Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 65-71
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102011

Unique Range Sets for a Kind of Special Meromorphic Functions

Ronghui Li*, Lan Hu

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: *1655549127@qq.com

Received: Jan. 21st, 2020; accepted: Feb. 6th, 2020; published: Feb. 13th, 2020

Abstract

In this paper, we discuss the problem of unique range sets with fewer elements for a kind of special meromorphic functions. The following result is proved: Let $S=\{z:z^6+z^5+1=0\}$ be a set such that two nonconstant meromorphic functions $f(z)$ and $g(z)$ satisfy $E_f(S)=E_g(S)$. If we attach certain conditions to $f(z)$ and $g(z)$, then $f(z)\equiv g(z)$.

Keywords

Meromorphic Functions, Shared Set, Uniqueness

一类特殊亚纯函数的唯一性象集

李荣慧*，胡　岚

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: *1655549127@qq.com

收稿日期：2020年1月21日；录用日期：2020年2月6日；发布日期：2020年2月13日

摘　要

本文讨论了关于一类特殊亚纯函数元素个数较少的唯一性象集问题。证明了：设集合$S=\{z:z^6+z^5+1=0\}$，$f(z)$和$g(z)$为非常数亚纯函数，且满足$E_f(S)=E_g(S)$。当对$f(z)$和$g(z)$附加特定的条件后，则有$f(z)\equiv g(z)$。

*通讯作者。

文章引用: 李荣慧, 胡岚. 一类特殊亚纯函数的唯一性象集[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 65-71.
DOI: 10.12677/pm.2020.102011

关键词

亚纯函数，分担值集，唯一性

1. 引言及主要结果

在本文中对于开平面上的亚纯函数 $f(z)$ 使用 Nevanlinna [1]理论中的标准记号 $m(r,f),N(r,f),\bar{N}(r,f),T(r,f)$ 和基本结果。用 $S^*(r,f)$ 表示满足以下条件的量：若 f 为有穷级，则 $S^*(r,f)=o(T(r,f))(r\to+\infty)$，若 f 为无穷级，则 $S^*(r,f)=o(T(r,f))(r\to+\infty,r\notin E)$，其中 E 表示 r 在 $(0,+\infty)$ 上一个有穷线性测度的集合，$S^*(r,f)$ 每次出现时 E 可能不相同。

设 $f(z)$ 为开平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，$a(z)$ （可恒为 ∞）是一个亚纯函数。当 $a(z)\not\equiv\infty$ 时，若 $T(r,a)=S^*(r,f)(r\notin E,r\to+\infty,mesE<+\infty)$，则称 $a(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数。当 $a(z)\equiv\infty(z\in\mathbb{C})$ 时，也称 $a(z)$ 为 $f(z)$ 的小函数。

设 $f(z)$ 为开平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，S 是扩充复平面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的一个非空集合且具有不同的元素。令[2]

$$E_f(S)=\bigcup_{a\in S}\{z|f(z)=a\}\text{ (这里 }m\text{ 重 }a\text{ 值点记 }m\text{ 次)。}$$

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为开平面 $\mathbb{C}$ 上的两个非常数亚纯函数，如果 $E_f(S)=E_g(S)$，则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 以 S 为 CM 分担值集；如果对于 $\forall z^*\in\{z\,|\,f(z)=a\}$ 都有 z^* 作为方程 $f(z)=a$ 的根的重数等于 z^* 作为方程 $g(z)=a$ 的根的重数，则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 以 a 为 CM 分担值，其中 $a\in\mathbb{C}$。

符号介绍：记 $n_2\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 在 $|z|\le r$ 内 $f(z)$ 的零点个数，记重数，重数大于 2 次只记 2 次，$N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 为其相应的计数函数。

F. Gross 和杨重骏在文献[3]中证明了定理：

定理 A [3] 集合 $S=\{z\,|\,e^z+z=0\}$ 是整函数的 CM 型唯一性象集。

注意到定理 A 中的集合 S 是一个无限集。

1976 年，F. Gross 在文献[4]中提出这样一个问题：

问题 1 [4] 是否可以找到一个有限集合 S，使得对于 $\forall$ 非常数整函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，若 $E_f(S)=E_g(S)$，则有 $f(z)\equiv g(z)$？

1993 年，仪洪勋在文献[5]中构造出了含有 15 个元素的整函数的 CM 型唯一性象集，给 F. Gross 提出的问题一个肯定的回答，并于 1995 年在文[6]中建立了含有 7 个元素的整函数 CM 型唯一性象集。并在文献[7]中构造了一个含有 11 个点的亚纯函数唯一性象集。

定理 B [6] 集合 $S=\{z\,|\,z^7+z^6+1=0\}$ 是一个含 7 个点的整函数 CM 型唯一性象集。

由此得到了整函数唯一性象集的最小基数是 7。

在考虑亚纯函数极点“较少”的情况下，方明亮和华歆厚在文[8]中证明了下述结果：

定理 C [8] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数，且满足 $\Theta(\infty,f)>\frac{11}{12}$，$\Theta(\infty,g)>\frac{11}{12}$。则存在含有 7 个元素的集合 S 为这类亚纯函数的唯一性象集。

2000 年，杨力在文[9]中得到了一个含有 5 个元素的集合为有穷非正整数下级整函数的唯一性象集。

2001 年，王新利推广了定理 C 并得到了：

定理 D [10] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数，且 $\Theta(\infty,f)>\frac{3}{4}$，$\Theta(\infty,g)>\frac{3}{4}$。则存在含有 7 个元素的集合 S 为这类亚纯函数的唯一性象集。

2003 年，徐炎在文[11]中改进了定理 C 得到了：

定理 H [11] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数，且满足 $\Theta(\infty,f)+\Theta(\infty,g)>\frac{3}{2}$。则存在含有 7 个元素的集合 S 为这类亚纯函数的唯一性象集。

2004 年，段曦盛在文[12]中得到了含有 10 个点的亚纯函数精简唯一性象集。2011 年，白小甜在文[13]中也得到了含有 10 个点的亚纯函数精简唯一性象集。

到目前为止，一直有一个未解决的问题就是：

问题 2 [7] 亚纯函数(整函数)唯一性象集的元素个数的最小基数是多少？

本文基于对上述问题的研究受文[14]的启发，以及对前人结果推广证明了：附加特定条件的一类特殊亚纯函数的唯一性象集的基数可以降到 6 和 5。从而证明了下述定理：

定理 1 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为开平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，且满足

$$\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)\le\lambda\big(T(r,f)+T(r,g)\big)+S^*(r,f)+S^*(r,g)\ \ (\text{其中 }\lambda<\frac{1}{4}),$$

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\le m\left(r,\frac{1}{f}\right)+S^*(r,f),$$

若对于集合 $S=\{z:z^6+z^5+1=0\}$，有 $E_f(S)=E_g(S)$，则有 $f(z)\equiv g(z)$。

定理 2 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为开平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，且满足

$$\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)\le\lambda\big(T(r,f)+T(r,g)\big)+S^*(r,f)+S^*(r,g)\ \ (\text{其中 }\lambda<\frac{1}{4}),$$

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\le m\left(r,\frac{1}{f}\right)+S^*(r,f),\quad \bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\le m\left(r,\frac{1}{g}\right)+S^*(r,g),$$

若对于集合 $S=\{z:z^5+z^4+1=0\}$，有 $E_f(S)=E_g(S)$，则有 $f(z)\equiv g(z)$。

2. 几个引理

引理 1 [15] 设 f 为开平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，$Q(f)=f^p+a_1f^{p-1}+\cdots+a_p$ 为 f 的 p 次多项式，则

$$T(r,Q(f))=pT(r,f)+S^*(r,f).$$

引理 2 [2] f 和 g 为开平面 $\mathbb{C}$ 上的两个非常数亚纯函数，且以 1 为其 CM 分担值。若

$$N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+N_2(r,f)+N_2(r,g)<\big(\mu+o(1)\big)T(r)(r\in I),$$

其中 $\mu<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，$I$ 为 r 在 $(0,\infty)$ 上一个具有无穷线性测度的集合，则 $f\equiv g$ 或 $f\cdot g\equiv 1$。

引理 3 [2] 设 f 为开平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，$R(f)=\dfrac{P(f)}{Q(f)}$，其中 $P(f)=\sum_{k=0}^{p}a_kf^k$ 和 $Q(f)=\sum_{j=0}^{q}b_jf^j$ 是关于 f 的两个多项式，且 $P(f)$ 与 $Q(f)$ 互质，系数 $\{a_k(z)\}$ 和 $\{b_j(z)\}$ 均为 f 的小函数，且 $a_p(z)\not\equiv 0$，$b_q(z)\not\equiv 0$。则

$$T(r,R(f))=\max\{p,q\}T(r,f)+S^*(r,f).$$

3. 定理 1 的证明

令

$$F(z)=-f^5(z)(f(z)+1),\ G(z)=-g^5(z)(g(z)+1). \tag{1}$$

则 $F(z)$ 与 $G(z)$ 也为开平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，且以 1 为 CM 分担值。于是由引理 1、定理条件及(1)式可得：

$$T(r,F)=6T(r,f)+S^*(r,f), \tag{2}$$

$$T(r,G)=6T(r,g)+S^*(r,g), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)&\le 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f+1}\right)\\&\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f+1}\right)+S^*(r,f),\\&\le 2T(r,f)+O(1)\end{aligned} \tag{4}$$

$$N_2(r,F)=2\bar{N}(r,f), \tag{5}$$

$$N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)\le 2\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g+1}\right)\le 3T(r,g)+O(1), \tag{6}$$

$$N_2(r,G)=2\bar{N}(r,g). \tag{7}$$

由(2)~(7)诸式得：

$$\begin{aligned}&N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+N_2(r,F)+N_2(r,G)\\&\le 2T(r,f)+3T(r,g)+2\lambda(T(r,f)+T(r,g))+S^*(r,f)+S^*(r,g)\\&\le(2+2\lambda)T(r,f)+(3+2\lambda)T(r,g)+S^*(r,f)+S^*(r,g)\\&=\frac{(2+2\lambda)}{6}T(r,F)+\frac{(3+2\lambda)}{6}T(r,G)+S^*(r,F)+S^*(r,G)\\&\le\left(\frac{5+4\lambda}{6}+o(1)\right)T(r)(r\notin E)\end{aligned}, \tag{8}$$

其中 $T(r)=\max\{T(r,F),T(r,G)\}$。由于 $\lambda<\dfrac{1}{4}$，所以 $\dfrac{5+4\lambda}{6}<1$。于是由(8)式和引理 2 得 $F\cdot G\equiv 1$ 或 $F\equiv G$

若 $F\cdot G\equiv 1$，则有

$$f^5g^5(f+1)(g+1)\equiv 1. \tag{9}$$

由(9)式可知f的零点必为g的极点，$f+1$的零点也必为g的极点。设z_0为f的p重零点为g的q重极点，结合(9)式有

$$5p=6q, \tag{10}$$

注意到5和6互质，故由(10)式知6是p的因子，从而$p\geq 6$，于是

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq\frac{1}{p}N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq\frac{1}{6}N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq\frac{1}{6}T(r,f)+O(1), \tag{11}$$

设z_1为$f+1$的零点，则由(9)式知z_1至少为$f+1$的6重零点，从而有

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f+1}\right)\leq\frac{1}{6}N\left(r,\frac{1}{f+1}\right)\leq\frac{1}{6}T(r,f)+O(1), \tag{12}$$

同理可得：

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\leq\frac{1}{p}N\left(r,\frac{1}{g}\right)\leq\frac{1}{6}N\left(r,\frac{1}{g}\right)\leq\frac{1}{6}T(r,g)+O(1), \tag{13}$$

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{g+1}\right)\leq\frac{1}{6}N\left(r,\frac{1}{g+1}\right)\leq\frac{1}{6}T(r,g)+O(1), \tag{14}$$

再由Nevanlinna第二基本定理、(11)~(14)诸式及定理条件得：

$$\begin{aligned}
T(r,f)+T(r,g)&<\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f+1}\right)\\
&\quad+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g+1}\right)+S^*(r,f)+S^*(r,g)\\
&\leq\lambda\big(T(r,f)+T(r,g)\big)+\frac{1}{3}\big(T(r,f)+T(r,g)\big)+S^*(r,f)+S^*(r,g),\\
&=\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)\big(T(r,f)+T(r,g)\big)+S^*(r,f)+S^*(r,g)\\
&<\frac{7}{12}\big(T(r,f)+T(r,g)\big)+S^*(r,f)+S^*(r,g)
\end{aligned}$$

这是一个矛盾。

若$F\equiv G$，则有

$$f^6+f^5=g^6+g^5, \tag{15}$$

令$h=\dfrac{f}{g}$，则(15)式可变形为

$$\left(h^6-1\right)g+\left(h^5-1\right)\equiv 0, \tag{16}$$

如果$h\equiv const\neq 1$，则$g\equiv const$，这与g为非常数亚纯函数矛盾。从而$h\equiv 1$，即$f\equiv g$。

若h不为常数函数，则由(16)式得：

$$g\equiv-\frac{h^5-1}{h^6-1}=-\frac{(h-u)\left(h-u^2\right)\left(h-u^3\right)\left(h-u^4\right)}{(h-v)\left(h-v^2\right)\left(h-v^3\right)\left(h-v^4\right)\left(h-v^5\right)}, \tag{17}$$

同理可得：

$$f \equiv -\frac{\frac{1}{h^5}-1}{\frac{1}{h^6}-1} = -\frac{\left(\frac{1}{h}-u\right)\left(\frac{1}{h}-u^2\right)\left(\frac{1}{h}-u^3\right)\left(\frac{1}{h}-u^4\right)}{\left(\frac{1}{h}-v\right)\left(\frac{1}{h}-v^2\right)\left(\frac{1}{h}-v^3\right)\left(\frac{1}{h}-v^4\right)\left(\frac{1}{h}-v^5\right)}, \tag{18}$$

其中(17)、(18)式中 $u=\exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right), v=\exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right)$。由(17)、(18)式和引理 3 可得：

$$T(r,g)=5T(r,h)+S^*(r,h), \tag{19}$$

$$\bar{N}(r,g)=\sum_{j=1}^{5}\bar{N}\left(r,\frac{1}{h-v^j}\right), \tag{20}$$

$$T(r,f)=5T\left(r,\frac{1}{h}\right)+S^*(r,h)=5T(r,h)+S^*(r,h), \tag{21}$$

$$\bar{N}(r,f)=\sum_{j=1}^{5}\bar{N}\left(r,\frac{1}{\frac{1}{h}-v^j}\right), \tag{22}$$

由 Nevanlinna 第二基本定理结合(19)~(22)式得：

$$3T(r,h)<\sum_{j=1}^{5}\bar{N}\left(r,\frac{1}{h-v^j}\right)+S^*(r,h)=\bar{N}(r,g)+S^*(r,h), \tag{23}$$

$$3T\left(r,\frac{1}{h}\right)<\sum_{j=1}^{5}\bar{N}\left(r,\frac{1}{\frac{1}{h}-v^j}\right)+S^*(r,h)=\bar{N}(r,f)+S^*(r,h), \tag{24}$$

又由 Nevanlinna 第一基本定理得：

$$T\left(r,\frac{1}{h}\right)=T(r,h)+O(1), \tag{25}$$

于是由(23)~(25)式及定理条件得：

$$\begin{aligned} 6T(r,h) &< \bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)+S^*(r,h) \\ &\le \lambda\left(T(r,f)+T(r,g)\right)+S^*(r,h) \\ &< 10\lambda T(r,h)+S^*(r,h)<\frac{5}{2}T(r,h)+S^*(r,h) \end{aligned},$$

这是一个矛盾。

故综上所述，可得 $f(z)\equiv g(z)$。定理 1 证毕。

定理 2 的证明类似定理 1。

参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[3] Gross, F. and Yang, C.C. (1982) On Preimage and Range Sets of Meromorphic Functions. *Proceedings of the Japan*

Academy, *Ser. A*, *Mathematical Sciences*, **58**, 17-20. https://doi.org/10.3792/pjaa.58.17

[4] Gross, F. (1977) Factorization of Meromorphic Function and Some Open Problems. In: *Complex Analysis*, Lecture Notes in Math, Vol. 599, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 51-69. https://doi.org/10.1007/BFb0096825

[5] Yi, H.X. (1995) On a Question of Gross. *Science in China* (*Ser A*), **38**, 8-16.

[6] Yi, H.X. (1995) A Question of Gross and the Uniqueness of Entire Functions. *Nagoya Mathematical Journal*, **138**, 169-177. https://doi.org/10.1017/S0027763000005225

[7] 仪洪勋. 关于亚纯函数的精简唯一性象集[J]. 山东大学学报(自然科学版), 1998, 33(4): 361-369.

[8] Fang, M.L. and Hua, X.H. (1998) Meromorpic Functions That Share One Finite Set CM. *Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly*, **15**, 16-22.

[9] 杨力. 一类整函数的唯一性象集[J]. 纺织高校基础科学学报, 2000, 13(3): 198-201.

[10] 王新利. 具有一个 CM 公共值集的亚纯函数[J]. 山东大学学报, 2001, 36(1): 5-10.

[11] Xu, Y. (2003) Meromorphic Functions Sharing One Finite Set. *Computers and Mathematics with Applications*, **45**, 1489-1495. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)00132-9

[12] 段曦盛. 亚纯函数的几个唯一性定[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2004.

[13] 白小甜. 关于亚纯函数分担公共值集的一些结果[D]: [博士学位论文]. 济南: 山东大学, 2011.

[14] 熊坚. 关于亚纯函数的分担值集与唯一性[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2008.

[15] Yi, H.X. (1994) Unicity Theorems for Entire Functions. *Kodai Mathematical Journal*, **17**, 133-141. https://doi.org/10.2996/kmj/1138039903