&=\frac{1}{2}\left\{2\left[T(\rho,f)-N_{1)}(\rho,a)\right]-\delta T(\rho,f)\right\}\ge\frac{\delta'}{2}T(r_k,f)\ge\frac{\delta}{2}T(r_k,f)\end{aligned}$$

于是存在一列值 r_k 使得上式成立。证毕。

引理 4 [4]：设 $f(z)$ 为复平面上的亚纯函数，$a_\nu\,(\nu=1,2,\cdots,q)$ 为 q 个判别的有穷复数，记 $d=\min\limits_{1\le\mu<\nu\le q}|a_\mu-a_\nu|$。如果 $f(0)\neq 0,a_\nu,\infty$；$f'(0)\neq 0$，则有

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left\{T(r,f)-N_{1)}(r,a_\nu)\right\}\le 4T(r,f)+S(r,f)。$$

其中

$$S(r,f)=2m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+2m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{f'}{f-a_\nu}\right)+\sum_{\nu=1}^{q}\log\left|f(0)-a_\nu\right|+2\log\frac{1}{\left|f'(0)\right|}+\sum_{\nu=1}^{q}\log^+\left|a_\nu\right|+2q\log^+\frac{3q}{d}+(q+2)\log 2$$

证：根据 Nevanlinna 第二基本定理[8]

$$\sum_{\nu=1}^{q}m(r,a_\nu)\le 2T(r,f)-N_1(r)+S_1(r,f)。$$

其中

$$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right),$$

$$S_1(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{f'}{f-a_\nu}\right)+\log\frac{1}{\left|f'(0)\right|}+q\log^+\frac{3q}{d}+\log 2。\tag{1}$$

可得到

$$\sum_{\nu=1}^{q}T\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)\le 2T(r,f)+\sum_{\nu=1}^{q}\overline{N}(r,a_\nu)+S_1(r,f)。$$

设 $N_{(2}(r,a)=N(r,a)-N_{1)}(r,a)$，以及 $\overline{N}_{(2}(r,a)=\overline{N}(r,a)-N_{1)}(r,a)$，可以得到 $\overline{N}_{(2}(r,a)\le\frac{1}{2}N_{(2}(r,a)$。则有

$$\overline{N}(r,a_\nu)=N_{1)}(r,a_\nu)+\overline{N}_{(2}(r,a_\nu)\le N_{1)}(r,a_\nu)+\frac{1}{2}N_{(2}(r,a_\nu)\le\frac{1}{2}N_{1)}(r,a_\nu)+\frac{1}{2}T\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right),(\nu=1,2,\cdots,q)。$$

从而可得

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left\{T\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)-N_{1)}(r,a_\nu)\right\}\le 4T(r,f)+2S_1(r,f),\tag{2}$$

且

$$T\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right)=T(r,f-a_\nu)+\log\frac{1}{\left|f(0)-a_\nu\right|}\ge T(r,f)-\log^+\left|a_\nu\right|-\log 2+\log\frac{1}{\left|f(0)-a_\nu\right|},\tag{3}$$

将(1)和(3)带入(2)，即可得到引理 4 的结论。证毕。

引理 5：设 $f(z)$ 是复平面上满足 $\varlimsup_{r\to\infty}\dfrac{\log T\left(r+\frac{1}{T(r,f)},f\right)}{\log T(r,f)}<+\infty$ 的亚纯函数，$a_\nu\,(\nu=1,2,\cdots,q;q>4)$ 为 q 个互相判别的有穷复数，$d=\min\limits_{1\le\mu<\nu\le q}\left|a_\mu-a_\nu\right|$。如果 $f(0)\ne 0,a_\nu,\infty$；$f'(0)\ne 0$，则存在充分大的正数 r_0，且 $r_0>\max\left\{e,\left|f(0)\right|,\frac{1}{\left|f(0)\right|},\frac{1}{\left|f'(0)\right|}\right\}$，使得当 $r\ge r_0$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{q}\left\{T(r,f)-N_{1)}(r,a_\nu)\right\}\le{}&4T(r,f)+2(q+1)(4M+7)\log T(r,f)+\left[(8M+71)q+48\right]\log r\\&+8(M+2)\sum_{\nu=1}^{q}\log^+\left|a_\nu\right|+2q\log^+\frac{3q}{d}\end{aligned}。$$

证：由引理 4 可得，我们只要对其中的 $S(r,f)$ 进行适当的估计即可。

由于

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T\left(r+\dfrac{1}{T(r,f)},f\right)}{\log T(r,f)}<+\infty,$$

不妨设

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T\left(r+\dfrac{1}{T(r,f)},f\right)}{\log T(r,f)}=M\text{，}\quad M>0\text{ 为常数。}$$

当 r 充分大时，$\dfrac{\log T\left(r+\dfrac{1}{T(r,f)},f\right)}{\log T(r,f)}<M+1$，故 $\log T\left(r+\dfrac{1}{T(r,f)},f\right)<(M+1)\log T(r,f)$。取 r_0 适当大使得 $r_0>\max\left\{e,|f(0)|,\dfrac{1}{|f(0)|},\dfrac{1}{|f'(0)|}\right\}$，且 $T(r,f)\geq 1$。当 $r_0<r<R=r+\dfrac{1}{T(r,f)}$ 时，根据引理 1 可得

$$\begin{aligned}
m\left(r,\frac{f'}{f}\right)&\leq 4\log^+T(R,f)+4\log^+R+3\log^+\frac{1}{R-r}+2\log^+\frac{1}{r}+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+10\\
&\leq 4(M+1)\log^+T(r,f)+4\log^+\left(r+\frac{1}{T(r,f)}\right)+3\log^+T(r,f)+2\log^+\frac{1}{r}+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+10\\
&\leq 4(M+1)\log^+T(r,f)+18\log^+r+3\log^+T(r,f)+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\\
&=4(M+7)\log T(r,f)+18\log r+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}
\end{aligned}\text{。}$$

对于项 $m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\dfrac{f'}{f-a_\nu}\right)$，有

$$\begin{aligned}
m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{f'}{f-a_\nu}\right)&\leq\sum_{\nu=1}^{q}m\left(r,\frac{f'}{f-a_\nu}\right)+\log q\\
&\leq(4M+7)q\log T(r,f)+(4M+7)\sum_{\nu=1}^{q}\log^+|a_\nu|+(4M+7)q\log 2\\
&\quad+18q\log r+4\sum_{\nu=1}^{q}\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-a_\nu|}+\log q\\
&\leq(4M+7)q\log T(r,f)+4\sum_{\nu=1}^{q}\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-a_\nu|}\\
&\quad+(4M+7)\sum_{\nu=1}^{q}\log^+|a_\nu|+(4M+25)q\log r+\log q
\end{aligned}$$

由 $r>r_0$，且 $r_0>\max\left\{e,|f(0)|,\dfrac{1}{|f(0)|},\dfrac{1}{|f'(0)|}\right\}$，可以看出

$$8\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\leq 8\log^+\frac{1}{|f(0)|}\leq 8\log r,(r\geq r_0),$$

$$\log\frac{1}{|f'(0)|}\le\log r,$$

$$\begin{aligned}&\log|f(0)-a_\nu|+8\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-a_\nu|}\\&\le\log^+|f(0)-a_\nu|+8(\log 8-1)\le\log^+|f(0)|+\log^+|a_\nu|+17\text{。}\\&<18\log r+\log^+|a_\nu|,(r\ge r_0)\end{aligned}$$

则当 $r\ge r_0$ 时，$S(r,f)$ 就有如下的估计：

$$\begin{aligned}S(r,f)&=2m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+2m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{f'}{f-a_\nu}\right)+\sum_{\nu=1}^{q}\log|f(0)-a_\nu|\\&\quad+2\log\frac{1}{|f'(0)|}+\sum_{\nu=1}^{q}\log^+|a_\nu|+2q\log^+\frac{3q}{d}+(q+2)\log 2\\&\le 2\left[(4M+7)\log T(r,f)+18\log r+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right]\\&\quad+2\left[(4M+7)q\log T(r,f)+4\sum_{\nu=1}^{q}\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)-a_\nu|}\right.\\&\quad\left.+(4M+7)\sum_{\nu=1}^{q}\log^+|a_\nu|+(4M+25)q\log r+\log q\right]+\sum_{\nu=1}^{q}\log|f(0)-a_\nu|\\&\quad+2\log\frac{1}{|f'(0)|}+\sum_{\nu=1}^{q}\log^+|a_\nu|+2q\log^+\frac{3q}{d}+(q+2)\log 2\\&\le 2(q+1)(4M+7)\log T(r,f)+36\log r+2q(4M+25)\log r+10\log r\\&\quad+18q\log r+8(M+2)\sum_{\nu=1}^{q}\log^+|a_\nu|+2\log q+2q\log^+\frac{3q}{d}+(q+2)\log r\\&=2(q+1)(4M+7)\log T(r,f)+[(8M+71)q+48]\log r\\&\quad+8(M+2)\sum_{\nu=1}^{q}\log^+|a_\nu|+2q\log^+\frac{3q}{d}\end{aligned}$$

证毕。

引理 6：设 $f(z)$ 是复平面上满足 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log T\left(r+\frac{1}{T(r,f)},f\right)}{\log T(r,f)}<+\infty$ 的超越亚纯函数。若 $0<\delta<1$，则存在一个充分大的正数 r_0'，使得对于每个 $r>r_0'$，集合

$$\left\{a:|a|<r,T(r,f)-N_{1)}(r,a)>\frac{\delta}{2}T(r,f)\right\}$$

含于至多 $\left[\dfrac{10}{\delta}\right]$ 个半径为 $e^{-\frac{\delta}{36}T(r,f)}$ 的小圆内。

证：由于 $f(z)$ 是复平面上的超越亚纯函数，所以

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log r}{T(r,f)}=0,$$

显然

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{T(r,f)}=0\text{。}$$

我们取 $r_0'>r_0$，且 $r>r_0'$，有

$$2(q+1)(4M+7)\frac{\log T(r,f)}{T(r,f)}+\left[(16M+87)q+48\right]\frac{\log r}{T(r,f)}+2q\frac{\log^+ 3q}{T(r,f)}<\frac{1}{3},\tag{4}$$

其中 r_0 由引理 5 确定。

如果引理 6 的结论不成立，则必定存在一个正数 $r>r_0'$ 和 $q=\left[\frac{10}{\delta}\right]+1$ 个点 $a_\nu\ (\nu=1,2,\cdots,q)$ 使得

$$|a_\nu|\le r,\quad d=\min_{1\le\mu<\nu\le q}|a_\mu-a_\nu|\ge \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{36}T(r,f)},$$

$$T(r,f)-N_{1)}(r,a_\nu)>\frac{\delta}{2}T(r,f),(\nu=1,2,\cdots,q)\text{。}$$

由引理 5 可得

$$\begin{aligned}\frac{\delta q}{2}T(r,f)&<\sum_{\nu=1}^{q}\left\{T(r,f)-N_{1)}(r,a_\nu)\right\}\\&\le 4T(r,f)+2(q+1)(4M+7)\log T(r,f)+\left[(8M+71)q+48\right]\log r\\&\quad+8(M+2)\sum_{\nu=1}^{q}\log^+|a_\nu|+2q\log^+\frac{3q}{d}\\&<4T(r,f)+2(q+1)(4M+7)\log T(r,f)+\left[(8M+71)q+48\right]\log r\\&\quad+8q(M+2)\log r+2q\log^+ 3q+2q\frac{\delta}{36}T(r,f)\end{aligned},$$

于是有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\right)\delta\left(\left[\frac{10}{\delta}\right]+1\right)&<4+2(q+1)(4M+7)\frac{\log T(r,f)}{T(r,f)}\\&\quad+\left[(16M+87)q+48\right]\frac{\log r}{T(r,f)}+2q\frac{\log^+ 3q}{T(r,f)}\end{aligned}\text{。}$$

结合(4)和上式可得：$\frac{40}{9}<4+\frac{1}{3}$，矛盾。证毕。

3. 主要结果的证明

取正整数 k_0，使得 $k_0>\max\left\{1+\frac{\log\frac{36}{\delta}}{\log\frac{2}{2-\delta}},\frac{\log r_0'}{\log\frac{2}{2-\delta}}\right\}$，其中 r_0' 由引理 6 确定。设 $r_k\ (k\ge k_0)$ 为引理 3 中定义的序列。按照引理 3，集合 $\left\{a:\Delta_{1)}(a,f)>\delta\right\}$ 应含于

$$\left\{a:1-\varliminf_{k\to\infty}\frac{N_{1)}(r_k,a)}{T(r_k,f)}>\frac{\delta}{2}\right\},$$

而后者又含于

$$\bigcap_{j=k_0}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\left\{a:|a|<r_k,T(r_k,f)-N_{1)}(r_k,a)>\frac{\delta}{2}T(r_k,f)\right\}\text{。}$$

由引理 6，对于每一个固定的 $k\left(k_0 \le k < \infty\right)$，集合

$$\left\{a : |a| < r_k, T\left(r_k, f\right) - N_{1)}\left(r_k, a\right) > \frac{\delta}{2} T\left(r_k, f\right)\right\}$$

应该含于至多 $\left[\frac{10}{\delta}\right]$ 个半径为 $\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{36}T\left(r_k, f\right)}$ 的小圆 $C_{kl}\left(l = 1, 2, \cdots, \left[\frac{10}{\delta}\right]\right)$ 内。当 k, l 变化时，将所有的小圆重新记为 $C_n\left(n = \left(k - k_0\right)\left[\frac{10}{\delta}\right] + l; k = k_0, k_0 + 1, \cdots; l = 1, 2, \cdots, \left[\frac{10}{\delta}\right]\right)$。$C_n$ 的半径为

$$\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{36}T(r,f)} = \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{36}\left(\frac{2}{2-\delta}\right)^k} = \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{36}\left(\frac{2}{2-\delta}\right)^{\frac{n-l}{\left[\frac{10}{\delta}\right]} + k_0}} \le \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{36}\left(\frac{2}{2-\delta}\right)^{\frac{n}{\left[\frac{10}{\delta}\right]} + k_0 - 1}} \le \mathrm{e}^{-\left(\frac{2}{2-\delta}\right)^{\frac{1}{\left[\frac{10}{\delta}\right]} n}},$$

于是定理 1 得证。

基金项目

国家自然科学基金(No. 11371149, No. 11701188)资助。

参考文献

[1] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[2] Hyllengren, A. (1970) Valiron Deficient Values for Meromorphic Function in the Plane. *Acta Mathematica*, **124**, 1-8. https://doi.org/10.1007/BF02394566

[3] 杨乐. 亚纯函数及函数组合的重值[J]. 数学学报, 1964(14): 428-437.

[4] 杨乐. 亚纯函数的拟亏值[J]. 数学学报, 1984(27): 249-256.

[5] Furuta, M. and Toda, N. (1973) On Exceptional Value of Meromorphic Functions of Divergence Class. *Mathematical Society of Japan*, **25**, 667-679. https://doi.org/10.2969/jmsj/02540667

[6] 方明亮, 郭辉. 亚纯函数的修正 Valiron 拟亏值[J]. 四川师范学院学报(自然科学版), 1992, 13(2): 111-117.

[7] 刘丹, 邓炳茂, 杨德贵. 超越亚纯函数的拟亏值[J]. 数学物理学报, 2014, 34A(6): 1474-1480.

[8] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Oxford.

[9] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 18-52.