**Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(11), 1007-1014**
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011119

# 预条件下 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性

**黄江玲**

陕西师范大学，数学与信息科学学院，陕西 西安
Email: 1739124141qq.com

收稿日期：2020年10月13日；录用日期：2020年11月4日；发布日期：2020年11月11日

## 摘 要

假设在线性方程组$Ax = b$ 的系数矩阵$A$ 是非奇异$M$-阵，通过比较预条件下Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵的谱半径与经典Gauss-Seidel迭代法的迭代矩阵谱半径大小，得到了预条件下Gauss-Seidel 迭代法的收敛速度要快于经典的Gauss-Seidel 迭代法的收敛速度，从而得出该预条件处理的有效性，最后用一个数值算例验证了该结论。

## 关键词

非奇异M矩阵，Gauss-Seidel迭代法，谱半径，预条件，收敛性

# Convergence of Preconditioned Gauss-Seidel Iterative Method

**Jiangling Huang**

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi
Email: 1739124141qq.com

Received: Oct. 13$^{th}$, 2020; accepted: Nov. 4$^{th}$, 2020; published: Nov. 11$^{th}$, 2020

## Abstract

**Assuming under the condition that the coefficient matrix $A$ in linear equations $Ax = b$**

文章引用: 黄江玲. 预条件下 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性[J]. 理论数学, 2020, 10(11): 1007-1014.
DOI: 10.12677/pm.2020.1011119

**is an nonsingular $M$-matrix, by comparing the spectral radius of the iterative matrix of the Gauss-Seidel iterative method under preconditions with the spectral radius of the iterative matrix of the classical Gauss-Seidel iterative method, it is obtained that the convergence speed of the Gauss-Seidel iterative method under preconditions is faster than that of the classical Gauss-Seidel iterative method, and the effectiveness of the preconditioning is obtained. Finally, a numerical example is used to verify the conclusion.**

## Keywords

**Non-Singular M Matrix, Gauss-Seidel Iterative Method, Spectral Radius, Preconditioned, Convergence**



## 1. 引言

实际生活中的很多问题最后往往会与求解线性方程组对应起来,譬如交通中的网络流问题,最小二乘法曲线拟合问题,最优化问题,最后往往是一个大型稀疏线性方程组的求解问题.然而迭代法是求解大型稀疏的一种重要方法,迭代法的研究一直都是国内外的热点问题之一,在实际应用中具有非常重要的意义 [1] [2]. 因此,考虑线性方程组

$$Ax = b. \tag{1}$$

为了方便,假设线性方程组的系数矩阵

$$A = I - L - U, \tag{2}$$

其中 $A$ 是 $n$ 阶非奇异矩阵, $I$ 是 $n$ 阶单位矩阵, $-U$ 是 $A$ 的严格上三角矩阵, $-L$ 是 $A$ 的严格下三角矩阵.在文 [3]中，求解线性方程组(1)的古典 Gauss-Seidel迭代矩阵为

$$G = (I - L)^{-1}U = M^{-1}N. \tag{3}$$

其中$M = I - L, N = U$. 为了加速迭代法的收敛性,常常考虑预处理方法 [4],预条件方法是通过寻找

一个有效的非奇异矩阵 $P$, 将 $Ax = b$ 表示为如下形式

$$PAx = Pb. \tag{4}$$

对此,近年来很多的学者针对不同的迭代方法提出了不同的预条件 [5] [6] [7] [8] [9].文 [10] [11] [12] [13]讨论了预条件下 Gauss-Seidel迭代法的收敛性,本文假设线性方程组的系数矩阵为非奇异 $M-$矩阵. 本文考虑预条件 $P = I + S_{\alpha,\beta}$,并在此预条件下讨论 Gauss-Seidel迭代法的收敛性,其中 $S_{\alpha,\beta}$矩阵形式如下

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1(a_{12}+\beta_1) & -\alpha_2(a_{13}+\beta_2) & \cdots & -\alpha_{n-1}(a_{1n}+\beta_{n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

那么在预条件 $P = I + S_{\alpha,\beta}$,的作用下,

$$A_s = (I + S_{\alpha,\beta})A = (I - E_s) - L - (U - S_{\alpha,\beta} + F_s) = D_s - L_s - U_s = M_s - N_s$$

其中: $E_s$,$F_s$分别为$S_{\alpha,\beta}(L + U)$的主对角矩阵以及严格上三角矩阵.$D_s = (I - E_s), L_s = L, U_s = (U - S_{\alpha,\beta} + F_s)$分别为预条件后$A_s$的主对角矩阵,严格下三角矩阵以及严格上三角矩阵.

那么预条件后系数矩阵 $A_s$所对应的 Gauss-Seidel迭代法的迭代矩阵为

$$G_s = M_s^{-1} N_s. \tag{4}$$

其中$M_s = (D_s - L_s), N_s = U_s$.

## 2. 基本定义及引理

**定义** 1 [14] 若 $A \in R^{n,n}$, $A$ 可表示为 $A = sI - B$, $I$ 为 $n$ 阶单位阵, $B \geq 0$, 当 $s \geq \rho(B)$ 时, 称 $A$ 为 $M-$阵. 特别当 $s > \rho(B)$ 时, 称 $A$ 为非奇异 $M-$阵. 当 $s = \rho(B)$ 时, 称 $A$ 为奇异 $M-$阵.

**定义** 2 [8] 若 $A \in Z^{n,n}$, $A$ 可逆且 $A^{-1} \geq 0$, 则称 $A$ 为非奇异 $M-$阵.

**定义** 3 [8] 设 $A$ 为实方阵, 若 $M$ 为非奇异矩阵, 则称 $A = M - N$ 是 $A$ 的一个分裂, 若 $\rho(M^{-1}N) < 1$,则称分裂 $A = M - N$是收敛的.如果

(1) M 分裂, 如果 $M$ 是非奇异 M 矩阵且 $N \geq 0$;

(2) 正规分裂, 如果 $M^{-1} \geq 0$ 且 $N \geq 0$;

(3) 弱正规分裂, 如果 $M^{-1}\geq 0$ 且 $M^{-1}N\geq 0$.

**引理** 1 [14] 若 $A$ 为非负不可约方阵, 则

(1) 谱半径 $\rho(A)$为 $A$的非负特征值;

(2) $A$ 有与其谱半径 $\rho(A)$ 相对应的非负特征向量;

(3) $A$ 的任一元素增加时, $\rho(A)$ 不减.

**引理** 2 [8] $A=M-N$是$A$的弱正规分裂或者正规分裂,则 $\rho(M^{-1})<1$的充要条件是$A^{-1}\geq 0$.

**引理** 3 [8] 设$\lambda\in(0,1]$,且$z\in(-\infty,0)$,$Q\in(\frac{\lambda-yz}{y},-z)\cap(0,-z)$,那么集合 $Q$非空.

**引理** 4 [10] 设 $A=M_1-N_1=M_2-N_2$是 $A$的两个弱正规分裂,如果 $A^{-1}\geq 0$,且下列条件成立之一:

(1) $N_1\leq N_2$; (2) $M_1^{-1}\geq M_2^{-1}$,$N_1\geq 0$; (3) $M_1^{-1}\geq M_2^{-1}$,$N_2\geq 0$;
则有 $\rho(M_1^{-1}N_1)\leq\rho(M_2^{-1}N_2)$.

## 3. 结果与证明

**定理** 假设线性方程组的系数矩阵 $A$ 是非奇异的 $M$阵, 满足当$0<a_{k+1,1}a_{1,k+1}$, $\beta_k\in(\frac{1-a_{1,k+1}a_{k+1,1}}{a_{k+1,1}},-a_{1,k+1})\cap(0,-a_{1,k+1})$, $\alpha_k\in(0,1]$, $\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\leq 1$, $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 时, 则有$G,G_s$都非负.且 $\rho(M_s^{-1}N_s)\leq\rho(M^{-1}N)<1$. 其中 $M_s^{-1}N_s, M^{-1}N$分别由 (3)与 (4)给出. $\rho(M_s^{-1}N_s),\rho(M^{-1}N)$分别是系数矩阵 $A,A_s$相对的 Gauss-Seidel迭代法的迭代矩阵的谱半径.

**证明** 由 $A$ 是非奇异的 $M$阵以及 (3)式有

$$M^{-1}=(I-L)^{-1}=[1+L+L^2+\cdots+L^{n-1}]\geq 0, N=U\geq 0$$

$G=M^{-1}N\geq 0$. 得$G$是非负矩阵,根据定义 3,$A=M-N$为$A$的正规分裂. 现证 $D_s\geq 0$,$L_s\geq 0$,$F_s\geq 0$ 以及$E_s\geq 0$. 因为预条件后系数矩阵$A_s$为

$$A_s=\begin{pmatrix} 1-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k a_{k+1,1}(a_{1,k+1}+\beta_k) & \cdots & a_{1n}-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k a_{k+1,n}(a_{1,k+1}+\beta_k) \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

令$D_s=diag(A_s)=diag(d_1,1,\cdots,1)$,$E_s=diag(S_{\alpha,\beta}(L+U))=diag(e_1,0,\cdots,0)$,
其中$d_1=1-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k a_{k+1,1}(a_{1,k+1}+\beta_k)$, $e_1=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k a_{k+1,1}(a_{1,k+1}+\beta_k)$, 由条件$0<a_{k+1,1}a_{1,k+1}$, $\beta_k\in(\frac{1-a_{1,k+1}a_{k+1,1}}{a_{k+1,1}},-a_{1,k+1})\cap(0,-a_{1,k+1})$, $\alpha_k\in(0,1]$, $\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\leq 1$, $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$,可知

$$d_1 = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k+1,1}(a_{1,k+1} + \beta_k) > 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k+1,1}(a_{1,k+1} + \frac{1 - a_{1,k+1}a_{k+1,1}}{a_{k+1,1}})$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k a_{k+1,1}a_{1,k+1} + \alpha_k - \alpha_k a_{k+1,1}a_{1,k+1})$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$$
$$\geq 0$$

$$e_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k+1,1}(a_{1,k+1} + \beta_k) > \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k+1,1}(a_{1,k+1} + \frac{1 - a_{1,k+1}a_{k+1,1}}{a_{k+1,1}})$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k a_{k+1,1}a_{1,k+1} + \alpha_k - \alpha_k a_{k+1,1}a_{1,k+1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k$$
$$> 0$$

所以 $D_s \geq 0$,$E_s > 0$.又

$$L_s = L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.U_s = \begin{pmatrix} 0 & u_{12} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中

$$u_{1j} = -a_{1j} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k+1,j}(a_{1,k+} + \beta_k) > -a_{1j} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_{k+1,j}(a_{1,k+1} - a_{1,k+1}) \quad = -a_{1j} \geq 0$$

$(j = 2, 3, \cdots, n)$,所以$L_s \geq 0$,$F_s \geq 0$,$U_s = (U - S_{\alpha,\beta} + F_s) \geq 0$,由(4)知

$$G_s = (D_s - L_s)^{-1}U_s = [I + D_S^{-1}L_s + (D_s^{-1}L_s)^2 + \cdots]D_s^{-1}U_s \geq 0.$$

因此$G$和$G_s$都是非负矩阵.

因为

$$A_s = (I + S_{\alpha,\beta})A = (I - E_s) - L - (U - S_{\alpha,\beta} + F_s) = D_s - L_s - U_s = M_s - N_s$$

以及上面的证明可知

$$(I-E_s)^{-1}=(I+E_s+\cdots)\geq I, L\geq 0$$

则有

$$M_s^{-1}=[(I-E_s)-L]^{-1}=[(I-(I-E_s)^{-1}L]^{-1}(I-E_s)^{-1}\geq(I+L+L^2+\cdots)=(I-L)^{-1}=M^{-1}\geq 0.$$

$$N_s=(U-S_{\alpha,\beta}+F_s)\geq 0$$

令$M_1=(I+S_{\alpha,\beta})^{-1}M_s$,$N_1=(I+S_{\alpha,\beta})^{-1}N_s$,那么

$$A=(I+S_{\alpha,\beta})^{-1}A_s=(I+S_{\alpha,\beta})^{-1}M_s-(I+S_{\alpha,\beta})^{-1}N_s=M_1-N_1$$

而$M_1^{-1}=M_s^{-1}(I+S_{\alpha,\beta})$.所以

$$M_1^{-1}N_1=M_s^{-1}(I+S_{\alpha,\beta})(I+S_{\alpha,\beta})^{-1}N_s=M_s^{-1}N_s\geq 0.$$

因此,根据定义 3,$A=M-N=M_1-N_1$均为$A$的弱正规分裂.

现考虑,

$$M_1^{-1}-M^{-1}=M_s^{-1}(I+S_{\alpha,\beta})-M^{-1}\geq M^{-1}(I+S_{\alpha,\beta})-M^{-1}=M^{-1}S_{\alpha,\beta}\geq 0$$

所以,

$$M_1^{-1}\geq M^{-1}, N\geq 0$$

由引理 4,可知

$$\rho(M_1^{-1}N_1)\leq\rho(M^{-1}N)$$

又因为$A$为非奇异$M-$矩阵,因此根据引理2

$$A^{-1}\geq 0, \rho(M^{-1}N)<1$$

综上,

$$\rho(M_s^{-1}N_s)\leq\rho(M^{-1}N)<1$$

## 4. 数值例子

**例 1** 设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&-0.1&-0.4&-0.3\\0&1&-0.3&-0.1\\-0.3&-0.1&1&-0.2\\-0.3&-0.3&-0.1&1\end{pmatrix}.$$

显然 • $A$是非奇异$M-$矩阵,通过 $MATLAB$计算可得,当参数 $\alpha_k = \beta_k = 0$, $(k = 1,2,3)$ 时,$\rho(G) = 0.4396$. 那么在预条件件 $P = I + S_{\alpha,\beta}$的作用下,当 $\alpha_1 = 0.95, \alpha_2 = 0.005, \alpha_3 = 0.005, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.01$ 时,$\rho(G_1) = 0.4235$,可以看出预条件下 Gauss-Seidel迭代法的迭代矩阵的谱半径小于经典的 Gauss-Seidel迭代法的迭代矩阵的谱半径,从而说明了该预条件的有效性.当参数$\alpha, \beta$取值不同时，谱半径也不同.

## 5. 结论

从数值算例可知, 当线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 $A$ 是非奇异$M-$阵时, 预条件方法可以改善 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性,当参数$\alpha, \beta$取值不同时，谱半径大小也不同,因此如何选择最优参数,有待进一步研究.

## 参考文献


[1] 陈国良, 安虹, 陈俊. 并行算法实践[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[2] James, K.R. and Riha, W. (1995) Convergence Criteria for Successive over Relaxation. *SANM Journal on Numerical Analysis*, **12**, 13-145.

[3] 徐树方, 高立, 张平文. 数值线性代数[M]. 第二版. 北京: 北京大学出版社, 2013.

[4] Hiiroshi, N.K., Kunenori, H., Munenori, M., *et al.* (2004) The Survey of Pre-Conditioners Used for Accelerating the Rate of Convergence in the Gauss-Seidel Method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **165**, 587-600.
https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.11.012

[5] 雷刚, 王慧勤, 畅大为. 预条件下2PPJ型方法收敛性的加速[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2006, 30(1): 35-37.

[6] 尤晓琳. 预条件 $I + S$的 SSOR迭代法及比较定理[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2019, 28(3): 1-3.

[7] 蔡静. 一类预处理 Jacobi迭代法及其收敛性分析[J]. 湖州师范学院学报, 2019, 41(8): 122-126.

[8] Behzadi, R. (2019) A New Class AOR Preconditioner for L-Matrices. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **39**, 101-110.

[9] Dehghan, M. and Hajarian, M. (2014) Modied AOR Iterative Methods to Solve Linear Systems. *Journal of Vibration and Control*, **20**, 661-669.
https://doi.org/10.1177/1077546312466562

[10] 庄伟芬, 卢琳璋. $(I + Smax)$预条件 Gauss-Seidel迭代法的进一步探索[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2004, 43(z1): 349-352.

[11] 高树玲, 曾京玲. 一类新的预条件 Gauss-Seidel 迭代法[J]. 周口师范学院学报, 2012, 29(2): 9-12.

[12] 吴梅君, 杨晨. 一类新的预条件 Gauss-Seidel迭代法[J]. 高师理科学刊, 2018, 38(12): 17-18.

[13] 许云霞, 雷学红, 李耀堂. H-矩阵的一个新的预条件 Gauss-Seidel迭代方法(英文) [J]. 昆明学院学报, 2008, 30(4): 3-7.

[14] Li, W. and Sun, W.W. (2000) Modified Guass-Seidel Type Methods and Jacobi Type Methods for Z-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **317**, 227-240. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00140-3