Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 254-258
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93032

Sharp Inequalities and Application of the Generalized Grötzsch Ring Function

Fei Wang[1*], Peigui Zhou[2], Xiaoyu Wang[1]

[1]Teaching Section of Mathematics, Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou Zhejiang
[2]Keyi College of Zhejiang Sci-Tech University, Shangyu Zhejiang
Email: *wf509529@163.com

Received: Apr. 9th, 2019; accepted: Apr. 20th, 2019; published: May 5th, 2019

Abstract

In this paper, we study some monotonicity properties of certain functions defined in term of generalized Grötzsch ring function and some elementary functions, and get new sharp inequalities. Furthermore, we also obtain the lower bound of generalized Hersch-Pfluger distortion function by applying these results in Ramanujan modular equation theory.

Keywords

Generalized Grötzsch Ring Function, Sharp Inequality, Ramanujan Modular Equations, Generalized Hersch-Pfluger Distortion Function

广义Grötzsch环函数的精确界及应用

王　飞[1*]，周培桂[2]，王晓宇[1]

[1]浙江机电职业技术学院数学教研室，浙江　杭州
[2]浙江理工大学科技与艺术学院，浙江　上虞
Email: *wf509529@163.com

收稿日期：2019年4月9日；录用日期：2019年4月20日；发布日期：2019年5月5日

摘　要

本文研究广义Grötzsch环函数与一些初等函数组合的单调性，并由此获得新的精确不等式。同时，将所得结果应用于Ramanujan模方程理论，获得广义Hersch-Pfluger偏差函数新的下界。

*通讯作者。

文章引用：王飞，周培桂，王晓宇．广义 Grötzsch 环函数的精确界及应用[J]．理论数学, 2019, 9(3): 254-258.
DOI: 10.12677/pm.2019.93032

关键词

广义Grötzsch环函数，精确不等式，Ramanujan模方程，广义Hersch-Pfluger偏差函数

1. 引言

在本文中，arthr 表示反双曲正切函数。对 $r\in(0,1)$，记 $r'=\sqrt{1-r^2}$ 。对于正实数 x 和 y，Γ-函数、B-函数以及 ψ-函数分别定义[1]为：

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\ B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ \psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \tag{1}$$

令 $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right]=0.57721566\cdots$， 是 Euler-Mascheroni 常数，则

$$\psi(1)=-\gamma,\ \psi(1/2)=-\gamma-\log 4 \tag{2}$$

在 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上定义 Ramanujan 常数[2] [3]为：

$$R(a,b)=-\psi(a)-\psi(b)-2\gamma \tag{3}$$

当 $b=1-a$ 时，式(3)记为

$$R(a)=R(a,1-a)=-\psi(a)-\psi(1-a)-2\gamma,$$

结合式(2)~(3)知 $R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\log 16$ 。

给定实数 a，b，$c\left(c\neq 0,-1,-2,-3,\cdots\right)$，高斯超几何函数定义[4]为：

$$F(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{z^n}{n!},\ |z|<1 \tag{4}$$

这里，当 $n\in\mathbf{N}$ 时，$(a,n)=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$，且 $(a,0)=1$ 。

当 $a\in(0,1)$，第一类、第二类广义椭圆积分分别定义[5]为：

$$K_a=K_a(r)=\frac{\pi}{2}F\left(a,1-a;1;r^2\right),\ K_a'=K_a'(r)=K_a(r') \tag{5}$$

$$E_a=E_a(r)=\frac{\pi}{2}F\left(a-1,1-a;1;r^2\right),\ E_a'=E_a'(r)=E_a(r') \tag{6}$$

因广义椭圆积分关于参数 a 的对称性，本文只考虑 $a\in(0,1/2)$ 的情形。特别地，当 $a=1/2$ 时，$K_{1/2}(r)=K=K(r)$ 与 $E_{1/2}(r)=E=E(r)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分。

广义 Grötzsch 环函数 $\mu_a:(0,1)\to(0,\infty)$ 定义[6]为：

$$\mu_a(r)=\frac{\pi}{2\sin(a\pi)}\frac{K_a'(r)}{K_a(r)} \tag{7}$$

显然，当 $a=1/2$ 时，$\mu(r)=\mu_{1/2}(r)$ 表示平面拟共形映射单调递减的 Grötzsch 极值环 $B^2\setminus[0,r]$ 的模，这里的 B^2 表示平面单位圆盘，且 $\mu_a(0)=\infty$，$\mu_a(1)=0$。近几年，国内外很多学者对广义 Grötzsch 环函数的单调性、凹凸性及不等式进行研究，见文献[7] [8] [9]。

符号差 $1/a$ 的 p 次广义 Ramanujan 模方程定义[5]为：

$$\frac{F\left(a,1-a;1;1-s^2\right)}{F\left(a,1-a;1;s^2\right)}=p\frac{F\left(a,1-a;1;1-r^2\right)}{F\left(a,1-a;1;r^2\right)} \tag{8}$$

利用式(5)及式(7)，可将式(8)改写成

$$\mu_a(s)=p\mu_a(r),p>0 \tag{9}$$

式(9)的解可以表示为

$$s=\varphi_K(a,r)=\mu_a^{-1}\left(\mu_a(r)/K\right),\quad K=1/p \tag{10}$$

称式(10)中的函数 $\varphi_K(a,r)$ 为广义 Hersch-Pfluger 偏差函数，$\varphi_K(a,0)=0$，$\varphi_K(a,1)=1$。当 $a=1/2$ 时，$\varphi_K(a,r)$ 退化为 Hersch-Pfluger 偏差函数 $\varphi_K(r)$。此外，许多学者对广义 Hersch-Pfluger 偏差函数的性质做了深入的研究，见文献[10] [11]。

在文[6]中，裘松良获得如下结论：当 $a\in(0,1/2)$，$r\in(0,1)$ 时，不等式成立

$$\mu(r)+C_1\left(1-r^2\right)\le\mu_a(r)\le\mu(r)+C_1-(a-1/2)r^2$$

当 $a=1/2$ 时等号成立，其中 $C_1=\left[R(a)-\log16\right]/2$。

在文[7]中，王根娣等揭示了广义 Hersch-Pfluger 偏差函数与广义 Grötzsch 环函数 $\mu_a(r)$ 的关系：

$$\varphi_{1/K}(a,r)>r^K\exp\left\{(1-K)c(r)\right\} \tag{11}$$

当且仅当 $\mu_a(r)+\log r\le c(r)$。

本文主要揭示广义 Grötzsch 环函数的分析性质，获得新的精确不等式，并应用于 Ramanujan 模方程解的精确估计。

2. 引理

本文为了证明第三部分的主要结果和引用方便，需要引入下面的导数公式[4]：

$$\frac{\mathrm{d}K_a}{\mathrm{d}r}=2(1-a)\frac{E_a-r'^2K_a}{rr'^2},\quad \frac{\mathrm{d}E_a}{\mathrm{d}r}=2(1-a)\frac{E_a-K_a}{r} \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu_a(r)}{\mathrm{d}r}=-\frac{\pi^2}{4rr'^2K_a^2} \tag{13}$$

引理 1 ([4], Theorem 1.25)对 $-\infty<a<b<+\infty$，设 f 和 g 是两个实值函数，并都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微且在 (a,b) 上 $g'(x)\ne0$，如果 f'/g' 在 (a,b) 上单调递增(递减)，那么函数

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

和

$$G(x)=\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}$$

也在 (a,b) 上单调递增(递减)。而且，若 f'/g' 的单调性是严格的，则 F 和 G 的单调性也是严格的。

引理 2 ([5], Lemma 5.4)对任意的 $r\in(0,1)$ 及 $a\in(0,1/2)$，则

(1) $\dfrac{\pi^2/4-r'K_a^2(r)}{r^2}$ 从 $(0,1)$ 到 $\left(\pi^2\left[a^2+(1-a)^2\right]/4,\pi^2/4\right)$ 上严格单调递增。

(2) $r'K_a(r)$ 从 $(0,1)$ 到 $(0,\pi/2)$ 上严格单调递减。

引理 3 ([11]，定理 2.1(3))对任意的 $r\in(0,1)$ 及 $a\in(0,1/2)$，则 $\mu_a(r)+\log\dfrac{r}{r'}$ 从 $(0,1)$ 到 $\left(R(a)/2,+\infty\right)$ 上严格单调递增。

3. 主要结果及证明

利用上述引理，本节给出主要结果及证明。

定理 3.1 设 $C_1=\mathrm{e}^{(R(a)-\log 4)/2}$，则函数

$$F(r)=\frac{C_1-\exp\left[\mu_a(r)-arth(r')\right]}{r^2}$$

从 $(0,1)$ 到 $\left((1/2-a)^2C_1,C_1-1\right)$ 上严格单调递增。特别地，当 $0<r<1$ 时，

$$\log\left[C_1-(C_1-1)r^2\right]+\log(1+r')<\mu_a(r)+\log r<\log C_1+\log\left[1-(1/2-a)^2r^2\right]+\log(1+r') \tag{14}$$

证明：令 $f_1(r)=C_1-\exp\left[\mu_a(r)-arth(r')\right]$，$f_2(r)=r^2$，则 $F(r)=f_1(r)/f_2(r)$，$f_1(0)=f_2(0)=0$。由式(12)、(13)，求导得

$$\begin{aligned}\frac{f_1'(r)}{f_2'(r)}&=\frac{1}{2}\frac{\exp\left[\mu_a(r)-arth(r')\right]}{r'}\frac{\pi^2/4-r'K_a^2}{r^2}\frac{1}{r'K_a^2}\\&=\frac{1}{2}\exp\left[\mu_a(r)-arth(r')+\log\frac{1}{r'}\right]\frac{\pi^2/4-r'K_a^2}{r^2}\frac{1}{r'K_a^2}\\&=\frac{1}{2}\exp\left[\mu_a(r)+\log\frac{r}{r'}-\log(1+r')\right]\frac{\pi^2/4-r'K_a^2}{r^2}\frac{1}{r'K_a^2}\\&=f_3(r)\end{aligned}$$

根据引理 2.2 (1)、(2)及引理 2.3 可知，$f_3(r)$ 是三个正的单调递增函数的乘积。由引理 2.1 可得函数 $F(r)$ 的单调性。显然，$F(1^-)=C_1-1$。根据 l'Hôpital 法则，结合引理 2.1~2.3，极限

$$\lim_{r\to0^+}F(r)=\lim_{r\to0^+}\frac{f_1'(r)}{f_2'(r)}=(1/2-a)^2\,\mathrm{e}^{(R(a)-\log 4)/2}=(1/2-a)^2C_1.$$

显然，不等式(14)成立。

定理 3.2 设 $C_2=\left[R(a)-\log 16\right]/2$，$\alpha=(1/2-a)^2$，$\beta=\mathrm{e}^{C_2}-1$，则函数

$$G(r)=\frac{\exp\left[C_2-\left(\mu_a(r)-\mu(r)\right)\right]-1}{r^2}$$

从 $(0,1)$ 到 (α,β) 上严格单调递增。特别地，当 $0<r<1$ 时，

$$\frac{R(a)-\log 16}{2}-\log\left(1+\alpha r^2\right)<\mu_a(r)-\mu(r)<\frac{R(a)-\log 16}{2}-\log\left(1+\beta r^2\right) \tag{15}$$

证明：令 $g_1(r)=\exp\left[C_2-\left(\mu_a(r)-\mu(r)\right)\right]-1$，$g_2(r)=r^2$，则 $G(r)=g_1(r)/g_2(r)$，$g_1(0)=g_2(0)=0$。结合式(13)，求导得

$$\frac{g_1'(r)}{g_2'(r)}=\frac{\pi^2}{8}\exp\left\{C_2-\left[\mu_a(r)-\mu(r)\right]\right\}\frac{K+K_a}{r'K^2}\frac{1}{r'K_a^2}\frac{K-K_a}{r^2}=g_3(r)$$

由文[7]中定理 1 (1)和引理 2.1 (3)、引理 2 (2)可知，$g_3(r)$ 是四个正的且单调递增的函数乘积。结合引理 2.1 可知 $G(r)$ 的单调性。极限值 $G(1^-)=C_2-1=\beta$。结合文[7]中引理 2.1 (3)、引理 2 (2)，运用 l'Hôpital 法则便知

$$\lim_{r\to 0^+}G(r)=\lim_{r\to 0^+}\frac{g_1'(r)}{g_2'(r)}=(1/2-a)^2=\alpha .$$

推论 3.3 对所有的 $r\in(0,1)$ 和 $K\in(1,+\infty)$ 时，成立不等式

$$\varphi_{1/K}(a,r)>r^K\left\{e^{[R(a)-\log 4]/2}\left[1-(1/2-a)^2r^2\right](1+r')\right\}^{1-K} \tag{16}$$

特别地当 $a=1/2$ 时，不等式退化为

$$\varphi_{1/K}(r)>r^K\left\{2(1+r')\right\}^{1-K} \tag{17}$$

证明：根据式(11)及定理 3.2 的结论易得不等式(16)和(17)。

基金项目

浙江省教育厅科研基金项目(Y201635387)，浙江机电职业技术学院科研项目(A027117021)，浙江省高等学校访问学者项目(FX2018093)。

参考文献

[1] Abramwitz, M. and Stegun, I.A. (1965) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publications, New York, 253-294.

[2] Qiu, S.L. and Vuorinen, M. (2005) Special Functions in Geometric Function Theory. In: Kühnau, R., *Handbook of Complex Analysis*: *Geometric Function Theory*, Elsevier, Amsterdam, 621-659. https://doi.org/10.1016/S1874-5709(05)80018-6

[3] Qiu, S.L., Ma, X.Y. and Huang, T.R. (2017) Some Properties of the Difference between the Ramanujan Constant and Beta Function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **40**, 114-129. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.08.043

[4] Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M. (1997) Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps. John Wiley & Sons, New York, 32-47.

[5] Anderson, G.D., Qiu, S.L., Vamanamurthy, M.K., *et al*. (2000) Generalized Elliptic Integrals and Modular Equations. *Pacific Journal of Mathematic*, **192**, 1-37. https://doi.org/10.2140/pjm.2000.192.1

[6] 裘松良. GrÖtzsch 环与 Ramanujan 模方程[J]. 数学学报, 2000, 43(2): 283-290.

[7] Wang, G.D., Zhang, X.H. and Chu, Y.M. (2007) Inequalities for the Generalized Elliptic Integrals and Modular Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **331**, 1275-1283. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.09.070

[8] Alzer, H. and Richards, K. (2015) On the Modulus of the GrÖtzsch Ring. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **432**, 134-141. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.06.057

[9] Zhang, X.H. (2017) On the Generalized Modulus. *The Ramanujan Journal*, **43**, 405-413.

[10] Ma, X.Y., Chu, Y.M. and Wang, F. (2013) Monotonicity and Inequalities for the Generalized Distortion Function. *Acta Mathematica Scientia*, **33**, 1759-1766. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(13)60121-6

[11] 张孝惠, 王根娣, 褚玉明, 等. 广义偏差函数的单调性和不等式[J]. 数学年刊, 2007, 28(2): 183-190.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org