Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 72-79
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102012

Lorentz Estimates for Calderón-Zygmund Type Singular Integral Operators

Zhizhou Yu

College of Science, Shanghai University, Shanghai
Email: yzzshu@163.com

Received: Jan. 21st, 2020; accepted: Feb. 6th, 2020; published: Feb. 13th, 2020

Abstract

Lorentz estimate is a new regularity estimate in the partial differential equations. In this paper, we mainly study Lorentz estimates for Calderón-Zygmund type singular integral operators.

Keywords

Lorentz Spaces, Regularity, Calderón-Zygmund, Singular Integral Operators

Calderón-Zygmund型奇异积分算子的Lorentz估计

喻志洲

上海大学理学院，上海
Email: yzzshu@163.com

收稿日期：2020年1月21日；录用日期：2020年2月6日；发布日期：2020年2月13日

摘　要

Lorentz估计是偏微分方程中新的正则性估计，本文我们主要研究Calderón-Zygmund型奇异积分算子的Lorentz估计。

关键词

Lorentz空间，正则性，Calderón-Zygmund，奇异积分算子

文章引用: 喻志洲. Calderón-Zygmund 型奇异积分算子的 Lorentz 估计[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 72-79.
DOI: 10.12677/pm.2020.102012

1. 介绍

解的存在唯一性及其正则性研究是偏微分方程中的经典问题，其中 L^p 估计在正则性理论的研究中起着重要的作用。Wang [1]在 Caffarelli 和 Peral [2]基础上利用紧方法、Vitali 覆盖引理、极大函数等技巧给出了 Poisson 方程和热传导方程的 L^p 内估计的几何化证明方法；后来，Byun 和 Wang 利用类似技巧在[3] [4] [5] [6]中得到了各类二阶散度型椭圆方程与抛物方程在不同区域中的全局 L^p 估计。

随着 L^p 估计理论的推广，越来越多的人感兴趣于新的正则性估计—Lorentz 估计。Baroni 在[7]中通过引入 Calderón-Zygmund 算子和水平集证明了退化的和非退化的具有 VMO 系数的散度型椭圆和抛物型方程组的局部 Lorentz 估计；另外，p-Laplacican 型椭圆和抛物方程的全局 Lorentz 估计被作者[8] [9]证明；Yao 在[10]中将方程估计推广到一类非线性抛物方程的 Lorentz 估计。

类似地，奇异积分算子的正则性估计也是调和分析中重要的课题。作者[11] [12] [13]得到了 Calderón-Zygmund 型奇异积分算子的 L^p 估计，Yao 在[14]中进一步得到了在加权 Orlicz 空间下奇异积分的正则性估计，本文的目的是对 Calderón-Zygmund 型奇异积分算子的正则性理论进行进一步拓展。

本文我们研究以下的 Calderón-Zygmund 型奇异积分算子

$$T_\varepsilon f(x):=\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y, \tag{1.1}$$

对任意的 $\varepsilon>0$ 成立，其中 $\Omega(x):\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ 满足

(a) $|\Omega(x)|\le A_1$， $\Omega(rx)=\Omega(x)$ 对任意的 $r>0$ 成立；

(b) $\int_0^1\frac{\theta(\sigma)}{\sigma}\mathrm{d}\sigma\le A_2$，其中 A_1， A_2 是两个正常数且

$$\theta(\sigma):=\sup_{\substack{|x-y|\le\sigma\\|x|=|y|=1}}|\Omega(x)-\Omega(y)|;$$

(c) $\int_{S^{n-1}}\Omega(x)\mathrm{d}\theta=0$，其中 $S^{n-1}:=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$。

根据经典理论[11] [12] [13]，若 $\Omega(x)$ 满足条件(a)~(c)，那么我们可以得到

(1) $T_\varepsilon f$ 是强(p,p)的，即 $\|T_\varepsilon f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le C\|f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$，对任意的 $p>1$。 (1.2)

(2) $T_\varepsilon f$ 是弱(1,1)的，即 $|\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon f(x)|>\lambda\}|\le\frac{C}{\lambda}\|f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$，对任意的 $\lambda>0$。

本文的主要目的是得到奇异积分算子 $T_\varepsilon f$ 在 Lorentz 空间下的如下估计

$$\|T_\varepsilon f\|_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}^q\le C\|f\|_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}^q\text{，这里 } C>0 \text{ 与 } \varepsilon \text{ 和 } f \text{ 无关。} \tag{1.3}$$

下面给出 Lorentz 空间的定义[7]。

定义 1.1 对于开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，对任意的 $1<\gamma<\infty$ 和 $0<q\le\infty$，Lorentz 空间 $L(\gamma,q)(\Omega)$ 是包含所有满足下式的可测函数 $g:\Omega\to\mathbb{R}$ 组成的空间

$$\|g\|_{L(\gamma,q)(\Omega)}<\infty,$$

其中

$$\|g\|_{L(\gamma,q)(\Omega)}:=\begin{cases}\left(q\int_0^{\infty}\lambda^{q-1}\left|\left\{x\in\Omega:|g(x)|>\lambda\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{q}}, & (0<q<\infty)\\ \sup\limits_{\lambda>0}\lambda\left|\left\{x\in\Omega:|g(x)|>\lambda\right\}\right|^{\frac{1}{\gamma}}, & (q=\infty)\end{cases}$$

事实上，当 $q=\infty$，Marcinkiewicz 空间 $\mathcal{M}^{\gamma}(\Omega)=L(\gamma,\infty)(\Omega)$；当 $q=\gamma$，Sobolev 空间 $L^{\gamma}(\Omega)=L(\gamma,\gamma)(\Omega)$。

下面给出本文所要证明的主要结论。

定理 1.2 假设 $\varepsilon>0$，对任意的 $2<\gamma<\infty$ 和 $0<q\le\infty$，如果 $f\in L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)$ 且 $\Omega(x)$ 满足条件(a)~(c)，那么 $T_\varepsilon f\in L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)$ 且有估计式(1.3)。

2. 准备工作

在这部分，我们将给出证明所需的引理。

引理 2.1 [13] $E\subset\mathbb{R}^n$ 为一可测集，有一族球 $\{B_\lambda\}$ 覆盖 E，即 $E\subset\bigcup\limits_{\lambda}B_\lambda$，假如 $\sup\limits_{\lambda}\{diam(B_\lambda)\}<\infty$，则存在互不相交的可数子集 $\{B_{\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $E\subset\bigcup\limits_{k}5B_{\lambda_k}$。

另外，我们需要以下的 Hardy 不等式[15]和反 Hölder 不等式[16]。

引理 2.2 可测函数 $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 使得 $\int_0^{\infty}g(\lambda)\mathrm{d}\lambda<\infty$，那么对于任意的 $\alpha\ge1$ 和 $r>0$ 都有

$$\int_0^{\infty}\lambda^r\left(\int_\lambda^{\infty}g(\mu)\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\le\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\alpha}\int_0^{\infty}\lambda^r\left[\lambda g(\lambda)\right]^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

引理 2.3 若 $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是一个不增可测函数，其中 $\alpha_1\le\alpha_2\le\infty,r>0$，那么

(1) 当 $\alpha_2<\infty$ 时，有 $\left[\int_\lambda^{\infty}\left[\mu^r g(\mu)\right]^{\alpha_2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\right]^{\frac{1}{\alpha_2}}\le\varepsilon\lambda^r g(\lambda)+\frac{C}{\varepsilon^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1}}\left[\int_\lambda^{\infty}\left[\mu^r g(\mu)\right]^{\alpha_1}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\right]^{\frac{1}{\alpha_1}}$，对每个 $\varepsilon\in(0,1]$ 和任意 $\lambda\ge0$ 成立。

(2) 当 $\alpha_2=\infty$ 时，有 $\sup\limits_{\mu>\lambda}\left[\mu^r g(\mu)\right]\le\varepsilon\lambda^r g(\lambda)+C\left(\int_\lambda^{\infty}\left[\mu^r g(\mu)\right]^{\alpha_1}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$，其中当 $\alpha_2<\infty$ 时，常数 C 依赖于 α_1,α_2,r；当 $\alpha_2=\infty$ 时，常数 $C\equiv C(\alpha_1,r)$。

现在定义

$$\lambda_0^2=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|T_\varepsilon f|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{\delta^2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f|^2\mathrm{d}x,\tag{2.1}$$

其中 $\delta\in(0,1)$ 是一个充分小且待定的一个数。记

$$f_\lambda=f/(\lambda_0\lambda)\text{ 且 }T_\varepsilon f_\lambda=T_\varepsilon f/(\lambda_0\lambda)\text{，对任意 }\lambda>0\text{。}\tag{2.2}$$

引理 2.4 对 $\lambda>0$，则存在一族互不相交的球 $\{B_{\rho_i}(x_i)\}_{i\ge1}$，其中 $x_i\in E_\lambda(1):=\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon f_\lambda|>1\}$，$0<\rho_i=\rho_i(x_i,\lambda)\le\rho_0$，且满足 $\lambda^2|B_{\rho_0}|=1$ 使得

$$J_\lambda\left[B_{\rho_i}(x_i)\right]=1,\quad J_\lambda\left[B_\rho(x_i)\right]<1,\tag{2.3}$$

对任意的 $\rho > \rho_i$ 成立，且

$$E_\lambda(1) \subset \bigcup_{i\ge1} B_{5\rho_i}(x_i), \tag{2.4}$$

其中

$$J_\lambda\left[B_\rho(x)\right] = \frac{1}{\left|B_\rho(x)\right|}\int_{B_\rho(x)} \left|T_\varepsilon f_\lambda\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{\delta^2\left|B_\rho(x)\right|}\int_{B_\rho(x)} \left|f_\lambda\right|^2 \mathrm{d}x, \tag{2.5}$$

对任意的 $\lambda > 0$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中任意的球 $B_\rho(x)$ 成立。另外，我们还可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{B_{5\rho_i}(x_i)} \left|f_\lambda\right|^2 \mathrm{d}x\right) \le \frac{8\delta^2\cdot 5^n}{\mu^2}\left(\int_{\frac{\mu}{4}}^{\infty} t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|T_\varepsilon f\right| > t\right\}\right|\mathrm{d}t + \frac{1}{\delta^2}\int_{\frac{\mu\delta}{4}}^{\infty} t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : |f| > t\right\}\right|\mathrm{d}t\right). \tag{2.6}$$

证明. 1. 固定任意的 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $\rho \ge \rho_0 = \rho_0(\lambda) > 0$ 且满足 $\lambda^2\left|B_{\rho_0}\right| = 1$，利用式(2.2)和式(2.5)，我们有

$$J_\lambda\left[B_\rho(x)\right] \le \frac{1}{\left|B_\rho(x)\right|}\int_{\mathbb{R}^n} \left|T_\varepsilon f_\lambda\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{\delta^2\left|B_\rho(x)\right|}\int_{\mathbb{R}^n} \left|f_\lambda\right|^2 \mathrm{d}x \le \frac{1}{\lambda^2\left|B_\rho(x)\right|} \le \frac{1}{\lambda^2\left|B_{\rho_0}\right|} = 1.$$

因而我们可以得到

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{\rho\ge\rho_0} J_\lambda\left[B_\rho(x)\right] \le 1. \tag{2.7}$$

对几乎处处 $x\in E_\lambda(1)$，利用 Lebesgue 定理，我们有 $\lim\limits_{\rho\to0} J_\lambda\left[B_\rho(x)\right] > 1$，这意味着存在 $\rho > 0$，满足

$$J_\lambda\left[B_\rho(x)\right] > 1. \tag{2.8}$$

所以由式(2.7)，我们选取 $\rho_x \in (0,\rho_0]$ 使得 $J_\lambda\left[B_{\rho_x}(x)\right] = 1$，$J_\lambda\left[B_\rho(x)\right] < 1$，对任意的 $\rho > \rho_x$。

由上面可以知道，对几乎处处 $x\in E_\lambda(1)$，我们可以找到如上构造的球 $B_{\rho_x}(x)$。因此，利用引理 2.1，我们可以找到一族互不相交的球 $\left\{B_{\rho_i}(x_i)\right\}_{i\ge1}$，其中 $x_i \in E_\lambda(1)$，使得

$J_\lambda\left[B_{\rho_i}(x_i)\right] = 1$，$J_\lambda\left[B_\rho(x_i)\right] < 1$，对任意的 $\rho > \rho_i$ 且 $E_\lambda(1) \subset \bigcup\limits_{i\ge1} B_{5\rho_i}(x_i)$。

2. 现在令 $\mu = \lambda\lambda_0$，则有 $f_\lambda = f/\mu$，$T_\varepsilon f_\lambda = T_\varepsilon f/\mu$，对固定的 $\lambda > 0$，则必有以下式子中的其中一个成立

$$\frac{\mu^2}{2} \le \frac{1}{\left|B_{\rho_i}(x_i)\right|}\int_{B_{\rho_i}(x_i)} \left|T_\varepsilon f\right|^2 \mathrm{d}x,\quad \frac{\mu^2\delta^2}{2} \le \frac{1}{\left|B_{\rho_i}(x_i)\right|}\int_{B_{\rho_i}(x_i)} |f|^2 \mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

(1) 假设第一种情况成立，则我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mu^2}{2}\left|B_{\rho_i}(x_i)\right| &\le \int_{B_{\rho_i}(x_i)} \left|T_\varepsilon f\right|^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} t\left|\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i) : \left|T_\varepsilon f\right| > t\right\}\right|\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\mu^2}{16}\left|B_{\rho_i}(x_i)\right| + 2\int_{\frac{\mu}{4}}^{\infty} t\left|\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i) : \left|T_\varepsilon f\right| > t\right\}\right|\mathrm{d}t\end{aligned},$$

吸收右边第一项就有

$$\left|B_{\rho_i}(x_i)\right| \le \frac{8}{\mu^2}\int_{\frac{\mu}{4}}^{\infty} t\left|\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i) : \left|T_\varepsilon f\right| > t\right\}\right|\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

(2) 假设第二种情况成立，我们可以得到

$$\frac{\mu^2\delta^2}{2}\left|B_{\rho_i}(x_i)\right| \le \int_{B_{\rho_i}(x_i)} |f|^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty t\left|\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i): |f|>t\right\}\right|\mathrm{d}t$$
$$\le \frac{\mu^2\delta^2}{16}\left|B_{\rho_i}(x_i)\right| + 2\int_{\frac{\mu\delta}{4}}^\infty t\left|\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i): |f|>t\right\}\right|\mathrm{d}t,$$

吸收右边第一项就有

$$\left|B_{\rho_i}(x_i)\right| \le \frac{8}{\mu^2\delta^2}\int_{\frac{\mu\delta}{4}}^\infty t\left|\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i): |f|>t\right\}\right|\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

结合(2.10)和(2.11)，我们有

$$\left|B_{\rho_i}(x_i)\right| \le \frac{8}{\mu^2}\int_{\frac{\mu}{4}}^\infty t\left|\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i): |T_\varepsilon f|>t\right\}\right|\mathrm{d}t + \frac{8}{\mu^2\delta^2}\int_{\frac{\mu\delta}{4}}^\infty t\left|\left\{x\in B_{\rho_i}(x_i): |f|>t\right\}\right|\mathrm{d}t. \tag{2.12}$$

3. 由式(2.3)和式(2.5)知$\left|B_{\rho_i}(x_i)\right| = \int_{B_{\rho_i}(x_i)} |T_\varepsilon f_\lambda|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\delta^2}\int_{B_{\rho_i}(x_i)} |f_\lambda|^2\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{\delta^2}\int_{B_{\rho_i}(x_i)} |f_\lambda|^2\,\mathrm{d}x$。

所以我们有

$$\int_{B_{5\rho_i}(x_i)} |f_\lambda|^2\,\mathrm{d}x \le \delta^2\left|B_{5\rho_i}(x_i)\right| = \delta^2 5^n\left|B_{\rho_i}(x_i)\right|. \tag{2.13}$$

从而结合式(2.12)和式(2.13)，利用$\left\{B_{\rho_i}(x_i)\right\}$是互不相交的，我们最后可得到式(2.6)。这就完成了我们的证明。 □

现在我们固定$i\ge 1$，令

$$f_\lambda^1(x) = \begin{cases} f_\lambda(x), 若x\in B_{25\rho_i}(x_i) \\ 0, \quad 若x\in\mathbb{R}^n\setminus B_{25\rho_i}(x_i)\end{cases} \quad 和\ f_\lambda^2(x) = f_\lambda(x) - f_\lambda^1(x). \tag{2.14}$$

引理 2.5 [17]存在$N_1 = N_1(n) > 1$，使得$\left|T_\varepsilon f_\lambda^2(x)\right| \le N_1$对任意的$x\in B_{5\rho_i}(x_i)$成立。

最后，我们给出以下水平集估计的结果。

引理 2.6 假设$\lambda>0$，对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$使得$T_\varepsilon f$满足

$$\begin{aligned}&\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |T_\varepsilon f| > 2N_1\mu\right\}\right| \\ &\le \frac{C(n)\delta^2}{\mu^2}\left[\int_{\frac{\mu}{4}}^\infty t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |T_\varepsilon f|>t\right\}\right|\mathrm{d}t + \frac{1}{\delta^2}\int_{\frac{\mu\delta}{4}}^\infty t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n: |f|>t\right\}\right|\mathrm{d}t\right].\end{aligned} \tag{2.15}$$

证明. 对任意的$\mu=\lambda\lambda_0>0$，利用式(2.2)，引理 2.5 和T_ε是强(2,2)的，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i): |T_\varepsilon f| > 2N_1\mu\right\}\right| \\ &= \left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i): |T_\varepsilon f_\lambda| > 2N_1\right\}\right| \\ &\le \left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i): |T_\varepsilon f_\lambda^1| > N_1\right\}\right| + \left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i): |T_\varepsilon f_\lambda^2| > N_1\right\}\right| \\ &= \left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i): |T_\varepsilon f_\lambda^1| > N_1\right\}\right| \le \frac{1}{N_1^2}\int_{B_{5\rho_i}(x_i)} |T_\varepsilon f_\lambda^1|^2\,\mathrm{d}x \\ &\le C(n)\int_{B_{5\rho_i}(x_i)} |f_\lambda^1|^2\,\mathrm{d}x \le C(n)\int_{B_{5\rho_i}(x_i)} |f_\lambda|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

回顾引理 2.4，对任意的$\lambda>0$，我们有

$$\left\{x\in\mathbb{R}^n: |T_\varepsilon f_\lambda| > 1\right\} = E_\lambda(1) \subset \bigcup_{i\ge 1} B_{5\rho_i}(x_i). \tag{2.16}$$

所以我们可以得到

$$\begin{aligned}&\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|T_\varepsilon f\right|>2N_1\mu\right\}\right|\\&\le\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left\{x\in B_{5\rho_i}(x_i):\left|T_\varepsilon f\right|>2N_1\mu\right\}\right|\le C(n)\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_{5\rho_i}(x_i)}\left|f_\lambda\right|^2\mathrm{d}x\\&\le\frac{C(n)\delta^2}{\mu^2}\left[\int_{\frac{\mu}{4}}^{\infty}t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|T_\varepsilon f\right|>t\right\}\right|\mathrm{d}t+\frac{1}{\delta^2}\int_{\frac{\mu\delta}{4}}^{\infty}t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|f\right|>t\right\}\right|\mathrm{d}t\right]\end{aligned}.$$

这就完成了引理 2.6 的证明。 □

3. 主要结果的证明

证明. 我们分成两种情况，分别为 $0<q<\infty$ 和 $q=\infty$ 的情况。

情形 1： $0<q<\infty$，根据范数定义和引理 2.6，我们可以得到

$$\begin{aligned}\left\|T_\varepsilon f\right\|_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}^q&=q\left(2N_1\right)^q\int_0^\infty\mu^{q-1}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|T_\varepsilon f\right|>2N_1\mu\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}\mu\\&\le C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\int_0^\infty\mu^{q-\frac{2q}{\gamma}-1}\left(\int_{\frac{\mu}{4}}^{\infty}t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|T_\varepsilon f\right|>t\right\}\right|\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}\mu\\&\quad+C(n,\delta)\int_0^\infty\mu^{q-\frac{2q}{\gamma}-1}\left(\int_{\frac{\mu\delta}{4}}^{\infty}t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|f\right|>t\right\}\right|\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}\mu\\&:=I_1+I_2\end{aligned}. \tag{3.1}$$

情形 1.1： $q\ge\gamma$。

利用引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}\left\|T_\varepsilon f\right\|_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}^q&\le C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\left[\int_0^\infty\mu^{q-\frac{2q}{\gamma}-1}\cdot\mu^{\frac{q}{\gamma}}\left(\mu\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|T_\varepsilon f\right|>\frac{\mu}{4}\right\}\right|\right)^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}\mu\right]\\&\quad+C(n,\delta)\left[\int_0^\infty\mu^{q-\frac{2q}{\gamma}-1}\cdot\mu^{\frac{q}{\gamma}}\left(\mu\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|f\right|>\frac{\mu\delta}{4}\right\}\right|\right)^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}\mu\right]\\&=C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\int_0^\infty\mu^{q-1}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|T_\varepsilon f\right|>\frac{\mu}{4}\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}\mu\\&\quad+C(n,\delta)\int_0^\infty\mu^{q-1}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|f\right|>\frac{\mu\delta}{4}\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}\mu\\&=C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\left\|T_\varepsilon f\right\|_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}^q+C(n,\delta)\left\|f\right\|_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}^q\end{aligned}. \tag{3.2}$$

情形 1.2： $0<q<\gamma$。

I_1 的估计。利用引理 2.3，取($\alpha_1=1$， $\alpha_2=\dfrac{\gamma}{q}$， $\varepsilon=1$， $r=\dfrac{2q}{\gamma}$)，我们得到

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\frac{\mu}{4}}^{\infty}t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|T_\varepsilon f\right|>t\right\}\right|\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{\gamma}}\\&\le C\mu^{\frac{2q}{\gamma}}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|T_\varepsilon f\right|>\frac{\mu}{4}\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}+C\int_{\frac{\mu}{4}}^{\infty}t^{\frac{2q}{\gamma}-1}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|T_\varepsilon f\right|>t\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}t\end{aligned}.$$

再利用 Fubini 定理，我们有

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\int_0^\infty \mu^{q-1}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon f|>\frac{\mu}{4}\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}\mu \\
&\quad +C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\int_0^\infty \mu^{q-\frac{2q}{\gamma}-1}\int_{\frac{\mu}{4}}^\infty t^{\frac{2q}{\gamma}-1}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon f|>t\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu \\
&\le C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\left[\|T_\varepsilon f\|^q_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}+\int_0^\infty t^{\frac{2q}{\gamma}-1}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon f|>t\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}\int_0^{4t}\mu^{q-\frac{2q}{\gamma}-1}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}t\right]. \qquad (3.3)\\
&= C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\left[\|T_\varepsilon f\|^q_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}+\int_0^\infty t^{q-1}\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon f|>t\right\}\right|^{\frac{q}{\gamma}}\mathrm{d}t\right] \\
&\le C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\|T_\varepsilon f\|^q_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

I_2 的估计。类似的有

$$I_2\le C(n,\delta)\|f\|^q_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}. \qquad (3.4)$$

因此，由式(3.1)，式(3.2)，式(3.3)和式(3.4)，我们有

$$\|T_\varepsilon f\|^q_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}\le C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\|T_\varepsilon f\|^q_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}+C(n,\delta)\|f\|^q_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}.$$

不妨假设 $\|T_\varepsilon f\|^q_{L(\gamma,q)(\mathbb{R}^n)}<+\infty$，否则，类似[7, P2946]中的技巧,我们可以考虑 $|T_\varepsilon f|_k=\min\{|T_\varepsilon f|,k\}$，对 δ 取充分小使得 $C(n)\delta^{\frac{2q}{\gamma}}\le\frac{1}{2}$，从而可得式(1.3)。

情形 2： $q=\infty$ 。根据 Lorentz 范数的定义和引理 2.6，我们有

$$
\begin{aligned}
\|T_\varepsilon f\|_{\mathcal{M}^\gamma(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\mu>0}2N_1\mu\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon f|>2N_1\mu\right\}\right|^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\le C(n)\delta^{\frac{2}{\gamma}}\sup_{\mu>0}\mu^{1-\frac{2}{\gamma}}\left[\int_{\frac{\mu}{4}}^\infty t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon f|>t\right\}\right|\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\quad +C(n,\delta)\sup_{\mu>0}\mu^{1-\frac{2}{\gamma}}\left[\int_{\frac{\mu\delta}{4}}^\infty t\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f|>t\right\}\right|\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\le C(n)\delta^{\frac{2}{\gamma}}\|T_\varepsilon f\|_{\mathcal{M}^\gamma(\mathbb{R}^n)}\sup_{\mu>0}\left[\mu^{\gamma-2}\int_{\frac{\mu}{4}}^\infty t^{-\gamma+1}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\quad +C(n,\delta)\|f\|_{\mathcal{M}^\gamma(\mathbb{R}^n)}\sup_{\mu>0}\left[\mu^{\gamma-2}\int_{\frac{\mu\delta}{4}}^\infty t^{-\gamma+1}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{\gamma}} \\
&\le C(n)\delta^{\frac{2}{\gamma}}\|T_\varepsilon f\|_{\mathcal{M}^\gamma(\mathbb{R}^n)}+C(n,\delta)\|f\|_{\mathcal{M}^\gamma(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

最后，类似于 $0<q<\infty$ 的做法，我们得到 $q=\infty$ 的结论。综上所述，定理 1.2 得证。 □

参考文献

[1] Wang, L. (2003) A Geometric Approach to the Calderón-Zygmund Estimates. *Acta Mathematica Sinica* (*Engl*. *Ser*.),

19, 381-396. https://doi.org/10.1007/s10114-003-0264-4

[2] Caffarelli, L. and Peral, I. (1998) On $W^{1,p}$ Estimates for Elliptic Equations in Divergence Form. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **51**, 1-21. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0312(199801)51:1<1::AID-CPA1>3.0.CO;2-G

[3] Byun, S. and Wang, L. (2004) Elliptic Equations with BMO Coefficients in Reifenberg Domains. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **57**, 1283-1310. https://doi.org/10.1002/cpa.20037

[4] Byun, S. and Wang, L. (2005) L^p Estimates for Parabolic Equations in Reifenberg Domains. *Journal of Functional Analysis*, **223**, 44-85. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.10.014

[5] Byun, S. and Wang, L. (2007) Parabolic Equations in Time Dependent Reifenberg Domains. *Advances in Mathematics*, **212**, 797-818. https://doi.org/10.1016/j.aim.2006.12.002

[6] Byun, S. and Wang, L. (2007) Quasilinear Elliptic Equations with BMO Coefficients in Lipschitz Domains. *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**, 5899-5913. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04238-9

[7] Baroni, P. (2013) Lorentz Estimates for Degenerate and Singular Evolutionary Systems. *Journal of Differential Equations*, **255**, 2927-2951. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.07.024

[8] Adimurthi, K. and Phuc, N. (2015) Global Lorentz and Lorentz—Morrey Estimates below the Natural Exponent for Quasilinear Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **54**, 3107-3139. https://doi.org/10.1007/s00526-015-0895-1

[9] Duong, X. and Bui, T. (2017) Global Lorentz Estimates for Nonlinear Parabolic Equations on Nonsmooth Domains. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **56**, 47. https://doi.org/10.1007/s00526-017-1130-z

[10] Yao, F. (2019) Lorentz Estimates for a Class of Nonlinear Parabolic Systems. *Journal of Differential Equations*, **266**, 2078-2099. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.08.021

[11] Calderón, A.P. and Zygmund, A. (1952) On the Existence of Certain Singular Integrals. *Acta Mathematica*, **88**, 85-139. https://doi.org/10.1007/BF02392130

[12] Li, D. and Wang, L. (2006) A New Proof for the Estimates of Calderón-Zygmundtype Singular Integrals. *Archiv der Mathematik*, **87**, 458-467. https://doi.org/10.1007/s00013-006-1774-y

[13] Stein, E.M. (1993) Harmonic Analysis. Princeton University Press, Princeton.

[14] Yao, F. (2017) Regularity Estimates in Weighted Orlicz Spaces for Calderón-Zygmundtype Singular Integral Operators. *Forum Mathematicum*, **29**, 187-199. https://doi.org/10.1515/forum-2015-0086

[15] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G. (1952) Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge.

[16] Stein, E.M. (1970) Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.1515/9781400883882

[17] Yao, F. (2009) A New Approach to L^p Estimates for Calderón-Zygmund Type Singular Integrals. *Archiv der Mathematik*, **92**, 137-146. https://doi.org/10.1007/s00013-008-2900-9