Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 922-928
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115105

Hans汉斯

弱Gorenstein内射模

朵珍珍

西北师范大学，甘肃 兰州
Email: 649210121@qq.com

收稿日期：2021年4月17日；录用日期：2021年5月19日；发布日期：2021年5月26日

摘　要

本文研究了弱Gorenstein内射模的一些简单性质，并证明了弱Gorenstein内射模类关于正向极限封闭。

关键词

弱Gorenstein内射模，强余纯平坦模，正合列，正向极限

Weak Gorenstein Injective Modules

Zhenzhen Duo

Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 649210121@qq.com

Received: Apr. 17th, 2021; accepted: May 19th, 2021; published: May 26th, 2021

Abstract

In this paper, some simple properties of weak Gorenstein injective modules are studied and it is proved that the class of weak Gorenstein injective modules is closed about direct limit.

Keywords

Weak Gorenstein Injective Modules, Strongly Copure Flat, Exact Sequence, Direct Limit

文章引用: 朵珍珍. 弱 Gorenstein 内射模[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 922-928.
DOI: 10.12677/pm.2021.115105

1. 引言

Gorenstein 同调代数最早可追溯到二十世纪六十年代末，Enochs 和 Jenda 在一般环上引入了 Gorenstein 内射、投射和平坦模的概念[1] [2]。近年来，随着 Gorenstein 同调代数的不断发展，从而受到了许多学者的关注。2012 年，Gao 在文献[3]中引入了弱 Gorenstein 内射、投射和平坦模的概念，并刻画了一些特殊的环。Enochs 和 Jenda 在文献[4]中给出了强余纯平坦模的概念。Wang 在一般环上讨论了弱 Gorenstein 内射模[5]。根据以上研究的启发，本文在 Gao 的基础上继续研究了弱 Gorenstein 内射模，并证明了弱 Gorenstein 内射模类关于正向极限封闭。

2. 预备知识

除非特别声明，环 R 是具有单位元的结合环，所以涉及的模均是酉模，ModR 表示左 R-模范畴。

定义 2.1 [1]称左 R-模 M 是 Gorenstein 内射的，如果存在一个内射左 R-模的正合序列 $I=\cdots\to I_1\to I_0\to I^0\to I^1\to\cdots$ 使得 $M=Ker\left(I^0\to I^1\right)$，并且对任意的内射左 R-模 E，$Hom_R\left(E,I\right)$ 是正合的。

定义 2.2 [2]称左 R-模 M 是 Gorenstein 平坦的，如果存在一个平坦左 R-模的正合序列 $F=\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots$ 使得 $M=Ker\left(F^0\to F^1\right)$，并且对任意的内射右 R-模 E，$E\otimes F$ 正合。

定义 2.3 [3]我们称左 R-模 M 是弱 Gorenstein 内射的，如果存在一个内射左 R-模的正合序列 $I=\cdots\to I_1\to I_0\to I^0\to I^1\to\cdots$ 使得 $M=Ker\left(I^0\to I^1\right)$。

定义 2.4 [4]我们称左 R-模 M 是强余纯平坦模，如果对任意的内射右 R-模 I，使得 $Tor_i^R\left(I,M\right)=0$。

3. 主要结果

引理 3.1 [5]设 M 是内射左 R-模，则以下表述等价：

1) M 是弱 Gorenstein 内射模；

2) 存在一个左 R-模的正合序列 $\cdots\to I_1\to I_0\to M\to 0$，其中对任意的 $i\in Z$，I_i 是内射的；

3) 存在一个左 R-模的正合序列 $0\to L\to I_0\to M\to 0$，其中 I_0 是内射的，L 是弱 Gorenstein 内射的。

命题 3.2 设 $0\to M\to N\to E\to 0$ 是一个左 R-模的正合序列。若 M 是弱 Gorenstein 内射模且 E 是内射的，则 N 是弱 Gorenstein 内射的。

证明：因为 M 是弱 Gorenstein 内射的，所以由引理 3.1 知存在一个左 R-模的正合列 $0\to M\to I\to L\to 0$，其中 I 是内射的且 L 是弱 Gorenstein 内射的。考虑如下推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] & 0 \\
 & L \arrow[r, equal] \arrow[d] & L \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

在中间行正合列 $0\to I\to D\to E\to 0$ 中，因为 I 与 E 是内射的，所以 D 也是内射的。在中间列正合列 $0\to N\to D\to L\to 0$ 中，L 是弱 Gorenstein 内射模，D 是内射模，那么根据引理 3.1 知 N 是弱 Gorenstein 内射的。

命题 3.3 设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是左 R-模的正合序列。若 M' 和 M'' 是弱 Gorenstein 内射模，则 M 是弱 Gorenstein 内射模。

证明：因为 M'' 是弱 Gorenstein 内射模，所以由引理 3.1 知存在一个左 R-模的短正合列 $0\to M''\to I\to N\to 0$，其中 I 是内射的且 N 是弱 Gorenstein 内射模。考虑 $M\to M''$ 和 $M''\to I$ 的拉回：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

在行正合列 $0\to M'\to E\to I\to 0$ 中，M' 是弱 Gorenstein 内射模且 I 是内射模，那么由命题 3.2 知 E 是弱 Gorenstein 内射模，在列正合列 $0\to M\to E\to N\to 0$ 中，E 和 N 是弱 Gorenstein 内射左 R-模，令 $M=\mathrm{Ker}(E\to N)$，那么 M 是弱 Gorenstein 内射模。

推论 3.4 设 $0\to M\to I_1\to I_2\to N\to 0$ 是左 R-模的正合序列。如果 I_1 和 I_2 是弱 Gorenstein 内射模，那么有正合列 $0\to M\to G\to E\to N\to 0$ 和 $0\to M\to I\to D\to N\to 0$，其中 E 和 I 是内射左 R-模，G 和 D 是弱 Gorenstein 内射的。

证明：因为 I_2 是弱 Gorenstein 内射模，所以由引理 3.1 (3)知存在一个左 R-模的短正合列 $0\to I_3\to E\to I_2\to 0$，其中 E 是内射的且 I_3 是弱 Gorenstein 内射的。令 $H=\mathrm{Im}(M\to I_1)$ 考虑以下交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & I_3 \arrow[r, equal] \arrow[d] & I_3 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & I_2 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & I_3 \arrow[r, equal] \arrow[d] & I_3 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & I_1 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

在列正合列$0 \to I_3 \to G \to I_1 \to 0$中，由条件知$I_3$和$I_1$是弱 Gorenstein 内射左 R-模，根据命题 3.3 得G是弱 Gorenstein 内射模。那么有以下交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & G \arrow[rr] \arrow[dr] & & E \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \\
& & & D \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

其中E是内射模，G是弱 Gorenstein 内射模。同理可证在正合列$0 \to M \to I \to D \to N \to 0$中，$I$是内射的左 R-模，$D$是弱 Gorenstein 内射的。

命题 3.5 设 R 是交换环。如果M是弱 Gorenstein 内射左 R-模，那么对任意的平坦左 R-模F，$Hom_R(F,M)$是弱 Gorenstein 内射左 R-模。

证明：设M是弱 Gorenstein 内射模，则存在一个内射左 R-模的正合序列

$$I = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

使得$M = \mathrm{Ker}\left(I^0 \to I^1\right)$，于是

$$\cdots \to Hom_R(F,I_1) \to Hom_R(F,I_0) \to Hom_R\left(F,I^0\right) \to Hom_R\left(F,I^1\right) \to \cdots$$

是正合的且由文献[6]定理 3.44 知对任意的$i \in Z$，$\mathrm{Hom}_R(F,I_i)$和$\mathrm{Hom}_R\left(F,I^i\right)$是内射的。因此$\mathrm{Hom}_R(F,M) = Ker\left(Hom_R\left(F,I^0\right) \to Hom_R\left(F,I^1\right)\right)$，可证$\mathrm{Hom}_R(F,M)$是弱 Gorenstein 内射模。

称环 R 是左 IF 环。如果每个内射左 R-模是平坦的。

推论 3.6 设 R 是交换的 IF 环。如果M是弱 Gorenstein 内射左 R-模，那么对任意的内射左 R-模E，$Hom_R(E,M)$是弱 Gorenstein 内射左 R-模。

证明：证明过程与命题 3.5 类似。

我们称环 R 是 Gorenstein 环，如果它是双边 Noether 环且它作为模时有有限的自内射维数。若它的自内射维数为 n，则环 R 是 n-Gorenstein 环。

命题 3.7 设 R 是 n-Gorenstein 环，则以下条件等价：

1) M是弱 Gorenstein 内射右 R-模；
2) M是 Gorenstein 内射右 R-模；
3) M^+是 Gorenstein 平坦左 R-模；
4) $\left(M^+\right)^+$是 Gorenstein 内射右 R-模；
5) M^+是强余纯平坦左 R-模。

证明：(2)$\Rightarrow$(1) 显然的。

(1)$\Rightarrow$(2) 由文献[3]注 2.11 可证。

(2)$\Rightarrow$(3) 由文献[7]推论 10.3.9 可证。

(3)$\Rightarrow$(4) 假设M^+是 Gorenstein 平坦左 R-模，那么存在一个平坦左 R-模的正合序列

$$F = \cdots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots$$

其中$M^+ = Ker\left(F^0 \to F^1\right)$。于是

$$F^+ = \cdots \to (F_1)^+ \to (F_0)^+ \to \left(F^0\right)^+ \to \left(F^1\right)^+ \to \cdots$$

是正合的，其中对任意的 $i \in Z$， $(F_i)^+$ 与 $(F^i)^+$ 是内射右 R-模。又因为

$$\cdots \to F_1 \to F_0 \to M^+ \to 0$$

是正合的，所以

$$0 \to (M^+)^+ \to (F_0)^+ \to (F_1)^+ \to \cdots$$

是正合的且 $(M^+)^+ = Ker((F_0)^+ \to (F_1)^+)$。下证对任意的内射右 R-模 E 使得 $Hom_R(E, F^+)$ 正合。因为

$$\cdots \to E \otimes F_1 \to E \otimes F_0 \to E \otimes F^0 \to E \otimes F^1 \to \cdots$$

是正合的，于是

$$\cdots \to (E \otimes F_1)^+ \to (E \otimes F_0)^+ \to (E \otimes F^0)^+ \to (E \otimes F^1)^+ \to \cdots$$

是正合的，我们可以构造同构映射

$$\eta : \mathrm{Hom}(E \otimes F, Q/Z) \to Hom(E, Hom_R(F, Q/Z))$$

因此我们可以得到

$$\cdots \to Hom(E, (F^1)^+) \to Hom(E, (F^0)^+) \to Hom(E, (F_0)^+) \to Hom(E, (F_1)^+) \to \cdots$$

是正合的，即 $(M^+)^+$ 是 Gorenstein 内射右 R-模。

(4) $\Rightarrow$ (5) 因为 $(M^+)^+$ 是 Gorenstein 内射右 R-模。那么存在正合列

$$0 \to (M^+)^+ \to (F_0)^+ \to (F_1)^+ \to \cdots$$

且每个 $(F_i)^+$ 是内射右 R-模且

$$0 \to Hom(E, (M^+)^+) \to Hom(E, (F_0)^+) \to Hom(E, (F_1)^+) \to \cdots$$

是正合的。那么对所有的 $i \geq 1$，$Ext^i(E, (M^+)^+) = 0$。因此我们有 $Tor_i(E, M^+)^+ \cong Ext^i(E, (M^+)^+) = 0$。即 $Tor_i(E, M^+) = 0$，可证 M^+ 是强余纯平坦左 R-模。

(5) $\Rightarrow$ (3) 设 R 是 n-Gorenstein 环，那么对任意的内射右 R-模 E， $Pd(E_R) \leq n$。因为当 $i \geq n+1$ 时，$Tor_i(E, M^+) = 0$。作 M^+ 的平坦分解

$$\cdots \to F_1 \to F_0 \to M^+ \to 0$$

其中对任意的 $i \geq Z$， F_i 是平坦模。那么

$$\cdots \to E \otimes F_1 \to E \otimes F_0 \to E \otimes M^+ \to 0$$

是正合的。同理作 M^+ 的余真的右平坦分解

$$0 \to M^+ \to F^0 \to F^1 \to \cdots$$

其中对任意的 $i \geq Z$， F^i 是平坦模。那么

$$0 \to E \otimes M^+ \to E \otimes F^0 \to E \otimes F^1 \to \cdots$$

是正合的。因此可以得到正合序列

$$\cdots \to E \otimes F_1 \to E \otimes F_0 \to E \otimes F^0 \to E \otimes F^1 \to \cdots$$

因此 M^+ 是 Gorenstein 平坦左 R-模。

定理 3.8 设 R 是任意环。若 $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots$ 是弱 Gorenstein 内射左 R-模构成的序列，则正向极限 $\underrightarrow{Lim}M_n$ 是弱 Gorenstein 内射的。

证明：结合文献[8]，我们只要证明弱 Gorenstein 内射模类在良序正向极限下封闭。设 $(M_n)_{n<\lambda}$ 是一个弱 Gorenstein 内射模良序正向系统。我们假设 $(M_n)_{n<\lambda}$ 是连续的。如果 ω 是 $\omega<\lambda$ 的极限序，那么 $\underrightarrow{Lim}M_n = M_\omega$。利用超限归纳法证明 $\underrightarrow{Lim}M_n$ 是弱 Gorenstein 内射的。

当 $\lambda = n = 1$ 时，$\underrightarrow{Lim}M_n = M_1$ 是弱 Gorenstein 内射的，结论成立。假设当 $\lambda = n < \omega$ 时，$\underrightarrow{Lim}M_n = M_{n-1}$ 是弱 Gorenstein 内射的，下证当 $\lambda = \omega$ 时，$\underrightarrow{Lim}M_n\,(n<\omega)$ 是弱 Gorenstein 内射的。

因为 M_0 是弱 Gorenstein 内射的，所以有正合列

$$0 \to M_0 \to I_0^0 \to I_0^1 \to I_0^2 \cdots$$

其中对任意的 $i \ge 0$，I_0^i 都是内射的，令 $K_0^i = Ker\left(I_0^i \to I_0^{i+1}\right)$。那么由文献[2]推论 2.11 知 K_0^i 是弱 Gorenstein 内射的且 $i=0$ 时 $K_0^0 = M_0$。作 $M_0 \to M_1$ 和 $M_0 \to I_0^0$ 的推出图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & I_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & E \arrow[r] & K_0^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

在行正合列 $0 \to M_1 \to E \to K_0^1 \to 0$ 中，M_1 和 K_0^1 是弱 Gorenstein 内射的，结合命题 3.3 得 E 是弱 Gorenstein 内射的。因此存在正合列

$$0 \to E \to I_0^1 \to N \to 0$$

其中 I_1^0 是内射的，N 是弱 Gorenstein 内射的。考虑以下推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & I_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_1^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

在列正合列 $0 \to K_0^1 \to K_1^1 \to N \to 0$，$K_0^1$ 和 N 是弱 Gorenstein 内射左 R-模，同理可得 K_1^1 也是弱 Gorenstein 内射的。那么通过态射 $M_0 \to M_1$，可诱导出以下正合列的态射：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & I_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & I_1^0 \arrow[r] & K_1^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

同理，我们可通过态射 $K_0^1 \to K_1^1$ 诱导出以下正合列的态射：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_0^1 & \longrightarrow & I_0^1 & \longrightarrow & K_0^2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_1^1 & \longrightarrow & I_1^1 & \longrightarrow & K_1^2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 I_1^1 是内射的， K_1^2 是弱 Gorenstein 内射的。继续重复上述过程，我们可得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & I_0^0 & \longrightarrow & I_0^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & I_1^0 & \longrightarrow & I_1^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & I_2^0 & \longrightarrow & I_2^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

其中每行都正合，对任意的 $i \geq 0, j \geq 0$， I_j^i 是内射的左 R-模。因此上述每一列又是一个正向系，所以我们可获得一个正合列

$$0 \to \underrightarrow{\mathrm{Lim}} M_n \to \underrightarrow{\mathrm{Lim}} I_n^0 \to \underrightarrow{\mathrm{Lim}} I_n^1 \to \cdots$$

其中 $\underrightarrow{\mathrm{Lim}} I_n^i$ 是内射的。由引理 3.1(2)知 $\underrightarrow{\mathrm{Lim}} M_n$ 是弱 Gorenstein 内射的。

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Enochs, E.E., Jenda, O.M.G. and Torrecillas, B. (1993) Gorensteinflat Modules. *Journal of Nanjing University* (*Natural Sciences*), No. 10, 1-9.

[3] GAO, Z.H. (2012) Weak Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **12**, Article ID 1250165. https://doi.org/10.1142/S0219498812501654

[4] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1993) Copure Injectivere Solution, Flat Resolution and Dimension. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **34**, 203-211.

[5] 王娟. 关于弱 GORENSTEIN 内射模和平坦模的一个注记[J]. 青海大学学报, 2019, 37(6): 80-85.

[6] Rotman, J.J. (1979) An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, New York, 30-60.

[7] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. Walter De Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[8] Enochs, E.E. and Lopez-Ramos, J.A. (2002) Kaplansky Classes. *Rend Seminmat Univ Padova*, No. 107, 67-79.