Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 790-801
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115093

n 维 Hausdorff 算子的加权不等式

周红秀

上海大学数学系, 上海
Email: zhxshu2014@163.com

收稿日期：2021年4月10日；录用日期：2021年5月11日；发布日期：2021年5月18日

摘 要

本文主要获得一些 n 维 Hausdorff 算子在加双权勒贝格函数空间中的有界性关于权函数的充要条件. 我们同时得到了 n 维共轭 Hausdorff 算子的加权不等式。

关键词

算子，共轭 Hausdorff 算子，权函数

The Weighted Inequalities of n-Dimensional Hausdorff Operators

Hongxiu Zhou

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai
Email: zhxshu2014@163.com

Received: Apr. 10^{th}, 2021; accepted: May 11^{th}, 2021; published: May 18^{th}, 2021

Abstract

In this paper, we obtain some necessary and sufficient conditions for the boundedness of the n-dimensional Hausdorff operators on the two-weighted Lebesgue spaces. The corresponding results for the adjoint of n-dimensional Hausdorff operators are also obtained.

文章引用: 周红秀. n 维 Hausdorff 算子的加权不等式[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 790-801.
DOI: 10.12677/pm.2021.115093

Keywords

Hausdorff Operator, Adjoint Hausdorff Operator, Weight

1. 引言

Hausdorff 算子主要是由 Hausdorff 在文献 [1] 中为解决数列收敛性问题引入的, 它与经典分析有密切的联系, 如 Fourier 级数的求和 [2]、数项级数的 Hausdorff 求和 [3] 等. 它在复分析 [4]、调和分析 [5–7] 等中有广泛的应用和研究.

我们首先回顾一下经典的一维 Hausdorff 算子 h_φ, 其定义如下:

$$h_\varphi(f)(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(\frac{x}{t})}{t} f(t)dt,$$

其中 f 最初可以假定属于 Schwartz 函数空间. 如果取合适的 φ, Hausdorff 算子可以变为许多经典的算子. 若取 $\varphi(t) = \frac{\chi_{(1,\infty)}(t)}{t}$, 则 h_φ 即为经典的一维 Hardy 算子 [8]:

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt;$$

若取 $\varphi(t) = \chi_{(0,1)}(t)$, h_φ 即为一维 Hardy 算子的共轭算子:

$$H^*f(x) = \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt,$$

这里 $x > 0$.

作为一维形式的推广, Andersen 在文献 [9] 中定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 维 Hausdorff 算子

$$\mathcal{H}_\Phi(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(x/|y|)}{|y|^n} f(y)dy, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

类似于一维的情形, 如果取 $\Phi(y) = \frac{\chi_{\{|y|>1\}}(y)}{|y|^n}$, 那么 $\mathcal{H}_\Phi$ 会变为 n 维 Hardy 算子 [10]:

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{|x|^n}\int_{|y|<|x|} f(y)dy;$$

如果取 $\Phi(y)=\chi_{\{|y|\le 1\}}(y)$, 则 $\mathcal{H}_\Phi$ 会变为 n 维 Hardy 算子的共轭算子:

$$\mathcal{H}^* f(x)=\int_{|y|\ge|x|}\frac{f(y)}{|y|^n}dy,$$

这里 $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. 利用共轭算子的定义很容易得到: n 维 Hausdorff 算子 $\mathcal{H}_\Phi$ 的共轭算子 $\mathcal{H}_\Phi^*$ 为

$$\mathcal{H}_\Phi^*(f)(x)=\frac{1}{|x|^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{y}{|x|}\right)f(y)dy.$$

高维 Hausdorff 算子及其变形有一系列的结果, 感兴趣的读者可以参看两篇综述性文章 [11,12].

令 $0<p<\infty$, 加权勒贝格空间 $L^p(w)$ 空间表示满足

$$\|f\|_{L^p(w)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p w(x)^p dx\right)^{1/p}<\infty$$

的函数的全体, 其中 $w(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上权函数(即为非负局部可积的函数). 近来, Liflyand 在文献 [13] 中给出了一维 Hausdorff 算子 h_φ 及其共轭算子 从 $L^p(v)$ 到 $L^q(u)$ 的有界性关于权函数 u 和 v 的充要条件. 受其启发, 一个自然的问题: 能否建立 n 维 Hausdorff 算子 $\mathcal{H}_\Phi$ 及其共轭算子 $\mathcal{H}_\Phi^*$ 从 $L^p(v)$ 到 $L^q(u)$ 的有界性关于权函数 u 和 v 的充要条件呢？本文解决了这个问题, 我们主要是借助于旋转的方法降低维数, 该方法将对于处理高维平均算子的加权问题有一定的借鉴意义.

本文假设 u, v 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个权函数. 对于 n 维 Hausdorff 算子, 我们得到 $\mathcal{H}_\Phi$ 从 $L^p(v)$ 到 $L^q(u)$ 的有界性关于权函数 u 和 v 的充要条件. 其结果如下:

定理 1.1. 设 $1<p\le q<\infty$, $f\in L^p(v)$, $\Phi\in L^\infty$ 和 $\Phi, f\ge 0$. 若存在常数 $C_1>0$ 使得

$$\begin{aligned}C_1:=\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\Phi\left(\frac{x}{t}\right)^{q/p}&\left(\int_{|y|<t}\Phi\left(\frac{x}{|y|}\right)v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy\right)^{q/pp'}\\ &\times\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{x}{|y|}\right)v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy\right)^{q/p'^2}dx<\infty\end{aligned}\tag{1.1}$$

成立, 则下式成立

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{H}_\Phi(f)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q}\le C_2\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(y)^p v(y)dy\right)^{1/p},\tag{1.2}$$

其中 C_2 与 C_1, p, q 有关.

若对任意的实数 $r>0$, 存在与 x 无关的常数 $C_3>0$, 使得下式成立

$$\Phi\left(\frac{x}{r}\right)\int_{|y|<r}v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy\le C_3\int_{|y|<r}\Phi\left(\frac{x}{|y|}\right)v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy,\tag{1.3}$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\Phi\left(\frac{x}{r}\right)^{q/p}\left(\int_{|y|<r}\Phi\left(\frac{x}{|y|}\right)|y|^{-np'}v(y)^{-p'/p}dy\right)^{q/p'}dx\le C_4$$

是 (1.2) 成立的必要条件, 其中 C_4 与 C_2, C_3, p, q 有关.

定理 1.2. 设 $1 < p \le q < \infty$, $f \in L^p(v)$, $\Phi \in L^\infty$ 和 $\Phi, f \ge 0$. 若存在常数 $C_5 > 0$ 使得

$$C_5 := \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Phi\left(\frac{x}{t}\right)^{q/p} \left(\int_{|y|>t} \Phi\left(\frac{x}{|y|}\right) v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy\right)^{q/pp'}$$
$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{x}{|y|}\right) v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy\right)^{q/p'^2} dx < \infty \tag{1.4}$$

成立, 则下式成立

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{H}_\Phi(f)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C_6 \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p v(y)dy\right)^{1/p}, \tag{1.5}$$

其中 C_6 与 C_5, p, q 有关.

若对任意的实数 $r > 0$, 存在与 x 无关的常数 $C_7 > 0$, 使得下式成立

$$\Phi\left(\frac{x}{r}\right) \int_{|y|>r} v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy \le C_7 \int_{|y|>r} \Phi\left(\frac{x}{|y|}\right) v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy, \tag{1.6}$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Phi\left(\frac{x}{r}\right)^{q/p} \left(\int_{|y|>r} \Phi\left(\frac{x}{|y|}\right) |y|^{-np'} v(y)^{-p'/p}dy\right)^{q/p'} dx \le C_8$$

是 (1.5) 成立的必要条件, 其中 C_8 与 C_6, C_7, p, q 有关.

对于 Hausdorff 算子的共轭算子 $\mathcal{H}_\Phi^*$, 我们同样得到 $\mathcal{H}_\Phi^*$ 从 $L^p(v)$ 到 $L^q(u)$ 的有界性关于权函数 u 和 v 的充要条件. 其结果如下:

定理 1.3. 设 $1 < p \le q < \infty$, $f \in L^p(v)$, $f \ge 0$. 假设 Φ 是非负径向函数, 且 $\Phi \in L^\infty$. 若存在常数 $C_9 > 0$ 使得

$$C_9 := \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)|x|^{-nq}\Phi\left(\frac{t}{|x|}\right)^{q/p} \left(\int_{|y|<t} \Phi\left(\frac{y}{|x|}\right) v(y)^{-p'/p}dy\right)^{q/pp'}$$
$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{y}{|x|}\right) v(y)^{-p'/p}dy\right)^{q/p'^2} dx < \infty \tag{1.7}$$

成立, 则下式成立

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{H}_\Phi^*(f)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C_{10} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p v(y)dy\right)^{1/p}, \tag{1.8}$$

其中 C_{10} 与 C_9, p, q 有关.

若对任意的实数 $r > 0$, 存在与 x 无关的常数 $C_{11} > 0$, 使得下式成立

$$\Phi\left(\frac{r}{|x|}\right) \int_{|y|<r} v(y)^{-p'/p}dy \le C_{11} \int_{|y|<r} \Phi\left(\frac{y}{|x|}\right) v(y)^{-p'/p}dy. \tag{1.9}$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)|x|^{-nq}\Phi\left(\frac{r}{|x|}\right)^{q/p}\left(\int_{|y|<r}\Phi\left(\frac{y}{|x|}\right)v(y)^{-p'/p}dy\right)^{q/p'}dx \le C_{12}$$

是 (1.8) 成立的必要条件, 其中 C_{12} 与 C_{10}, C_{11}, p, q 有关.

定理 1.4. 设 $1 < p \le q < \infty$, $f \in L^p(v)$, $f \ge 0$. 假设 Φ 是非负径向函数, 且 $\Phi \in L^\infty$. 若存在常数 $C_{13} > 0$ 使得

$$\begin{aligned} C_{13} := \sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)|x|^{-nq}\Phi\left(\frac{t}{|x|}\right)^{q/p}\left(\int_{|y|>t}\Phi\left(\frac{y}{|x|}\right)v(y)^{-p'/p}dy\right)^{q/pp'} \\ \times\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\frac{y}{|x|}\right)v(y)^{-p'/p}dy\right)^{q/p'^2}dx < \infty \end{aligned} \tag{1.10}$$

成立, 则下式成立

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{H}_\Phi^*(f)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C_{14}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p v(y)dy\right)^{1/p},$$

其中 C_{14} 与 C_{13}, p, q 有关.

若对任意的实数 $r > 0$, 存在与 x 无关的常数 $C_{15} > 0$, 使得下式成立

$$\Phi\left(\frac{r}{|x|}\right)\int_{|y|>r} v(y)^{-p'/p}dy \le C_{15}\int_{|y|>r} v(y)^{-p'/p}\Phi\left(\frac{y}{|x|}\right)dy.$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)|x|^{-nq}\Phi\left(\frac{r}{|x|}\right)^{q/p}\left(\int_{|y|>r}\Phi\left(\frac{y}{|x|}\right)v(y)^{-p'/p}dy\right)^{q/p'}dx \le C_{16}$$

是 (1.4) 成立的必要条件, 其中 C_{16} 与 C_{14}, C_{15}, p, q 有关.

2. 定理的证明

定理 1.1 的证明 首先说明 Hausdorff 算子 $\mathcal{H}_\Phi$ 的定义是合理的. 事实上, 利用 Hölder 不等式 $(1/p + 1/p' = 1)$ 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\Phi(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(x/|y|)}{|y|^n}f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)v(y)^{1/p}\Phi(x/|y|)^{1/p}\Phi(x/|y|)^{1/p'}v(y)^{-1/p}|y|^{-n}dy \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p v(y)\Phi(x/|y|)dy\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x/|y|)v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy\right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

因为 $f \in L^p(v)$ 和 $\Phi \in L^\infty$, 所以右侧的第一个积分是有限的. 又由假设条件 (1.1), 可知右侧的第二个积分关于 x 是几乎处处有限的.

下面证明充分性. 利用极坐标变换得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{H}_\Phi(f)(x)|^q u(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{t}\right) f(ty')\frac{1}{t}dtd\sigma(y')\right)^q u(x)dx. \tag{2.1}$$

由 (2.1), 利用 Hölder 不等式 $(1/p+1/p'=1)$ 得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{t}\right) f(ty')\frac{1}{t}dtd\sigma(y')\right)^q dx\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{t}\right) f(ty')^p v(ty')t^{n-1}h_1(x,t)^p dtd\sigma(y')\right)^{q/p}\\ &\quad\times\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{t}\right) v(ty')^{-p'/p}t^{-np'+n-1}h_1(x,t)^{-p'} dtd\sigma(y')\right)^{q/p'} dx,\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中

$$h_1(x,t) = \left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi\left(\frac{x}{s}\right) v(sy')^{-p'/p}s^{-np'+n-1}d\sigma(y')ds\right)^{1/pp'},\ 0\le t\le\infty.$$

显然

$$h_1(x,t) = \left(\int_{|y|<t} \Phi\left(\frac{x}{|y|}\right) v(y)^{-p'/p}|y|^{-np'}dy\right)^{1/pp'}.$$

令 $z=h_1(x,t)^{pp'}$, 利用微积分的基本性质, 不等式 (2.2) 右端的最后一个积分可化为

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{t}\right) v(ty')^{-p'/p}t^{-np'+n-1}h_1(x,t)^{-p'} dtd\sigma(y')\\ &= \int_{h_1(x,0)^{pp'}}^{h_1(x,\infty)^{pp'}} z^{-1/p}dz\\ &= p'\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi\left(\frac{x}{t}\right) v(ty')^{-p'/p}t^{-np'+n-1}d\sigma(y')dt\right)^{1/p'}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

由于$q\ge p$, 对 (2.2) 的右端利用广义 Minkowski 积分不等式得到

$$\begin{aligned}&p'^{q/p'}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi\left(\frac{x}{t}\right) f(ty')^p v(ty')t^{n-1}h_1(x,t)^p h_1(x,\infty)^{p^2/p'}d\sigma(y')dt\right)^{q/p}dx\\ &\le p'^{q/p'}\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(ty')^p v(ty')t^{n-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Phi\left(\frac{x}{t}\right)^{q/p}\right.\right.\\ &\quad\left.\left.\times h_1(x,t)^q h_1(x,\infty)^{pq/p'}dx\right)^{p/q}d\sigma(y')dt\right)^{q/p}.\end{aligned}$$

由假设条件 (1.1), 可以知道

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{H}_\Phi(f)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C_1^{1/q}p'^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p v(y)dy\right)^{1/p}.$$

DOI: 10.12677/pm.2021.115093

下证必要性. 假设 (1.2) 成立, 则对任意的实数 $r>0$, 下述不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|z|<r}\frac{\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)}{|z|^n}f(z)dz\right|^q u(x)dx\right)^{1/q}\leq C_2\left(\int_{|z|<r}f(z)^p v(z)dz\right)^{1/p}$$

成立. 取 $f(z)=v(z)^{-p'/p}|z|^{n-np'}$, 将上述不等式简化为

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\left|\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)|z|^{-np'}v(z)^{-p'/p}dz\right|^q\times\left(\int_{|z|<r}v(z)^{-p'/p}|z|^{-np'}dz\right)^{-q/p}dx\right)^{1/q}\leq C_2.$$

利用 (1.3), 则有

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\left|\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)|z|^{-np'}v(z)^{-p'/p}dz\right|^q\right.\\
&\quad\left.\times\left(\int_{|z|<r}v(z)^{-p'/p}|z|^{-np'}dz\right)^{-q/p}dx\right)^{1/q}\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\Phi\left(\frac{x}{r}\right)^{q/p}\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)|z|^{-np'}v(z)^{-p'/p}dz\right)^q\right.\\
&\quad\left.\times\left(\Phi\left(\frac{x}{r}\right)\int_{|z|<r}v(z)^{-p'/p}|z|^{-np'}dz\right)^{-q/p}dx\right)^{1/q}\\
&\geq C_3^{-1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\Phi\left(\frac{x}{r}\right)^{q/p}\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)|z|^{-np'}v(z)^{-p'/p}dz\right)^q\right.\\
&\quad\left.\times\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)v(z)^{-p'/p}|z|^{-np'}dz\right)^{-q/p}dx\right)^{1/q}\\
&=C_3^{-1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\Phi\left(\frac{x}{r}\right)^{q/p}\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)|z|^{-np'}v(z)^{-p'/p}dz\right)^{q/p'}dx\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

综上得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\Phi\left(\frac{x}{r}\right)^{q/p}\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)|z|^{-np'}v(z)^{-p'/p}dz\right)^{q/p'}dx\leq C_3^{q/p}C_2^q.$$

定理证毕.

定理 1.2 的证明 首先证明充分性. 根据 (2.1) 和 Hölder 不等式 $(1/p+1/p'=1)$ 可知

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\Phi\left(\frac{x}{t}\right)f(ty')\frac{1}{t}dtd\sigma(y')\right)^q dx\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\Phi\left(\frac{x}{t}\right)f(ty')^p v(ty')t^{n-1}h_2(x,t)^p dtd\sigma(y')\right)^{q/p}\\
&\quad\times\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\Phi\left(\frac{x}{t}\right)v(ty')^{-p'/p}t^{-np'+n-1}h_2(x,t)^{-p'}dtd\sigma(y')\right)^{q/p'}dx,
\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中

$$h_2(x,t)=\left(\int_t^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{x}{s}\right)v(sy')^{-p'/p}s^{-np'+n-1}d\sigma(y')ds\right)^{1/pp'},\ 0\le t\le\infty.$$

类似于 (2.3) 的估计. 令 $z=h_2(x,t)^{pp'}$, 不等式 (2.4) 右端的最后一个积分可化为

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\Phi\left(\frac{x}{t}\right)v(ty')^{-p'/p}t^{-np'+n-1}h_2(x,t)^{-p'}dtd\sigma(y')\\&=\int_{h_2(x,\infty)^{pp'}}^{h_2(x,0)^{pp'}}z^{-1/p}dz\\&=p'\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{x}{t}\right)v(ty')^{-p'/p}t^{-np'+n-1}d\sigma(y')dt\right)^{1/p'}.\end{aligned}$$

由于 $q\ge p$, 对 (2.4) 的右端利用广义 Minkowski 积分不等式得到

$$\begin{aligned}&p'^{q/p'}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{x}{t}\right)f(ty')^pv(ty')t^{n-1}h_2(x,t)^ph_2(x,0)^{p^2/p'}d\sigma(y')dt\right)^{q/p}dx\\&\le p'^{q/p'}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(ty')^pv(ty')t^{n-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\Phi\left(\frac{x}{t}\right)^{q/p}\right.\right.\\&\left.\left.\times h_2(x,t)^qh_2(x,0)^{pq/p'}dx\right)^{p/q}d\sigma(y')dt\right)^{q/p}.\end{aligned}$$

应用极坐标变换和条件 (1.4) 得到

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{H}_\Phi(f)(x)|^qu(x)dx\right)^{1/q}\le C_5^{1/q}\ p'^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(y)^pv(y)dy\right)^{1/p}.$$

下证必要性. 假设 (1.5) 成立, 则对任意的实数 $r>0$, 下面的不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|z|>r}\frac{\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)}{|z|^n}f(z)dz\right|^qu(x)dx\right)^{1/q}\le C_6\left(\int_{|z|>r}f(z)^pv(z)dz\right)^{1/p}$$

成立. 选取函数 $f(z)=v(z)^{-p'/p}|z|^{n-np'}$, 将上述不等式简化为

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\left|\int_{|z|>r}\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)|z|^{-np'}v(z)^{-p'/p}dz\right|^q\right.\\&\left.\times\left(\int_{|z|>r}v(z)^{-p'/p}|z|^{-np'}dz\right)^{-q/p}dx\right)^{1/q}\le C_6.\end{aligned}$$

类似于定理 1.1 中必要性的证明, 利用 (1.6), 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\Phi\left(\frac{x}{r}\right)^{q/p}\left(\int_{|z|>r}\Phi\left(\frac{x}{|z|}\right)|z|^{-np'}v(z)^{-p'/p}dz\right)^{q/p'}dx\le C_7^{q/p}C_6^q.$$

证毕.

定理 1.3 的证明 首先说明共轭 Hausdorff 算子 $\mathcal{H}_\Phi^*$ 的定义是合理的. 事实上, 利用 Hölder 不等式 $(1/p+1/p'=1)$ 有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\Phi^*(f)(x)&=|x|^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y/|x|)f(y)dy\\&\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(y)^p v(y)\Phi(y/|x|)dy\right)^{1/p}|x|^{-n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y/|x|)v(y)^{-p'/p}dy\right)^{1/p'}.\end{aligned}$$

因为 $f\in L^p(v)$ 和 $\Phi\in L^\infty$, 所以右侧的第一个积分是有限的. 又由假设条件 (1.7), 可知右侧的第二个积分与 $|x|^{-n}$ 的乘积是几乎处处有限的.

下证充分性. 由极坐标变换可知

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{H}_\Phi^*(f)(x)|^q u(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)f(ty')t^{n-1}dtd\sigma(y')\right)^q\frac{u(x)}{|x|^{nq}}dx. \tag{2.5}$$

利用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)}{|x|^{nq}}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)f(ty')t^{n-1}dtd\sigma(y')\right)^q dx\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)}{|x|^{nq}}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)f(ty')^p v(ty')t^{n-1}h_3(x,t)^p dtd\sigma(y')\right)^{q/p}\\&\quad\times\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)v(ty')^{-p'/p}t^{n-1}h_3(x,t)^{-p'}dtd\sigma(y')\right)^{q/p'}dx,\end{aligned}\tag{2.6}$$

其中

$$h_3(x,t)=\left(\int_0^t\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{sy'}{|x|}\right)v(sy')^{-p'/p}s^{n-1}d\sigma(y')ds\right)^{1/pp'},\ 0\le t\le\infty.$$

类似于定理 1.1 中对 (2.2) 的处理过程, 易知

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)v(ty')^{-p'/p}t^{n-1}h_3(x,t)^{-p'}d\sigma(y')dt\\&=p'\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)v(ty')^{-p'/p}t^{n-1}d\sigma(y')dt\right)^{1/p'}.\end{aligned}$$

因为 $q\ge p$, 对 (2.6) 的右端使用广义的 Minkowski 积分不等式, 可以得到如下估计

$$\begin{aligned}&p'^{q/p'}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)}{|x|^{nq}}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)f(ty')^p v(ty')t^{n-1}h_3(x,t)^p h_3(x,\infty)^{p^2/p'}d\sigma(y')dt\right)^{q/p}dx\\&\le p'^{q/p'}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(ty')^p v(ty')t^{n-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)}{|x|^{nq}}\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)^{q/p}\right.\right.\\&\quad\left.\left.\times\ h_3(x,t)^q h_3(x,\infty)^{pq/p'}dx\right)^{p/q}d\sigma(y')dt\right)^{q/p}.\end{aligned}$$

由于 Φ 是径向的, 利用假设条件(1.7), 可知

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{H}_\Phi^*(f)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q}\le C_9^{1/q}p'^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(y)^p v(y)dy\right)^{1/p}.$$

下证必要性. 假设 (1.8) 成立, 则对任意的实数 $r>0$, 下面的估计

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)}{|x|^{nq}}\left|\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{z}{|x|}\right)f(z)dz\right|^q dx\right)^{1/q}\le C_{10}\left(\int_{|z|<r}f(z)^p v(z)dz\right)^{1/p}$$

成立. 取 $f(z)=v(z)^{-p'/p}$, 对上面的积分不等式进行变形

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)}{|x|^{nq}}\left|\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{z}{|x|}\right)v(z)^{-p'/p}dz\right|^q\left(\int_{|z|<r}v(z)^{-p'/p}dz\right)^{-q/p}dx\right)^{1/q}\le C_{10}.$$

利用假设 (1.9), 可以得到

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)|x|^{-nq}\left|\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{z}{|x|}\right)v(z)^{-p'/p}dz\right|^q\left(\int_{|z|<r}v(z)^{-p'/p}dz\right)^{-q/p}dx\right)^{1/q}\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)|x|^{-nq}\Phi\left(\frac{r}{|x|}\right)^{q/p}\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{z}{|x|}\right)v(z)^{-p'/p}dz\right)^q\right.\\
&\quad\left.\times\left(\Phi\left(\frac{r}{|x|}\right)\int_{|z|<r}v(z)^{-p'/p}dz\right)^{-q/p}dx\right)^{1/q}\\
&\ge C_{11}^{-1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)|x|^{-nq}\Phi\left(\frac{r}{|x|}\right)^{q/p}\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{z}{|x|}\right)v(z)^{-p'/p}dz\right)^q\right.\\
&\quad\left.\times\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{z}{|x|}\right)v(z)^{-p'/p}dz\right)^{-q/p}dx\right)^{1/q}\\
&=C_{11}^{-1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)|x|^{-nq}\Phi\left(\frac{r}{|x|}\right)^{q/p}\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{z}{|x|}\right)v(z)^{-p'/p}dz\right)^{q/p'}dx\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

从而得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(x)|x|^{-nq}\Phi\left(\frac{r}{|x|}\right)^{q/p}\left(\int_{|z|<r}\Phi\left(\frac{z}{|x|}\right)v(z)^{-p'/p}dz\right)^{q/p'}dx\le C_{11}^{q/p}C_{10}^q.$$

证毕.

定理 1.4 的证明 首先证明充分性. 利用 (2.5), Hölder 不等式和广义的 Minkowski 积分不等式, 得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}u(x)|x|^{-nq}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)f(ty')t^{n-1}d\sigma(y')dt\right)^q dx\\
&\le\int_{\mathbb{R}^n}u(x)|x|^{-nq}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)f(ty')^p v(ty')t^{n-1}h_4(x,t)^p d\sigma(y')dt\right)^{q/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)v(ty')^{-p'/p}t^{n-1}h_4(x,t)^{-p'}d\sigma(y')dt\right)^{q/p'}dx\\
&=p'^{q/p'}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)|x|^{-nq}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)^p f(ty')^p v(ty')t^{n-1}h_4(x,t)^p\right.\\
&\left.\quad\times h_4(x,0)^{p^2/p'}d\sigma(y')dt\right)^{q/p}dx\\
&\le p'^{q/p'}\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(ty')^p v(ty')t^{n-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x)|x|^{-nq}\Phi\left(\frac{ty'}{|x|}\right)^{q/p}\right.\right.\\
&\left.\left.\quad\times\ h_4(x,t)^q h_4(x,0)^{pq/p'}dx\right)^{p/q}d\sigma(y')dt\right)^{q/p},
\end{aligned}
$$

其中

$$
h_4(x,t)=\left(\int_t^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Phi\left(\frac{sy'}{|x|}\right)v(sy')^{-p'/p}s^{n-1}d\sigma(y')ds\right)^{1/pp'},\ 0\le t\le\infty.
$$

由于 Φ 是径向的, 利用条件假设 (1.10), 可得下式成立

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{H}_\Phi^*(f)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q}\le C_{13}^{1/q}p'^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(y)^p v(y)dy\right)^{1/p}.
$$

必要性的证明类似定理 1.3 的必要性证明. 这里不再详细给出. 证毕.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(51685168).

参考文献

[1] Hausdorff, F. (1921) Summationsmethoden und Momentfolgen I. *Mathematische Zeitschrift*, **9**, 74-109. https://doi.org/10.1007/BF01378337

[2] Hardy, G.H. (1925) Notes on Some Points in the Integral Calculus, LX. An Inequality between Integrals. *Messenger of Mathematics*, **54**, 150-156.

[3] Hedberg L. (1972) On Certain Convolution Ineqalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **36**, 505-510. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1972-0312232-4

[4] Siskakis, A.G. (1987) Composition Semigroups and the Cesàro Operator on H^p. *Journal of the London Mathematical Society*, **36**, 153-164. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-36.1.153

[5] Georgakis, C. (1992) The Hausdorff Mean of a Fourier-Stieltjes Transform. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **116**, 465-471. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1992-1096210-9

[6] Liflyand, E. and Móricz, F. (2000) The Hausdorff Operator Is Bounded on the Real Hardy Space $H^1(\mathbb{R})$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **128**, 1391-1396. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-05159-X

[7] Liflyand, E. and Móricz, F. (2002) Commuting Relations for Hausdorff Opereators and Hilbert Transforms on Real Hardy Spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, **97**, 133-143. https://doi.org/10.1023/A:1020867130612

[8] Kufner, A., Maligranda, L. and Persson, L.E. (2007) The Hardy Inequality: About Its History and Some Related Results. Vydavatelský Servis, Uppsala University Library, Uppsala, 162 p.

[9] Andersen, K.F. (2003) Boundedness of Hausdorff Operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$ and BMO$(\mathbb{R}^n)$. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **69**, 409-418.

[10] Kufner, A., Persson, L.E. and Samko, N. (2017) Weighted Inequalities of Hardy Type. 2nd Edition, World Scientific Publishing Company, Inc., River Edge, NJ, xx+459 p. https://doi.org/10.1142/10052

[11] Chen, J., Fan, D. and Wang, S. (2013) Hausdorff Operators on Euclidean Spaces. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, **28**, 548-564. https://doi.org/10.1007/s11766-013-3228-1

[12] Liflyand, E. (2013) Hausdorff Operators on Hardy Spaces. *Eurasian Mathematical Journal*, **4**, 101-141.

[13] Liflyand, E. (2018) Hardy Type Inequalities in the Category of Hausdorff Operators. In: Karapetyants, A., Kravchenko, V. and Liflyand, E., Eds., *Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis. OTHA 2018. Springer Proceedings in Mathematics Statistics*, Vol. 291, Springer, Cham, 81-91. https://doi.org/10.1007/978-3-030-26748-3_6