Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 119-127
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91015

Hans汉斯

Canonical Forms of Boundary Conditions for Singular Differential Operators of Order Three

Tian Niu, Xiaoling Hao*, Longjie Sun

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: *xlhao1883@163.com

Received: Jan. 4th, 2019; accepted: Jan. 22nd, 2019; published: Jan. 29th, 2019

Abstract

There is a close relationship between the characterization of the self-adjoint domain and the deficiency index. In this paper, using the algebraic relation between the deficiency index and the order of the coefficient matrix of the self-adjoint boundary conditions, we obtain the value of the deficiency index when the third-order symmetric differential operator can realize the self-adjoint expansion and give the corresponding canonical forms of the self-adjoint boundary conditions.

Keywords

Differential Operators, Self-Adjoint Boundary Conditions, Deficiency Index

三阶奇异微分算子自伴边界条件的标准型

牛　天，郝晓玲*，孙龙洁

内蒙古大学，数学科学学院，内蒙古　呼和浩特
Email: *xlhao1883@163.com

收稿日期：2019年1月4日；录用日期：2019年1月22日；发布日期：2019年1月29日

摘　要

三阶奇异自伴微分算子自伴域的描述与亏指数之间有着紧密的联系。本文利用亏指数的取值与自伴边界条件系数矩阵的阶数之间的代数关系，得到三阶对称微分算子能实现自伴扩张时的亏指数取值并给出了相应的自伴边界条件的标准型。

*通讯作者。

文章引用: 牛天, 郝晓玲, 孙龙洁. 三阶奇异微分算子自伴边界条件的标准型[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 119-127.
DOI: 10.12677/pm.2019.91015

关键词

微分算子，自伴边界条件，标准型

1. 引言

正则的自伴 Sturm-Liouville 问题由二阶对称微分表达式及自伴边界条件组成。在 $J=(a,b),-\infty\le a<b\le\infty$ 上定义二阶对称微分表达式为：

$$-(py')'+qy=\lambda wy\text{，}\tag{1}$$

其中

$$p^{-1},q,w\in L(J,\mathbb{R})\text{。}\tag{2}$$

边界条件为

$$AY(a)+BY(b)=0,Y=\begin{pmatrix}y\\py'\end{pmatrix}\tag{3}$$

且 A,B 满足条件

$$A,B\in M_2(\mathbb{C}),AEA^*=BEB^*,rank(A:B)=2,E=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.\tag{4}$$

式(1)的自伴条件(3)，(4)被分为三种互斥的子类，并且有如下的标准型：

1) 分离自伴边界条件：

$$\cos(\alpha)y(a)-\sin(\alpha)(py')(a)=0$$
$$\cos(\beta)y(b)-\sin(\beta)(py')(b)=0,\alpha\in[0,\pi),\beta\in(0,\pi].\tag{5}$$

2) 耦合自伴边界条件：

$$Y(b)=e^{i\gamma}KY(a),-\pi<\gamma\le\pi,K\in M_2(\mathbb{R}),\det(K)=1.\tag{6}$$

任意一个自伴边界条件(3)，(4)其必定等价于上述两种自伴标准型之一。(见[1] [2])

对于奇异的 Sturm-Liouville 问题，系数弱化为如下条件

$$p^{-1},q,w\in L_{loc}(J,\mathbb{R})\text{且在 }J\text{ 几乎处处有 }p>0,w>0.\tag{7}$$

在这种情况下无法保证(1)式的解 y 及拟导数 py' 在区间端点的存在性。如果两端点均为极限圆情况，我们用最大算子域中的边界条件基 u， v 来描述自伴域

$$AY(a)+BY(b)=0,A,B\in M_2(\mathbb{C}),Y=\begin{pmatrix}[y,u]\\ [y,v]\end{pmatrix}.\tag{8}$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 表示 Lagrange 契合式， A,B 满足自伴性条件(4)。易知，在区间端点处 Lagrange 契合式存在且有

限(关于契合式更多内容可参阅[1] [2] [3] [4])。

若端点 a 为极限点型时，式(1)在最大算子域中的任意解 y。恒有 $[y,u](a)=0$，即(8)式中 $Y(a)=0$，故仅需端点 b 处的边界条件即能刻画自伴域。若端点 a 为极限圆型，对任意的 $c\in(a,b)$，式(1)的所有解均属于 $L^2((a,c),w)$，且当 $\lambda=\lambda_a$ 为实数时，$u(a),v(a)$ 能由(1)在 (a,c) 上的线性无关解构成。在端点 b 处我们有类似的结论。注意，当端点 a,b 均为极限圆型时，利用 Naimark 连接引理可将 u_a,v_a,u_b,v_b 连接为 u,v。(见[1] [2] [3] [4])

如果 a 为极限圆型，b 为极限点型时，有如下的自伴标准型：

$$\cos(\alpha)[y,u](a)-\sin(\alpha)[y,v](a)=0,\alpha\in[0,\pi). \tag{9}$$

类似的，如果 a 为极限点型，b 为极限圆型时，自伴标准型为：

$$\cos(\beta)[y,u](b)-\sin(\beta)[y,v](b)=0,\beta\in(0,\pi]. \tag{10}$$

如果 a，b 均为极限圆型时，有如下两种类型的自伴标准型：

1) 分离自伴边界条件：

$$\cos(\alpha)[y,u](a)-\sin(\alpha)[y,v](a)=0,\alpha\in[0,\pi),$$
$$\cos(\beta)[y,u](b)-\sin(\beta)[y,v](b)=0,\beta\in(0,\pi]. \tag{11}$$

2) 耦合自伴边界条件：

$$Y(b)=e^{i\gamma}KY(a),-\pi<\gamma\le\pi,K\in M_2(\mathbb{R}),\det(K)=1,Y=\begin{bmatrix}[y,u]\\ [y,v]\end{bmatrix}. \tag{12}$$

上述的自伴标准型在研究特征值及特征函数关于边界条件的依赖性及数值计算方面有很多应用(见[5] [6])。对三阶正则自伴微分算子，我们得到了其自伴标准型(见[7])。利用这些标准型我们已经得到了特征值及特征函数关于边界条件的依赖性及可微性结果(见[8])。在本文中，我们得到三阶奇异对称微分算子的自伴标准型。

在本文中，$M_{n\times m}(F)$ 表示数域 F 上的 $n\times m$ 阶矩阵，当 $n=m$ 时用 $M_n(F)$ 表示。A^* 表示矩阵 A 的转置共轭。对 $A,B\in M_{n\times m}(F)$，$(A:B)$ 表示前 m 列属于 A 后 m 列属于 B 的矩阵。M_A 表示由拟导数矩阵 A 生成的微分表达式。$L(J,\mathbb{R})$ 表示 J 上的 Lebesgue 可积的实值函数。

本文内容如下：在第二部分介绍了一些关于拟对称三阶微分算式，自伴域与亏指数的预备知识。在第三部分中对 $d_a=d_b$ 时边界条件系数矩阵进行分类，并且得到了其自伴标准型。在第四部分中得到了 $d_a\ne d_b$ 时的自伴标准型。

2. 预备知识

在本文中考虑如下三阶对称微分表达式

$$My=a_0y-(a_1y')'+i\left\{\left[(b_0y)'+b_0y'\right]-\left[(b_1y')''+(b_1y'')'\right]\right\}=\lambda wy \tag{13}$$

其中

$$p^{-1},b_0p^{-1},b_1p^{-1},a_1p^{-2},a_0\in L_{loc}(a,b)\text{且在}(a,b)\text{上几乎处处有 }p>0,w>0. \tag{14}$$

注意，系数仅需满足局部可积条件。在这种情况下，我们无法保证(9)式的解在区间端点的存在性。接下来，我们引入拟导数及 Lagrange 契合式

定义 2.1：对 $n>1$，令

$$Z_n(J):=\left\{A=(a_{r,s})_{r,s=1}^n\in M_n(L_{loc}(J)),a_{r+1,r}\neq 0\right.$$
$$a_{r.r+1}^{-1}\in L_{loc}(J),1\leq r\leq n-1,a_{r,s}=0,2\leq r+1<s\leq n;,\tag{15}$$
$$\left.a_{r,w}\in L_{loc}(J)\right\}$$

对 $A\in Z_n(J)$ 定义

$$V_0:=\{y:J\to\mathbb{C},y\text{是可测的}\}。\tag{16}$$

并且，

$$y^{[0]}=y\tag{17}$$

类似的，对 $r=1,\cdots,n$ 定义

$$V_r=\left\{y\in V_{r-1}:y^{[r-1]}\in(AC_{loc}(J))\right\},\tag{18}$$

$$y^{[r]}=a_{r,r+1}^{-1}\left\{y^{[r-1]\prime}-\sum_{s=1}^{r}a_{rs}y^{[s-1]}\right\}(y\in V_r)\tag{19}$$

其中 $a_{n,n+1}=1$。

那么对(9)式有如下拟导数表达形式：

$$\begin{aligned}&y^{[0]}=y;\\&y^{[1]}=-ipy';\\&y^{[2]}=-ip\left[(-ipy')'-i\frac{a_{22}}{p^2}y^{[1]}-i\frac{b_0}{p}y\right];\\&y^{[4]}=\left(y^{[2]}\right)'-ia_0y+i\frac{b_0}{p}y^{[1]};\\&My=iy^{[3]}.\end{aligned}\tag{20}$$

引理 2.2：令 $A\in Z_n(J)$ 为生成(11)式中拟导数的矩阵。则

$$A=-E_n^{-1}A^*E_n,\tag{21}$$

其中 $E_n=\left(i\delta_{r,n+1-s}\right)_{r,s=1}^n$。且对任意的 $y,z\in D(M_A)$ 有：

$$\bar{z}M_Ay-y\overline{M_{A^*}z}=[y,z]',\tag{22}$$

其中

$$[y,z]=i\bar{z}y^{[2]}+i\overline{z^{[1]}}y^{[1]}+i\overline{z^{[2]}}y。\tag{23}$$

证明：利用分部积分即得结论。

注 1：下面我们给出三阶对称微分表达式(9)生成微分算子的自伴域的描述，这个自伴描述依赖亏指数 d。亏指数的值即为描述自伴域的线性无关的边界条件的个数。对任意的 $c\in(a,b)$，记区间 (a,b) 上的亏指数为 d，记 (a,c) 上的亏指数为 d_a，(c,b) 上的亏指数为 d_b，且 d，d_a，d_b 之间有如下关系

$$d=d_a+d_b-3\tag{24}$$

且(12)式与 c 的选择无关。

注 2：由 Everitt 公式可知，三阶情况下正负亏指数满足如下条件

$$1 \le d^{+} \le 3，\ 2 \le d^{-} \le 3 \text{ 或 } 1 \le d^{-} \le 3，\ 2 \le d^{+} \le 3， \tag{25}$$

其中 d^{+}，d^{-} d^{-} 为对称算子的亏空间的维数。为了保证自伴性，须有 $d = d^{-} = d^{+}$，$d_a = d_a^{-} = d_a^{+}$，$d_b = d_b^{-} = d_b^{+}$。易知在三阶情况下，为了保证自伴性，不存在 $d_a = 1$ 或 $d_b = 1$ 的情况(更多相关亏指数的内容可参阅[1] [2] [3] [4])。

定理 2.3：对任意的 $c \in (a,b)$，令 d_a, d_b, d 为在 $(a,c),(c,b),(a,b)$ 上的亏指数。假设对 $\lambda_a \in \mathbb{R}$，式(9)有 d_a 个属于 $L^2((a,c),w)$ 的线性无关的解。对 $\lambda_b \in \mathbb{R}$，式(9)有 d_b 个属于 $L^2((c,b),w)$ 的线性无关解。令 $m_a = 2d_a - 3$，$m_b = 2d_b - 3$，令 $u_j (j = 1,\cdots,m_a)$ 为在 (a,c) 的 LC 解，$v_j (j = 1,\cdots,m_b)$ 为在 (c,b) 上 LC 解。那么，对最大算子域 $D_{\max}(S)$ 的子流形 $D(S)$ 为最小算子域 $D_{\min}(S)$ 的自伴扩张当且仅当存在 $d \times m_a$ 阶矩阵 A，$d \times m_b$ 阶矩阵 B 满足下面条件：

1) $rank(A:B) = 3$；
2) $AE_{m_a}A^{*} = BE_{m_b}B^{*}$；
3) $$D(S) = \left\{ y \in D_{\max} : A\begin{pmatrix} [y,u_1](a) \\ \vdots \\ [y,u_{m_a}](a) \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} [y,v_1](b) \\ \vdots \\ [y,v_{m_b}](b) \end{pmatrix} = 0 \right\}, \tag{26}$$

其中 $E = \left(i\delta_{r,j+1-s}\right)_{r,s=1}^{j}$。

证明：见[9]中的定理 1。

由上述定理可的知，$d_a, d_b = 2,3$ 时，矩阵 A,B 的阶数及亏指数 d 有如下情况：

1) $d_a = d_b = 2$，此时 $m_a = m_b = 1$，$d = 1$；
2) $d_a = d_b = 3$，此时 $m_a = m_b = 3$，$d = 3$；
3) $d_a = 2$，$d_b = 3$，此时 $m_a = 1$，$m_b = 3$，$d = 2$；
4) $d_a = 3$，$d_b = 2$，此时 $m_a = 3$，$m_b = 1$，$d = 2$。

我们将其分为左右亏指数相等 $d_a = d_b$，与左右亏指数不相等 $d_a \ne d_b$ $d_a \ne d_b$ 两种情况讨论其自伴标准型。

3. $d_a = d_b$ 的情况

在本章中我们讨论 $d_a = d_b$ 时三阶微分算子的自伴边界条件的标准型。通过计算，我们得到在 $d_a = d_b = 2$ 的情况下自伴标准型仅有一种情况。在 $d_a = d_b = 3$ 的情况下有 6 种自伴标准型。

若 $d_a = d_b = 2$，由 $m_a = m_b = 1$，$d = 1$，$rank(A:B) = 1$，易知 $(A:B)$ 具有如下形式：

$$(A:B) = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \end{pmatrix} \tag{27}$$

下面我们通过(13)来计算自伴标准型。

定理 3.1：令定理 2.3 的假设与概念成立，若 $d_a = d_b = 2$。那么系数矩阵 $A,B \in M_1(\mathbb{C})$，且有如下的自伴标准型：

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \pm e^{i\theta} \end{pmatrix}。 \tag{28}$$

证明：利用(13)来计算标准型，通过计算可得：

$$AE_1A^{*} = \left(ia_{11}\overline{a_{11}}\right) \tag{29}$$

$$BE_1B^* = \left(ib_{11}\overline{b_{11}}\right)。\tag{30}$$

若$(A:B)$满足自伴性条件，必有$AE_1A^* = BE_1B^*$，即(15) = (16)。令$a_{11} = re^{i\theta_1}$，则$b_{11} = \pm re^{i\theta_2}$。那么

$$(A:B) = \left(re^{i\theta_1} \quad \pm re^{i\theta_2}\right) \to \left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} \quad \pm e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\right)。\tag{31}$$

令$\theta = \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}$，即得如下标准型：

$$\left(e^{i\theta} \quad \pm e^{-i\theta}\right)。\tag{32}$$

若$d_a = d_b = 3$，则$m_a = m_b = 3$，$rank(A:B) = 3$类似正则情况，我们有如下结论：

定理 3.2：令定理 2.3 的假设与概念成立，假设$d_a = d_b = 3$。那么系数矩阵$A, B \in M_3(\mathbb{C})$，且有如下形式的 6 种自伴标准型：

1) 耦合自伴标准型。

$$\text{i)}\ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \overline{a_{33}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & -\overline{a_{12}}e^{i\theta} & \mp\overline{b_{32}}e^{-i\theta} & \pm e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_{31} & b_{32} & 1 \end{pmatrix},\tag{33}$$

其中$\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}\,a_{13} = -\dfrac{|a_{12}|^2}{2}, \mathrm{Re}\,b_{31} = -\dfrac{|b_{32}|^2}{2}$。

$$\text{ii)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & -\overline{a_{32}}e^{i\theta} & 0 & \pm e^{i\theta} & 0 \\ 1 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & -\overline{a_{13}} \end{pmatrix},\tag{34}$$

其中$\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}\,a_{33} = -\dfrac{|a_{32}|^2}{2}$。

2) 混合自伴标准型。

$$\text{iii)}\ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & -\overline{a_{12}}e^{i\theta} & \mp\overline{b_{32}}e^{-i\theta} & \pm e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & 1 \end{pmatrix},\tag{35}$$

其中$\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}\,a_{13} = -\dfrac{|a_{12}|^2}{2}, \mathrm{Re}\,b_{31} = -\dfrac{|b_{32}|^2}{2}$。

$$\text{iv)}\ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & -\overline{a_{12}}e^{i\theta} & 0 & \pm e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{36}$$

其中$\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}\,a_{13} = -\dfrac{|a_{12}|^2}{2}$。

$$\text{v)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 & \mp\overline{b_{32}}e^{-i\theta} & \pm e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & 1 \end{pmatrix},\tag{37}$$

其中 $\theta\in\mathbb{R},\mathrm{Re}\,b_{31}=-\frac{|b_{32}|^2}{2}$。

$$\text{vi)}\quad\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&e^{i\theta}&0&0&\pm e^{-i\theta}&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix},\tag{38}$$

其中 $\theta\in\mathbb{R}$。

证明：在此情况下与正则情况类似，可参阅[9]。

4. $d_a\neq d_b$ 的情况

本章研究亏指数不相等的情况下自伴标准型。当亏指数不相等的时候我们有 $d_a=2$，$d_b=3$ 或 $d_a=3$，$d_b=2$ 两种情况。并且每种情况下亏指数 $d=2$。通过计算我们得到在每种情况下均有两种自伴标准型。

如果 $d_a=2$，$d_b=3$，可知 $m_a=1$，$m_b=3$，$d=2$。那么 $(A:B)$ 可化为如下形式：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&b_{12}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}\tag{39}$$

其中 $(A:B)$ 中变量过多，为了简化计算，我们对 $(A:B)$ 进行如下分类。

引理 4.1：对 $A\in M_{2\times1}(\mathbb{C})$，$B\in M_{2\times3}(\mathbb{C})$，$rank(A:B)=2$。有如下两种形式的分类：

$$1)\quad (A:B)=\begin{pmatrix}a_{11}&0&b_{12}&b_{13}\\0&1&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix};\tag{40}$$

$$2)\quad (A:B)=\begin{pmatrix}a_{11}&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&0&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}。\tag{41}$$

证明：通过讨论 B 第一列，对 $(A:B)$ 进行分类。

若 $b_{12}\neq0$，

$$(39)\rightarrow\begin{pmatrix}a_{11}&0&b_{12}&b_{13}\\0&1&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}a_{11}&0&b_{12}&b_{13}\\0&1&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}\tag{42}$$

此为情况(1)。

若 $b_{12}=0$，则(23)具有如下形式：

$$(A:B)=\begin{pmatrix}a_{11}&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&0&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}\tag{43}$$

即为情况(2)。

定理 4.2：假设上述定理 2.3 的记号与假设成立，$d_a=2$，$d_b=3$。则系数矩阵 $A\in M_{2\times1}(\mathbb{C})$，$B\in M_{2\times3}(\mathbb{C})$，且有如下两种自伴标准型：

$$\text{i)}\quad\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0&\pm e^{-i\theta}&\mp e^{-i\theta}\overline{b_{22}}\\0&1&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix},\tag{44}$$

其中 $\mathrm{Re}\,b_{23}=\frac{|b_{22}|^2}{2}$，$\theta\in\mathbb{R}$。

$$\text{ii)}\quad\begin{pmatrix}re^{i\theta}&0&\pm re^{-i\theta}&b_{13}\\0&0&0&b_{23}\end{pmatrix},\tag{45}$$

其中 $\theta\in\mathbb{R}$ 。

证明：i) 若 $(A:B)$ 满足引理 4.1 中形式的(1)，那么

$$AE_1A^*=\begin{pmatrix} ia_{11}\overline{a_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\tag{46}$$

$$BE_3B^*=\begin{pmatrix} ib_{12}\overline{b_{12}} & ib_{12}\overline{b_{22}}+ib_{13} \\ ib_{22}\overline{b_{12}}+i\overline{b_{13}} & ib_{22}\overline{b_{22}}+ib_{23}+i\overline{b_{23}} \end{pmatrix};\tag{47}$$

若矩阵 $(A:B)$ 满足自伴性条件，有 $AE_1A^*=BE_3B^*$ 。令 $a_{11}=re^{i\theta_1}$ ，则 $b_{12}=\pm re^{i\theta_2}$ 。通过计算，我们有

$$(A:B)\to\begin{pmatrix} re^{i\theta_1} & 0 & \pm re^{i\theta_2} & \mp re^{i\theta_2}\overline{b_{22}} \\ 0 & 1 & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} re^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} & 0 & \pm re^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} & \mp re^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\overline{b_{22}} \\ 0 & 1 & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\tag{48}$$

其中 $\mathrm{Re}\,b_{23}=\frac{|b_{22}|^2}{2}$ 。

令 $\theta=\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$ ，则有如下自伴标准型：

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & \pm e^{-i\theta} & \mp e^{-i\theta}\overline{b_{22}} \\ 0 & 1 & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}。\tag{49}$$

ii) 若 $(A:B)$ 满足上述引理 4.1 中形式(2)，有

$$BEB^*=\begin{pmatrix} ib_{12}\overline{b_{12}}+ib_{13}\overline{b_{11}}+ib_{11}\overline{b_{13}} & ib_{12}\overline{b_{22}}+ib_{11}\overline{b_{23}} \\ ib_{22}\overline{b_{12}}+ib_{23}\overline{b_{11}} & ib_{22}\overline{b_{22}} \end{pmatrix}。\tag{50}$$

若 $(A:B)$ 满足自伴性条件，则 $AE_1A^*=BE_3B^*$ 。注意，为了保证 $rank(A:B)=2$ 必须保证 $b_{23}\neq 0$ ，否则 $b_{22}=b_{23}=0$ ，与 $rank(A:B)=2$ 矛盾。若 $b_{23}\neq 0$ ，我们有 $b_{11}=b_{22}=0$ 。类似(1)中的计算，可得如下自伴标准型：

$$\begin{pmatrix} re^{i\theta} & 0 & \pm re^{-i\theta} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & b_{23} \end{pmatrix}。\tag{51}$$

当 $d_a=3$ ， $d_b=2$ $d_b=2$ 时，我们有如下 $(A:B)$ 的类似的分类，并且给出了相应的自伴标准型。

引理 4.3：若 $A\in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ ， $B\in M_{2\times 1}(\mathbb{C})$ ， $rank(A:B)=2$ 。有如下两种形式的分类：

1) $$(A:B)=\begin{pmatrix} a_{11} & a & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix};\tag{52}$$

2) $$(A:B)=\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}。\tag{53}$$

定理 4.4：假设上述定理 2.3 的记号与假设成立，$d_a=3$，$d_b=2$。则系数矩阵 $A\in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$，$B\in M_{2\times 1}(\mathbb{C})$，且有如下两种自伴标准型：

i) $$\begin{pmatrix} \mp e^{-i\theta}\overline{a_{22}} & \pm e^{-i\theta} & 0 & e^{i\theta} \\ a_{11} & a_{22} & 1 & 0 \end{pmatrix},\tag{54}$$

其中 $\theta\in\mathbb{R}$ ， $\mathrm{Re}\,a_{11}=\frac{|a_{22}|^2}{2}$ 。

$$\text{ii)} \begin{pmatrix} a_{11} & \pm e^{-i\theta} & 0 & e^{i\theta} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{55}$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$ 。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11561050)，内蒙古自然科学基金资助项目(2018MS01021)。

参考文献

[1] Zettl, A. (2005) Sturm-Liouville Theory, Providence, Rhode Island. American Mathematics Society, Mathematical Surveys and Monographs.

[2] Zettl, A. and Sun, J. (2015) Survey Article: Self-Adjoint Ordinary Differential Operators and Their Spectrum. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **45**, 763-886. https://doi.org/10.1216/RMJ-2015-45-3-763

[3] 曹之江. 常微分算子[M]. 上海: 上海科技出版社, 1987.

[4] 刘景麟. 常微分算子谱论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[5] Kong, Q. and Zettl, A. (1996) Dependence of Eigenvalues of Sturm-Liouville Problems on the Boundary. *Journal of Differential Equations*, **126**, 389-407. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0056

[6] Kong, Q. and Zettl, A. (1996) Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems. *Journal of Differential Equations*, **131**, 1-19. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0154

[7] Niu, T., Hao, X., Sun, J. and Li, K. Canonical Forms of Self-Adjoint Boundary Conditions for Differential Operators of Order Three. (Submitted)

[8] 牛天, 郝晓玲, 李昆. 三阶正则微分算子特征值关于问题的依赖性. (已投)

[9] Hao, X., Zhang, M. and Sun, J. (2017) Characterization of Domains of Self-Adjoint Ordinary Differential Operators of Any Order, Even or Odd. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2017**, 1-19. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2017.1.61