Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 851-864
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115098

Hans汉斯

求数列极限的若干方法

柯至泰，陈敏风*

广东外语外贸大学数学与统计学院，广东 广州
Email: 724364850@qq.com, *chenminfeng198710@126.com

收稿日期：2021年4月15日；录用日期：2021年5月18日；发布日期：2021年5月25日

摘 要

极限是微积分学中的一个重要的基本概念。微分、积分和级数等等都是建立在极限概念基础之上。数列极限是极限理论的重要组成部分。本文通过对求解数列极限各种题型的方法总结和探讨，为以后学习其他数学知识打下了坚实的基础。

关键词

极限理论，数列极限，数列问题，微积分

Some Methods of Solving the Sequence Limit

Zhitai Ke, Minfeng Chen*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong
Email: 724364850@qq.com, *chenminfeng198710@126.com

Received: Apr. 15th, 2021; accepted: May 18th, 2021; published: May 25th, 2021

Abstract

Limit is an important basic concept in calculus. Differential, integral, series and so on are all based on the concept of limit. Sequence limit is an important part of the limit theory. This paper summarizes and discusses the methods of solving the limit of sequence, which lays a solid foundation for learning other mathematical knowledge in the future.

Keywords

The Limit Theory, Sequence Limit, Sequence Problem, Calculus

*通讯作者。

文章引用: 柯至泰, 陈敏风. 求数列极限的若干方法[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 851-864.
DOI: 10.12677/pm.2021.115098

1. 求数列极限方法举例

1.1. 根据数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义证明极限

例 1.1：证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2-2}=2$。

解：由于

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-2}-2\right|=\frac{4}{n^2-2}\le\frac{4}{n}\ (n\ge 2). \tag{1}$$

因此，对任给的 $\varepsilon>0$，只要 $\dfrac{4}{n}<\varepsilon$，便有

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-2}-2\right|<\varepsilon, \tag{2}$$

即当 $n>\dfrac{4}{\varepsilon}$ 时，(2)式成立。又由于(1)式是在 $n\ge 2$ 的条件下成立的，取

$$N=\max\left\{2,\frac{4}{\varepsilon}\right\}.$$

由数列极限的定义可知，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{2,\dfrac{4}{\varepsilon}\right\}$。据分析，当 $n>N$ 时有(2)式成立，于是本题得证。

注：通过解答本题，除了对定义灵活运用之外，还可以发现一个解题技巧——适当地**放缩**，更准确的说法是对 $|a_n-a|$ 进行适当的放大。一般而言，对于数列 $\{a_n\}$，在解不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 时，若难以解出 $n>f(\varepsilon)$，这时就需要对 $|a_n-a|$ 适当放大，使对 $|a_n-a|<g(n)$，然后再解不等式 $g(n)<\varepsilon$，由**不等式关系**的传递性易得 $|a_n-a|<\varepsilon$，从而达成目标，这便是放缩法在求数列极限中的具体应用。

关于应用数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义解决问题需要注意的问题

1) ε 的任意性

正数 ε 的作用在于衡量数列通项 a_n 与定数 a 的接近程度，ε 愈小，$|a_n-a|<\varepsilon$，由绝对值的意义可知，a_n 与 a 的距离足够小。而正数 ε 任意地小，说明 a_n 无限逼近极限 a。由于 ε 具有任意性，我们往往可以限定其小于另一个正数来暂时确定它(如 $\varepsilon<1$)，而它一旦被确定下来之后，就假定为不变的，以便依靠它去寻找 N，这也是诸多题目里使用 $k\varepsilon(k>0)$、$\varepsilon^k(k>0)$ 来替代 $|a_n-a|<\varepsilon$ 中的 ε 原因。

2) N 的依赖性(相应性)

N 往往是在 ε 确定之后才给出的。一般来说，随 ε 变小而变大，表示 ε 越小，a_n 与定数 a 无限接近，反映所对应的 n 无限增大，亦即 N 也越大。故经常将 N 写作 $N(\varepsilon)$。

3) N 的不唯一性

对 N 强调 N 由 ε 确定，即对任给的 ε，一定存在 $N>0$，即 N 的存在性。但 N 不唯一，即并不意味着 N 是由 ε 所唯一确定的，例如：取 $N=1000$ 时，欲使当 $n>N=1000$ 时满足 $|a_n-a|<\varepsilon$，则须有当 $N=1001$

或更大时，也必有$|a_n - a| < \varepsilon$成立，这里的N并不一定是正整数，只要是正实数即可。对此，只要通过$\varepsilon > 0$找到一个使不等式满足的N即可，即确定其存在性即可，不必求出最小的N。

1.2. 根据数列收敛性质去证明数列极限

1) 性质1 (迫敛性)

设收敛数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都以a为极限，数列$\{a_n\}$满足：存在正数N_0，当$n > N_0$时有

$$a_n \le c_n \le b_n,$$

则数列$\{c_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$。

例1.2 ([1] p. 31)：求数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的极限。

解：记$a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + h_n$，这里$h_n > 0\ (n > 1)$，则有

$$n = (1+h_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 .$$

由上式得$0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}\ (n > 1)$，从而有

$$1 \le a_n = 1 + h_n \le 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1$。故由迫敛性得：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。

注：对于应用**迫敛性**求数列极限的题目，往往需要熟练掌握常用不等式(如**均值不等式)**以及构造并解不等式的知识。与之类似的还有如下的例题：

例1.3：求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$。

解：记$a_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$，当$x > 1$时，显然有$\sqrt{x} < x$，故

$$1 < a_n < 1 + \frac{1}{n}.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$。故由迫敛性可得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$。

运用迫敛性不仅可以解决上述类型的题目，还可以用于求解求和形式的数列极限。

例1.4 [2]：求极限$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi}\right)$。

解：由于

$$\frac{n}{n^2+n\pi} \le \frac{n}{n^2+k\pi} \le \frac{n}{n^2+\pi},\ (k = 1, 2, \cdots, n),$$

故

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi} \le \frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi} \le \frac{n^2}{n^2+\pi},$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}} = 1$。

故由迫敛性可得 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$。

注：在运用迫敛性求和式极限时，通常对其通项放缩或者逐项放缩，进而对和式放缩，具体而言是对分母进行适当的放缩。此外，迫敛性还经常用于求含根式的数列极限。

例 1.5：设 $a_i \ge 0, \left(i=1,2,\cdots,k\right)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$。

解令 M 表示 $a_i \ge 0\ \left(i=1,2,\cdots,k\right)$ 中最大的数，即

$$M=\max\left\{a_1,a_2,\cdots,a_k\right\},$$

则

$$M=\sqrt[n]{M^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\le\sqrt[n]{kM^n}=\sqrt[n]{k}M,$$

利用例 1.2 的结论易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$。

由迫敛性可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=M$。

记忆此题的结论可以非常快速的解决含有如上“复杂形式”的数列极限求和的题目。

例 1.6：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$。

解此处如果利用例 1.5 的结论可以非常容易地知道 1 为所有项中的最大项的值，立即可以得出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}=1$。

或者利用常规放缩法 $1<\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}<\sqrt[n]{n}$ 并结合例题 1.2 的结论也可以得到同样的结果。

2) 性质 2 (四则运算法则)

若数列 $\left\{a_n\right\}$ 与 $\left\{b_n\right\}$ 为收敛数列，则 $\left\{a_n+b_n\right\}$，$\left\{a_n-b_n\right\}$，$\left\{a_n\cdot b_n\right\}$ 也都是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

若再假设 $b_n\ne 0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ne 0$，则 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 也是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

例 1.7：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$。

解原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sin n$。又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，即 $\dfrac{1}{n}$ 为无穷小量，且 $\left|\sin n\right|\le 1\ \left(n\to\infty\right)$，$\sin n$ 为有界量。

故原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sin n=0$。

注：本题在四则运算法则的基础上运用了无穷小乘以有界量依然为无穷小的结论，最终的结果为 0。

例 1.8：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$。

解原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0$。

注：本题在四则运算法则的基础上，观察式子，定型为$\infty-\infty$型未定式，采用**分子有理化**对根式进行化简，使得最终的极限形式一目了然。

例 1.9 [3]：求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$。

解原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}{(3)^{n+1}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}$。

又由于

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,\ |q|<1.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}{(3)^{n+1}\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}=\frac{1}{3}\text{。(本题属于}\frac{\infty}{\infty}\text{的未定式)}$$

例 1.10：设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^k-(n-1)^k}$存在且不为零，求常数$k$。

解原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^k-(n-1)^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^k\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right]}=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99-k}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k-1}=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99-k}}{k\left(-\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{n\to\infty}n^{99-k+1}$。

由此可知，极限存在且不为零的充要条件是$99-k+1=0$，解得$k=100$。

注：这两题有异曲同工之妙，例 1.9 与例 1.10 都是用同样的方法对要求极限的分式进行**提取最大项**处理，以让极限“露出真面目”，即可以通过特殊结论的方法或者**泰勒公式**等价无穷小的方法化简等式求得最终结果。不同之处在于例 1.9 运用了$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$|q|<1$，而例 1.10 则应用$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (x\to 0)$。

例 1.11：求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$。

解$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$,

故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

注：本题从数列极限的形式入手，观察数列的每一项，可得出通项$\dfrac{1}{n(n+1)}$，发现可以拆分为$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，每一项尽可拆分为两项相减，并前后相消，最后留下首项及末项。此方法为**裂项相消法**，是基于对需要求极限的数列本身形式进行恒等变形处理的一种解题手段。

例 1.12：求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$。

解记 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，

$$\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

两式相减并乘以 2 得到

$$x_n=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n},$$

故 $\lim_{n\to\infty}x_n=3$。

注：本题与例 1.11 类似，都是基于对需要求极限的数列本身进行恒等变形处理，目的是为了求出数列的简化形式，便于求极限。而不同之处在于本题数列的形式是各项分母构成等比数列，分子构成等差数列，为等差/等比的形式，这种形式的解题方式一般为整个式子乘以 1/公比，再与原式相减或相加，再乘以系数的反比，最终得到化简形式后的式子易求极限，此方法称为**错位相减法**。

例 1.13 ([4] p. 26)：求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$。

解 $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=e^{\ln\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}=e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n!}}=e^{\frac{1}{n}(\ln 1-\ln n!)}=e^{\frac{1}{n}(-\ln n!)}=e^{-\frac{1}{n}\ln n!}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{\ln n!}{n}}$，

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n}=+\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\left(\frac{1}{e}\right)^{+\infty}=0.$$

求证该数列极限为 0 时可以采用极限的保号性定理以及推论进行证明。

注：本题处理的式子不同于例 1.11 与例 1.12 的求和形式的极限，只需对其本身进行处理即可。形如例 1.13 的 $u(n)^{v(n)}$ 幂指函数求极限，通常采用**取对数**的方法进行恒等变形，即 $\lim_{n\to\infty}u(n)^{v(n)}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln u(n)^{v(n)}}=e^{\lim_{n\to\infty}v(n)\ln u(n)}$，这样处理大大简化了复杂的式子。

另外，对于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n}$ 的处理，可以采用柯西命题。

补充柯西命题:若数列 $\{x_n\},(n=1,2,\cdots)$ 收敛，则算术平均值数列

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ (n=1,2,\cdots)\text{ 也收敛},$$

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n$。

所以，本题中 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln n=\infty$。

3) 单调有界定理：在实数系中，有界的单调数列必有极限。

例 1.14 ([5] p. 419)：设 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，$n=(1,2,\cdots)$，$x_1=\sqrt{2}$，证明 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求 $\lim_{n\to\infty}x_n$。

解由于

$$x_1=\sqrt{2}<2,\ x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2,$$

不妨设 $x_k<2$，则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，从而对一切正整数 n，都有 $0<x_n<2$，即数列 $\{x_n\}$ 有上界，且有下界。

DOI: 10.12677/pm.2021.115098

又

$$x_n - x_{n-1} = \sqrt{2+x_{n-1}} - x_{n-1} = \frac{2+x_{n-1}-x_{n-1}^2}{\sqrt{2+x_{n-1}}+x_{n-1}},$$

上式的分母 >0，分子

$$2+x_{n-1}-x_{n-1}^2 > 2+x_{n-1}-2x_{n-1} = 2-x_{n-1} > 0,$$

故 $x_n - x_{n-1} > 0$，即数列 $\{x_n\}$ 为单调递增且有上界的数列，由单调有界定理可知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在。

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,\ \text{由于} x_n = \sqrt{2+x_{n-1}},\ \text{则有} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_{n-1}},$$

从而 $A=\sqrt{2+A}$，解得 $A=2$ 或 $A=-1$。由于 $x_n>0$，由保号性可知 $A=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge 0$，则应舍去 $A=-1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = 2$。

注：单调有界定理，顾名思义，单调与有界都需要单独验证.有界性的证明可以运用**数学归纳法**，但也不要忽略数列本身的优良性质如 >0 (或 <0)；单调性的证明往往可以依赖**作差法**，对作差后的式子进行化简，联系题干递推式处理，再与 0 比较大小。此外，还可能联系函数图像、常用不等式等方法判断其单调性。最后在验证了数列极限的存在性之后，便可以通过递推式取极限求出结果。

例 1.15：证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，并求其值。

证明设 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$n=1,2,\cdots$。由二项式定理

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + \cdots + C_n^k\frac{1}{n^k} + \cdots + C_n^n\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots \\
&\quad \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&= x_{n+1}
\end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 是严格递增的。由上式可推得

$$\begin{aligned}
x_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{1\times 2} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&< 2 + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3,
\end{aligned}$$

这表明 $\{x_n\}$ 又是有界的，由单调有界定理推知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在。

利用例 1.13 的取对数法，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n}}=e.$$

注：本题在研究数列$\{x_n\}$单调性的时候，无法直接带着n次方进行作差等操作，所以采用**二项式定理**将式子展开$n+1$项，利用适当的恒等变形以及最后的放缩，使得满足$x_n<x_{n+1}$成立，自此便证明了数列是单调递增的；再根据**放缩法**以及**裂项相消法**求得极限具有上界，且为 3。便可利用单调有界定理证得该数列的极限是存在的。最后取对数，利用等价无穷小关系：$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$求得极限的值是 e。

此外，本题的结论$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，可以作为以后直接求该种类型极限的结论使用，对于此式的变式，往往可以通过**配凑法**化归到此式，大大简化了计算步骤。甚至可以得出$\lim\limits_{f(n)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}=e$及$\lim\limits_{f(n)\to 0}\left[1+f(n)\right]^{\frac{1}{f(n)}}=e$这样更为一般的形式。

4) 柯西收敛准则

(Cauchy 收敛准则)数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对任给的$\varepsilon>0$，存在正整数N，使得当$n,m>N$时有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

例 1.16：设$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, (n=1,2,\cdots)$，证明数列$x_n$发散。

证明取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}, n=2m$。

$$|x_n-x_m|=|x_{2m}-x_m|=\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{2m}>\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{m}{2m}=\frac{1}{2},$$

对$m>N$，$n=2m$有

$$|x_n-x_m|>\frac{1}{2},$$

由柯西收敛准则，该数列发散。

注：本题的证明过程应是位于分析过程之后，只有在处理了$|x_n-x_m|$并令$n=2m$之后才能知道ε_0的取值为$\frac{1}{2}$。且得出的**调和级数发散**的结论可以应用在以后的级数理论相关内容的学习之中。

例 1.17：设数列$\{a_n\}$满足，$\exists M>0$，对$\forall n$有，

$$A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\le M$$

证明数列$\{a_n\}$与$\{A_n\}$都收敛。

证明 $A_n\le M$，且$A_n-A_{n-1}=|a_n-a_{n-1}|\ge 0$，

故数列$\{A_n\}$是单调有上界的数列，由单调有界定理可知，数列$\{A_n\}$的极限存在，故收敛。由柯西收敛准则可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n,m>N$时，满足

$$|A_n-A_m|<\varepsilon.$$

又

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=|a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_{m+1}-a_m|\\&\le|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_{m+1}-a_m|\\&=|A_n-A_m|<\varepsilon.\end{aligned}$$

故由柯西收敛准则可以推得数列$\{a_n\}$收敛。

注：本题开篇应利用卓然天成的不等关系，即看出$A_n\le M$，由此可以想到往**单调有界定理**靠拢，再证数列$\{A_n\}$的单调性，便可得出数列$\{A_n\}$收敛的结论；而第二步关键在于利用已经证明出来的收敛性质，从**柯西收敛准则**出发，逆用定理，抓住性质，并辅以**三角不等式**的知识，构建等式与不等式最终证明出数列$\{a_n\}$是收敛数列。这题巧妙地将单调有界准则和柯西收敛准则灵活运用，以解题的结论作为铺垫最终解决题目。

5) 其他方法及结论

例 1.18：求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)(a>0)$。

解令$u_n=a^{\frac{1}{n}}-1,\ (n\to\infty)$，故$u_n\to0$，

则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)&=\lim_{n\to\infty}\ln a\cdot\frac{1}{\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a}{\frac{1}{u_n}\ln(1+u_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a}{\ln(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}}\\&=\frac{\ln a}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}}=\frac{\ln a}{\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}\right]}=\frac{\ln a}{\ln e}=\ln a.\end{aligned}$$

注：观察本题，发现是$0\cdot\infty$型未定式，所以要转化成$\frac{\infty}{\infty}$或$\frac{0}{0}$型未定式来求解。在转化之前，先利用**换元法**$u_n=a^{\frac{1}{n}}-1$，不仅为转化未定式作了铺垫，还为接下来的求解极限作了铺垫。在经过恒等变形之后，利用指数函数的性质，最终得到式子$\lim\limits_{n\to\infty}(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}\ (u_n\to0)$，便可利用例 1.15 的结论：$\lim\limits_{f(n)\to0}[1+f(n)]^{\frac{1}{f(n)}}=e$，易得$\lim\limits_{n\to\infty}(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}=e$，要注意的是极限在复合函数中的运算规则。转化未定式的代数式恒等变形是本题的难点。

例 1.19：求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$。

$$\text{解原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n^2}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n^2+n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2}}$$

$$=e^1=e.$$

注：先“定型”，可以发现本题属于1^∞未定式，也就是可以运用例 1.15 已经证过且经过推广之后的结论进行极限运算，这一步往往需要对式子进行通分合并处理，并结合**配凑法**得到特殊极限的形式，最后得出结果为 e。此外，需要注意的是遇到幂指函数需要先进行**取对数**处理，再根据**幂指函数极限运算**

的规则，对指数部分求极限，最终可以得到答案。

针对取对数的方法，在此介绍幂指函数在极限运算中的一些特性：

$$u(x)^{v(x)}=e^{\ln u(x)^{v(x)}}=e^{v(x)\ln u(x)}\text{，若}\lim_{x\to x_0}u(x)=a>0\text{，}\lim_{x\to x_0}v(x)=b\text{，}$$

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{b\ln a}=a^b=\left[\lim_{x\to x_0}u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}.$$

例 1.20：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_ln^l+b_{l-1}n^{l-1}+\cdots+b_1n+b_0}$，其中 $a_k\neq 0,\ b_l\neq 0$。

解分子分母同乘 n^{-l}，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_kn^{k-l}+a_{k-1}n^{k-1-l}+\cdots+a_1n^{1-l}+a_0n^{-l}}{b_l+b_{l-1}n^{-1}+\cdots+b_1n^{1-l}+b_0n^{-l}}$，

当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\alpha}=0$。

1) 当 $k>l$ 时，原式 $=\infty$，

2) 当 $k=l$ 时，原式 $=\dfrac{a_k}{b_l}=\dfrac{a_k}{b_k}$，

3) 当 $k<l$ 时，原式 $=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_ln^l+b_{l-1}n^{l-1}+\cdots+b_1n+b_0}=\begin{cases}\infty, & k>l\\ \dfrac{a_k}{b_k}, & k=l.\\ 0, & k<l\end{cases}$$

注：本题观察分子分母的多项式，最高次 k、l 的关系并不明确，所以判断要用到数学思想中**分类讨论**的思想。对分子分母进行同乘分子或分母 n 最高次幂的倒数，或者先直接除以 n 最高次幂，进行化简。这一步的思想与提取最高次幂项类似，都是便于展露易于求解极限的形式。分类讨论的思想的应用成为解决本题的一个细节，而处理多项式类型的分式极限是基本功。

2. 数列极限综合题型

通过各种方法的综合运用解决，辅以数学思想、代数知识等来解决数列极限的题型。

2.1. 递推形式的数列极限

例 2.1：设 $x_0=0$，$x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解由题干 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}$，得 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n=-\dfrac{x_n-x_{n-1}}{2}$，

可得递推式：

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\left(-\frac{1}{2}\right)(x_n-x_{n-1})\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-1}-x_{n-2})\\&=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x_1-x_0)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

故由 $(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_1-x_0)+x_0=x_{n+1}$ 可得

DOI: 10.12677/pm.2021.115098

$$x_{n+1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+1$$
$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right],$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n}=0$，$|q|<1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=\frac{2}{3}$。

注：对于本题的递推数列，观察可知，每一项都是前两项的算术平均值，便可以采用最直接的方法——写出通项来求极限.先对第一个递推式的通项做变形，使其产生递推关系，或者用级数的思想理解也不失为妙招。在本题中，具体体现为得到 $x_{n+1}-x_{n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ 这条式子。至此，递推关系就已经使用完毕。第二步，根据得到的式子的规律，可利用 n 取不同的正整数并逐项相加处理，且 $x_0=0$，这条式子可以灵活加减配凑，最终消去无关项，得到 x_{n+1} 的通项。自此，便可以直接求出最终结果。

2.2. 压缩映像原理(定义法先求后证)

例 2.2 ([6] p. 13)：设 $x_1=1$，$x_n=1+\frac{1}{1+x_{n-1}}$ $(n=2,3,\cdots)$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限。

解先利用归结原则：设出函数 $f(x_{n-1})\Rightarrow f(x)$，即 $f(x)=1+\frac{1}{1+x}$，求导得 $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}<0$，易知 x_n 不单调，单调有界准则(定理)失效。

故先不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$A$ 为实数。结合题干递推式 $x_n=1+\frac{1}{1+x_{n-1}}$ 得 $A=1+\frac{1}{1+A}$，解得 $A=\pm\sqrt{2}$，由保号性可知 $A=\sqrt{2}$。

下面证明 $\sqrt{2}$ 就是数列 $\{x_n\}$ 的极限，

$$\left|x_n-\sqrt{2}\right|=\left|1+\frac{1}{1+x_{n-1}}-\left(1+\frac{1}{1+A}\right)\right|=\frac{1}{(1+x_{n-1})(1+A)}\cdot\left|x_{n-1}-A\right|$$
$$\le\frac{1}{4}\left|x_{n-1}-A\right|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left|x_{n-2}-A\right|\le\cdots\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left|x_1-A\right|$$
$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left|x_1-\sqrt{2}\right|,$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n}=0$，$|q|<1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=0$，即 $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left|x_1-\sqrt{2}\right|\to 0\ (n\to\infty)$。

故可得 $0\le\left|x_n-\sqrt{2}\right|\le 0$，由夹逼定理(追敛性)可知 $\left|x_n-\sqrt{2}\right|=0$，即 $x_n=\sqrt{2}$。

注：本题的特殊之处在于无法用**单调有界定理**处理，所以只能转入“先求后证”的方法，先利用递推式求出极限，再用**压缩映像原理**证明。

此外，介绍一下利用归结原则令函数判断数列单调性的方法及结论：

把 $x_n\,(x_n\in I)$ 改为 x，引入 $f(x)$，

若 $f'(x)>0$，$x\in I$，则数列 $\{x_n\}$ 单调，且 $\begin{cases}\text{当}x_2>x_1\text{时，数列}\{x_n\}\text{单调递增}\\\text{当}x_2<x_1\text{时，数列}\{x_n\}\text{单调递减}\end{cases}$；

若 $f'(x)<0$， $x\in I$，则数列$\{x_n\}$不单调。

遇到本题的递推式，先考虑使用**归结原则**，通过函数的导数判断单调性；如果单调，则继续判断单调递增/单调递减，再通过**放缩**，递推证明有界，最后使用**单调有界定理**；如果不单调，立马放弃此思路改用“先求后证”的方法：即先令出极限值利用递推式解方程，再进行证明。证明需要用到**压缩映像原理**进行放缩。下面先介绍压缩映像原理。

压缩映像原理[7]：对于数列$\{x_n\}$，若存在常数$r:0<r<1$，使得对于$\forall n\in N$都有

$$|x_{n+1}-x_n|<r|x_n-x_{n-1}|,$$

则数列$\{x_n\}$收敛[7]。

特别地，若数列$\{x_n\}$由递推形式给出[8]：

$$x_{n+1}=f(x_n)\ \ (n=1,2,\cdots),$$

其中，f为可微函数，且存在$r:0<r<1$，使得：$|f'(x_n)|\le r<1\ (\forall x\in R)$，则数列$\{x_n\}$收敛[8]。

注：本题中，为了证明所要结论，利用求出的极限构造$|x_n-\sqrt{2}|$，目的是证其等于 0，最终利用**夹逼定理**和不等式的性质证得$x_n=\sqrt{2}$，即证明极限与所求一值。本题细节在于$\dfrac{1}{(1+x_{n-1})(1+A)}$的放缩。由题干递推式可得$x_{n-1}>1$，$A>1$，故$\dfrac{1}{(1+x_{n-1})(1+A)}<\dfrac{1}{4}$，从而得到$r=\dfrac{1}{4}$，由**压缩映像原理**便可证明极限存在且等于$\sqrt{2}$。

2.3. 替换与变形

对于递推形式的数列，有时也可以对其进行**变量替换与变形**，使之变成已知极限，或易于计算的极限，进而求出该递推数列的极限[7]。

例 2.3：证明数列$2,2+\dfrac{1}{2},2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}},\cdots$收敛，并求其极限。

证明记该数列为$\{x_n\}$。从其数字特征可以归纳出相邻两项满足递推关系：$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$。不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有$A=2+\dfrac{1}{A}$，由**极限的保号性**可知，$x_n>0\Rightarrow A>0$。故解得$A=1+\sqrt{2}$。令$x_n=A+\alpha_n=1+\sqrt{2}+\alpha_n$，将其代入递推式得

$$\alpha_{n+1}=\frac{(1-\sqrt{2})\alpha_n}{1+\sqrt{2}+\alpha_n},$$

则要证$x_n\to A\ (n\to\infty)$，只需证$\alpha_n\to 0$，$(n\to\infty)$。

$\alpha_1=x_1-A=1-\sqrt{2}$，即$|\alpha_1|<\dfrac{1}{2}$，不妨设$|\alpha_k|<\dfrac{1}{2^k}$，$|\alpha_{k+1}|=\left|\dfrac{(1-\sqrt{2})\alpha_k}{1+\sqrt{2}+\alpha_k}\right|<\dfrac{1}{2^{k+1}}$，

由数学归纳法可知，$|\alpha_n|<\dfrac{1}{2^n}$，亦即$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$。

自此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sqrt{2}+\alpha_n)=1+\sqrt{2}$。

数列$2,2+\dfrac{1}{2},2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}},\cdots$收敛，且极限为$1+\sqrt{2}$。

注：本题利用**保号性**的原理，将极限带上余项使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{2}+\alpha_n\right)$ 中的等号成立，故此，把题目要证的极限转化成证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 即可，再根据递推式得 $\alpha_{n+1}=\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha_n}{1+\sqrt{2}+\alpha_n}$，利用**数学归纳法**，最终得证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$。此外，不难看出，此题还可以使用**压缩映像原理**构造递推式 $\left|x_{n+1}-x_n\right|\le\dfrac{1}{4}\left|x_n-x_{n-1}\right|$ 并结合**放缩法**解决。

2.4. O'Stolz 定理

O'Stolz 定理是处理数列不定式极限的有力工具，一般用于 $*/\infty$ 型的极限[9]，它的内容是：

$\dfrac{*}{\infty}$ 型：设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足：1) $\{b_n\}$ 严格单调递增；2) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$；3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$。(其中 L 可以为有限实数、$+\infty$、$-\infty$)；则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=L$ [9]。

$\dfrac{0}{0}$ 型：设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足：1) $\{b_n\}$ 严格单调递减且趋于零；2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$。(其中 L 可以为有限实数、$+\infty$、$-\infty$)；则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=L$ [9]。

例 2.4：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$。

解令 $x_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，$y_n=n^2$，易知 $\{y_n\}$ 严格单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$。由 **O'Stolz** 定理

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_1+2a_2+\cdots+na_n\right)-\left(a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}\right)}{n^2-(n-1)^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\frac{a}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}.\end{aligned}$$

注：本题由定义法也可以解出，但是通过 **O'Stolz 定理**便可以用其优良的性质，利用**作差法**，使得本不易求极限的数列形式转变为易于求极限的形式，最终求得的结果与原式极限相等。

2.5. 与中值定理结合的题型

例 2.5：设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1,\ (n=1,2\cdots)$。证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解由于 $x_1>0$，$e^{x_2}=\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}$。根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,x_1)$，使得 $\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}=e^{\xi}$。

所以 $e^{x_2}=e^{\xi}$，故 $x_2=\xi$，$0<x_2<x_1$，不妨设 $0<x_{n+1}<x_n$，则

$$e^{x_{n+2}}=\frac{e^{x_{n+1}}-1}{x_{n+1}}=e^{\eta}\left(0<\eta<x_{n+1}\right).$$

所以 $e^{x_{n+2}}=e^{\eta}$，故 $x_{n+2}=\eta$，$0<x_{n+2}<x_{n+1}$。故 $\{x_n\}$ 是单调递减的数列，且有下界，从而 $\{x_n\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，得 $ae^a=e^a-1$。易知 $a=0$ 为其解。下证其唯一性：

令 $f(x)=xe^x-e^x+1$，则 $f'(x)=xe^x$。当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，所以 $a=0$ 是方程 $ae^a=e^a-1$ 在 $[0,+\infty)$ 上的唯一解，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

注：解决本题，先明确方向，数列有天然下界 0，故可以考虑使用**单调有界定理，**巧妙之处在于证

明单调性时需要利用**拉格朗日定理**；此外，本题的方程不容易解出，但可以试出 $a=0$ 是满足方程的一个解，所以需要通过构造函数来研究函数性态，进而证明出 $a=0$ 是方程的唯一解，也就是要求的极限值。

3. 小结

本文通过举例的形式给出了诸多数列极限的典型例题及其求法，包括求数列极限题，以及和数列极限知识相关的综合题型，运用不同的方法对求解数列极限进行深入研究，并在每一道题之后总结了此题型的解题方法及思路，点明所蕴含的数学方法，让我们在掌握求数列极限的同时，加强对数学思维的训练。如此，我们不仅搭建了有关数列极限求法更加全面的知识框架，更为以后学习其他数学知识打下了基础。

致　谢

非常感谢审稿人对本文提出宝贵的意见。

基金项目

国家自然科学基金(12001117，12001503，11701524)、广东省自然科学基金(2018A030313267，2018A030313508)资助。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系编. 数学分析上册[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 林潘能. 数列极限不同求解方法及应用[J]. 报刊荟萃(经验交流), 2018(7): 244.

[3] 葛喜芳. 数列极限的几种计算方法[J]. 北京工业职业技术学院学报, 2013, 12(3): 63-65.

[4] 薛春华, 徐森林, 编. 数学分析精选习题全解(上册)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[5] 《超越吉米多维奇——数列的极限》编写组编. 超越吉米多维奇数列的极限[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2009.

[6] 沐定夷, 谢惠民, 编著. 吉米多维奇数学分析习题集学习指引(第一册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[7] 王从徐. 关于递推形式数列极限的求法[J]. 景德镇学院学报, 2020, 35(3): 109-112.

[8] 李啸芳, 刘家保, 左学武. 一类数列极限的几种常用方法[J]. 佛山科学技术学院学报(自然科学版), 2015, 33(1):14-18.

[9] G. Ktambauer. 数学分析[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1981: 73.