Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(11), 1781-1787
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1111201

模糊Riesz空间上模糊Riesz同态性质的研究

刘　宵，程　娜*

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2021年9月25日；录用日期：2021年10月28日；发布日期：2021年11月4日

摘　要

本文首先讨论了模糊Riesz空间上模糊Riesz同态保持的一些性质，如：模糊Riesz子空间，模糊理想，模糊投影带等等。其次，给出了模糊Riesz同态的等价刻画。最后，讨论了模糊Riesz同态下相对模糊一致收敛的一些性质。

关键词

模糊Riesz空间，模糊Riesz同态，模糊Dedekind完备，模糊一致完备

The Properties of Fuzzy Riesz Homomorphism on Fuzzy Riesz Space

Xiao Liu, Na Cheng*

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Sep. 25th, 2021; accepted: Oct. 28th, 2021; published: Nov. 4th, 2021

Abstract

In this paper, we first discuss some properties of fuzzy Riesz homomorphism preservation on fuzzy Riesz space, such as fuzzy Riesz subspace, fuzzy ideal, fuzzy projection band and so on. Secondly, the equivalent characterization of fuzzy Riesz homomorphism is given. Finally, some properties of relative fuzzy uniform convergence under fuzzy Riesz homomorphism are discussed.

*通讯作者。

文章引用: 刘宵，程娜. 模糊 Riesz 空间上模糊 Riesz 同态性质的研究[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1781-1787.
DOI: 10.12677/pm.2021.1111201

Keywords

Fuzzy Riesz Space, Fuzzy Riesz Homomorphism, Fuzzy Dedekind Complete, Uniformly Fuzzy Complete

1. 引言

1965 年，Zadeh [1]提出了模糊集的概念。1971 年，他在文献[2]中，通过自反性、反对称性和传递性提出了模糊序关系的概念。1992 年，Venugopalan [3]定义并讨论了模糊序集。随后，Beg 和 Islam 研究了模糊 Riesz 空间[4]、模糊序线性空间[5]、s-完备模糊 Riesz 空间[6]和模糊 Archimedean 空间[7]。2015 年 Hong [8]引入了模糊 Riesz 子空间、模糊理想、模糊带和模糊投影带的概念。

序同态在模糊拓扑中起着重要的作用。模糊格上的序同态的概念，揭示了模糊拓扑中两种不同拓扑之间的联系[10] [11] [12] [13] [14]。

同态有着非常重要的作用，它们在拓扑、代数、向量值函数、信息系统中起着至关重要的作用。因此，不同的模糊类型在模糊领域中发挥着重要的作用。本文研究了模糊 Riesz 空间上的模糊同态，在模糊 Riesz 空间中有重要的作用。Mobashir Iqbal 和 Zia Bashir 在文献[9]中利用模糊 Riesz 同态讨论了 Archimedean 模糊 Riesz 空间上模糊 Dedekind 完备性的存在性。本文首先讨论了模糊 Riesz 空间上模糊 Riesz 同态保持的一些性质，如：模糊 Riesz 子空间，模糊理想，模糊投影带等等。其次，给出了模糊 Riesz 同态的等价刻画。最后，讨论了模糊 Riesz 同态下相对模糊一致收敛的一些性质。

2. 预备知识

本文使用以下符号。

定义 2.1 假设 E 是一个论域。R 是 $E\times E$ 上的模糊子集，满足以下条件：

(i) (自反性)对 $x\in E$， $\mu_R(x,x)=1$；

(ii) (反对称性)对 $x,y\in E$，若 $\mu_R(x,y)+\mu_R(y,x)>1$，有 $x=y$；

(iii) (传递性)对 $x,z\in E$，有 $\mu_R(x,z)\ge \bigvee_{y\in E}\left[\mu_R(x,y)\wedge\mu_R(y,z)\right]$。

具有模糊序的集合称为模糊序集。

假设 E 是模糊序集，$x\in E$，$\uparrow x$ 表示对所有 $y\in E$，有 $(\uparrow x)(y)=\mu(x,y)$；同理，$\downarrow x$ 表示对所有 $y\in E$，有 $(\downarrow x)(y)=\mu(y,x)$。如果 A 是 E 的论域子集，则 $\uparrow A=\bigcup_{x\in A}(\uparrow x)$， $\downarrow A=\bigcup_{x\in A}(\downarrow x)$。

定义 2.2 假设 A 是模糊序集 E 的论域子集，则子集 A 的上界 $U(A)$ 定义如下：

$$U(A)(y)=\begin{cases}0, & \text{存在 } x\in A, \text{有 } (\uparrow x)(y)\le \dfrac{1}{2},\\ \left(\bigcap_{x\in A}\uparrow x\right)(y), & \text{其他.}\end{cases}$$

子集 A 的下界 $L(A)$ 定义如下：

$$L(A)(y)=\begin{cases}0, & \text{存在}\ x\in A,\text{有}(\downarrow x)(y)\le\dfrac{1}{2},\\ \left(\bigcap\limits_{x\in A}\downarrow x\right)(y), & \text{其他}.\end{cases}$$

如果存在 $x\in E$，有 $U(A)(x)>0$，记做 $x\in U(A)$。同理，当 $L(A)(x)>0$ 时，记做 $x\in L(A)$。若存在 $x\in E$，使得 $x\in U(A)$，称 A 是上有界的，元素 x 叫做 A 的上界。类似地，若存在 $x\in A$，使得 $x\in L(A)$，称 A 是下有界的，元素 x 叫做 A 的下界。若 A 有上界和下界，则称 A 有界。

若元素 z 满足(i) $z\in U(A)$；(ii) 若 $y\in U(A)$，有 $y\in U(z)$，则称元素 z 为 A 的上确界，记作 $z=\sup A$。同理，若 z 满足(i) $z\in L(A)$；(2) 若 $y\in L(A)$，有 $y\in L(z)$，则称元素 z 为 A 的下确界，记作 $z=\inf A$。

定义 2.3 (实)线性空间 E 是模糊序集，如果满足以下两个条件，则称 E 是模糊序线性空间：

(1) 若 $x_1,x_2\in E$ 且 $\mu(x_1,x_2)>\frac{1}{2}$，对 $x\in E$，有 $\mu(x_1,x_2)\le\mu(x_1+x,x_2+x)$；

(2) 若 $x_1,x_2\in E$ 且 $\mu(x_1,x_2)>\frac{1}{2}$，对 $0<\alpha\in R$，有 $\mu(x_1,x_2)\le\mu(\alpha x_1,\alpha x_2)$。

定义 2.4 如果模糊序向量空间是模糊格称为模糊 Riesz 空间。

定义 2.5 假设 E 是模糊 Riesz 空间，K 是 E 的向量子空间，若 $x,y\in K$，有 $x\vee y\in K$ 且 $x\wedge y\in K$，称 K 是 E 的模糊 Riesz 子空间。

定义 2.6 模糊 Riesz 空间 E 上的子集 A 称为模糊实的，如果对 $x\in A$，且 $\mu(|x|,|y|)>\frac{1}{2}$，有 $y\in A$。即 A 是 E 的模糊实子集。E 的模糊实向量子空间 I 称为 E 的模糊理想。

定义 2.7 假设 D 是模糊 Riesz 空间 E 的子集，E 中包含 D 的最小模糊理想称为由 D 产生的模糊理想，记为 I_D。如果 D 是单元素，即：$D=\{x\}$，$x\in E$，记 I_D 为 I_x，称由 x 生成的主模糊理想。

定义 2.8 假设 (E,u) 是模糊 Riesz 空间，如果 E 的任意一个非空子集有上界并且有上确界，称 E 是模糊 Dedekind 完备的。

定义 2.9 Directed 序向量空间 E 称为模糊 Archimedean 空间，如果对任意的非负元素 $x\in E$，集合 $\{\lambda x|\lambda>0\}$ 没有上界。

定义 2.10 假设 $(E,u),(F,v)$ 是模糊 Riesz 空间，算子 $T:E\to F$，如果 $\mu(0,x)>\frac{1}{2}$，有 $v(0,T(x))>\frac{1}{2}$，则称 T 是模糊正算子。

定义 2.11 假设 $(E,u),(F,v)$ 是模糊 Riesz 空间，算子 $T:E\to F$ 是模糊正算子，如果对于模糊序有界集 $C\subseteq E$，有 $T(C)\subseteq F$ 也是模糊序有界集，则称 T 是模糊序有界的。

定义 2.12 假设 $(E,u),(F,v)$ 是模糊 Riesz 空间，$FL(E,F)$ 表示 (E,u) 到 (F,v) 上所有模糊线性算子全体。$FL_b(E,F)$ 表示 (E,u) 到 (F,v) 上所有的模糊序有界算子全体。

定义 2.13 假设 $(E,u),(F,v)$ 是模糊 Riesz 空间，若函数 $p:E\to F$ 满足以下两个条件，称 p 是模糊次线性的：

(1) 对 $x,y\in E$，有 $\mu(p(x+y),p(x)+p(y))>\frac{1}{2}$；

(2) 对 $x\in E$ 和 $\lambda\in R^+$，有 $p(\lambda x)=\lambda p(x)$。

定义 2.14 设 E 是模糊 Riesz 空间，A 是 E 的模糊理想，如果 $x_n\subseteq(A)^+$ 且 $x_n\uparrow x$，有 $x\in A$，则称 A 是 E 的模糊 σ-理想。

对于模糊 Riesz 空间理论相关的知识，请参考文献[4] [5] [6] [7] [8]。

3. 模糊 Riesz 同态的性质

定义 3.1 设$(E,u),(F,v)$是模糊 Riesz 空间，算子$T:E\to F$，如果$x,y\in E$，有$T(x\vee y)=T(x)\vee T(y)$，则称算子 T 是模糊 Riesz 同态。若 T 是双射，则称 T 是模糊 Riesz 同构。

考虑算子$T:C[0,1]\to L_1[0,1]$，其中$Tf(t)=tf(t),t\in[0,1]$，则 T 是模糊格同态。考虑算子$T:C[0,1]\to R$，其中$T(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 T 不是模糊格同态。

定理 3.2 假设$(E,u),(F,v)$是模糊 Riesz 空间，$T:E\to F$ 是模糊 Riesz 同态，则以下结论成立：

(1) $v(0,Tx)>\frac{1}{2}$当且仅当存在$z\in Ker(T)$，$\mu(0,z)>\frac{1}{2}$，使得$\mu(0,x+z)>\frac{1}{2}$。$v(Tx,Ty)>\frac{1}{2}$当且仅当存在$w\in E$，使得$w\ge x,w\ge y$且$Tw=Tx$。

(2) $v(|Tx|,|Ty|)>\frac{1}{2}$当且仅当存在$w\in Ker(T)$，使得$\mu(|w|,|x|)>\frac{1}{2}$且$\mu(|x-w|,|y|)>\frac{1}{2}$。

证明：

(1) 假设$v(0,Tx)>\frac{1}{2}$，由[9]中定理 3.16 可得$Tx=T(x^+)=(Tx)^+$，因此$T(x^+-x)=0$，即$T(x^-)=0$。令$z=x^-$，则$\mu(0,z)>\frac{1}{2}$且$z\in Ker(T)$，又因$x+z=x+x^-=x^+$，则$\mu(0,x+z)>\frac{1}{2}$。

另一方面，假设$z\in Ker(T)$且$\mu(0,x+z)>\frac{1}{2}$，因$Tx=T(x+z)$，则$v(0,Tx)>\frac{1}{2}$。因此$v(Tx,Ty)>\frac{1}{2}$当且仅当存在$z\in Ker(T)$且$\mu(0,z)>\frac{1}{2}$，使得$\mu(0,x-y+z)>\frac{1}{2}$。取$w=x+z$，则$v(Tx,Ty)>\frac{1}{2}$当且仅当存在$w\in E$，使得$\mu(x,w)>\frac{1}{2},\mu(y,w)>\frac{1}{2}$且$Tw=Tx$。

(2) 假设$v(|Tx|,|Ty|)>\frac{1}{2}$，由[9]中定理 3.16 可知$v(T|x|,T|y|)>\frac{1}{2}$，由性质(1)，存在$z\in Ker(T)$，使得$\mu(|x|,|y|+z)>\frac{1}{2}$。而$\mu(|x|-|y|,z)>\frac{1}{2}$，$\mu(|x|-|y|,|x|)>\frac{1}{2}$，因此$\mu(|x|-|y|,|x|\wedge z)>\frac{1}{2}$。即：$|x|\wedge z\in Ker(T)$且$\mu(|x|,|y|+|x|\wedge z)>\frac{1}{2}$。因此可假设$\mu(|x|,|y|+z)>\frac{1}{2}$，其中$z\in Ker(T)$，$\mu(0,z)>\frac{1}{2}$，$\mu(z,|x|)>\frac{1}{2}$。由文献[4]定理 4.12 可知存在$z_1,z_2\in E^+$，使得$z=z_1+z_2$且$\mu(z_1,x^+)>\frac{1}{2},\mu(z_2,x^-)>\frac{1}{2}$。由文献[4]性质 4.7 可知$|x|-z=(x^+-z_1)+(x^--z_2)=|(x^+-z_1)+(x^--z_2)|=|(x^+-z_1)-(x^--z_2)|$。令$w=z_1-z_2$，则$|x|-z=|x-w|$。因$\mu(|x|-z,|y|)>\frac{1}{2}$，则当$w\in Ker(T)$时，有$\mu(|x-w|,|y|)>\frac{1}{2}$。且有$|w|=|z_1-z_2|=z_1+z_2=z$，$\mu(|w|,|x|)>\frac{1}{2}$。另一方面，令$w\in Ker(T)$，$\mu(|x-w|,|y|)>\frac{1}{2}$。因$\mu(|x-w|-|x|,|w|)>\frac{1}{2}$，则$(|x-w|-|x|)\in Ker(T)$。由此可得，$T(|x|)=T(|x-w|)$。由假设知$\mu(|x-w|,|y|)>\frac{1}{2}$，则$v(T(|x|),T(|y|))>\frac{1}{2}$，由此可得$v(|Tx|,|Ty|)>\frac{1}{2}$。

定理 3.3 假设 E 和 F 是模糊 Riesz 空间，$T:E\to F$ 是模糊 Riesz 同态，则以下结论成立：

(1) 如果 Z 是 E 的模糊 Riesz 子空间，则 $T(Z)$是 F 的模糊 Riesz 子空间。

(2) 如果 W 是 F 的模糊 Riesz 子空间，则$T^{-1}(w)=(x:x\in Z,Tx\in W)$是 E 的模糊 Riesz 子空间。

证明：(1) 假设 Z 是 E 的模糊 Riesz 子空间，下面证明 $T(Z)$是 F 的模糊 Riesz 子空间。令$h,q\in T(Z)$，

则存在 $x,y\in Z$，使得 $Tx=h,Ty=q$。由模糊 Riesz 同态的定义以及 Z 是 E 的模糊 Riesz 子空间可知 $Tx\vee Ty=T\left(x\vee y\right)\in T\left(Z\right)$。因此，$h\vee q\in T\left(Z\right)$。则 $T(Z)$是 F 的模糊 Riesz 子空间。

(2) 假设 W 是 F 的模糊 Riesz 子空间，下面证明 $T^{-1}\left(W\right)$ 是 E 的模糊 Riesz 子空间。令 $x,y\in T^{-1}\left(W\right)$，则 $Tx,Ty\in W$。因 W 是 F 的模糊 Riesz 子空间，因此 $Tx\vee Ty=T\left(x\vee y\right)\in W$，即 $x\vee y\in T^{-1}\left(W\right)$。所以 $T^{-1}\left(W\right)$ 是 E 的模糊 Riesz 子空间。

定理 3.4 假设 $(E,u),(F,v)$ 是模糊 Riesz 空间，$T:E\to F$ 是模糊 Riesz 同态。

(1) 若 B 是 E 的模糊理想，则 $T(B)$是 $T(E)$的模糊理想；

(2) 若 B_1 和 B_2 是 E 的模糊理想，则 $T\left(B_1\cap B_2\right)=T\left(B_1\right)\cap T\left(B_2\right)$。

证明：(1) 令 $x\in B^{+}$，则 $Tx,Ty\in W$。假设 $v\left(z,Tx\right)>\dfrac{1}{2}$ 且 $z\in\left(T\left(E\right)\right)^{+}$，下面证明 $z\in T\left(B\right)$。

若 $z\in T\left(E\right)$，则存在 $y\in E$，使得 $z=Ty$。因 $z\in\left(T\left(E\right)\right)^{+}$，则 $z=z^{+}=\left(Ty\right)^{+}=T\left(y^{+}\right)$。令 $w=x\wedge y^{+}$，则 $w\in B$。又因 T 是模糊同态且 $v\left(Ty^{+},Tx\right)>\dfrac{1}{2}$，则 $Tw=T\left(x\wedge y^{+}\right)=Tx\wedge Ty^{+}=Ty^{+}=z$。因此，存在 $w\in B$，使得 $Tw=z$，所以 $z\in T\left(B\right)$。即 $T(B)$是 $T(E)$的模糊理想。

(2) 假设 B_1 和 B_2 是 E 的模糊理想，首先证明 $T\left(B_1\cap B_2\right)=T\left(B_1\right)\cap T\left(B_2\right)$。令 $f\in T\left(B_1\cap B_2\right)$，则存在 $x\in B_1\cap B_2$，使得 $T\left(x\right)=f$。若 $x\in B_1\cap B_2$，则 $Tx\in T\left(B_1\right)$ 且 $Tx\in T\left(B_2\right)$，因此 $Tx\in T\left(B_1\right)\cap T\left(B_2\right)$。即 $f\in T\left(B_1\right)\cap T\left(B_2\right)$。另一方面，令 $f\in T\left(B_1\right)\cap T\left(B_2\right)$，则 $\left|f\right|\in T\left(B_1\right)\cap T\left(B_2\right)$。存在 $x\in B_1^{+},y\in B_2^{+}$，使得 $\left|f\right|=Tx,\left|f\right|=Ty$。令 $w=x\wedge y$，则 $w=B_1\cap B_2$，因 T 是模糊同态，则有 $Tw=T\left(x\wedge y\right)=Tx\wedge Ty=\left|f\right|$。因此，存在 $w=B_1\cap B_2$，使得 $Tw=\left|f\right|\in T\left(B_1\cap B_2\right)$。

定理 3.5 设 $(E,u),(F,v)$ 是模糊 Riesz 空间，$T:E\to F$ 是模糊 Riesz 同态。

(1) 若 B 是 $T(E)$的模糊理想，则 $T^{-1}\left(B\right)$ 是 E 的模糊理想。

(2) 若 B_1 是 F 的模糊理想，则 $T^{-1}\left(B_1\right)$ 是 E 的模糊理想。

证明：(1) 假设 B 是 $T(E)$的模糊理想，设 $\mu\left(x,y\right)>\dfrac{1}{2}$，其中 $y\in T^{-1}\left(B\right),x\geq 0$。下面证明 $x\in T^{-1}\left(B\right)$。

因 $y\in T^{-1}\left(B\right)$，则 $Ty\in B$。因 T 是模糊 Riesz 同态，则 $v\left(Tx,Ty\right)>\dfrac{1}{2}$ 且 $v\left(0,Tx\right)>\dfrac{1}{2}$。因 B 是 $T(E)$的模糊理想，所以 $Tx\in B$，即 $x\in T^{-1}\left(B\right)$。

(2) 假设 B_1 是 F 的模糊理想，则 $B_1\cap T\left(E\right)$ 是 $T(E)$的模糊理想。因此，$T^{-1}\left(B_1\right)=T^{-1}\left(B_1\cap T\left(E\right)\right)$ 是 E 的模糊理想。

定理 3.6 假设 $(E,u),(F,v)$ 是模糊 Riesz 空间，$T:E\to F$ 是模糊 Riesz 同态。如果 I_Z 是 E 中由元素 $z\in E^{+}$ 生成的模糊主理想，则 $T(I_Z)$是 $T(E)$中由元素 Tz 产生的模糊主理想。

证明：因为 I_Z 是 E 中的模糊理想，则 $T(I_Z)$是 $T(E)$中的模糊理想。下面证明 $T(I_Z)$是 $T(E)$中由元素 Tz 产生的模糊主理想。因 $z\in E^{+}$ 且 $z\in I_z$，则有 $Tz\in T\left(I_z\right)$，即 $T(E)$中由 Tz 产生的模糊理想是 $T(I_Z)$的子集。另一方面，令 $m\in\left(T\left(I_z\right)\right)^{+}$，则存在 $x\in I_z$ 满足 $m=Tx$。由文献[8]中定义 5.2 可得，存在实数 $\alpha>0$ 且 $\mu\left(x,\alpha z\right)>\dfrac{1}{2}$。因此，$v\left(x,\alpha Tz\right)>\dfrac{1}{2}$。即 m 属于 $T(E)$中由 Tz 产生的模糊理想。由此可得，$T(I_Z)$包含于 $T(E)$中由元素 Tz 产生的模糊理想。

定理 3.7 假设 E 和 F 是模糊 Riesz 空间，$T:E\to F$ 是模糊 Riesz 同态。若 B 是 E 的子集，则 $T(B^d)$ 是$(T(B))^d$ 的子集。

证明：假设 $z\in T\left(B^{d}\right)$，则存在 $x\in B^{d}$ 满足 $Tx=z$。取 $y\in B$，则 $x\perp y$ 且 $Ty\in T\left(B\right)$。因 $\left|Tx\right|\wedge\left|Ty\right|=T\left|x\right|\wedge T\left|y\right|=T\left(\left|x\right|\wedge\left|y\right|\right)=0$，则有 $Tx\perp Ty$。即 $z=Tx\in\left(T\left(B\right)\right)^{d}$。

定理 3.8 假设 E 和 F 是模糊 Riesz 空间，$T:E\rightarrow F$ 是模糊 Riesz 同态。则 E 中模糊投影带的像是 $T(E)$ 中的模糊投影带。

证明：假设 E_1 是 E 中的模糊投影带，E_2 是 E_1 的不交补，则 $E=E_1\oplus E_2$。由定理 2.3 可知，$T(E_1)$和 $T(E_2)$是 $T(E)$中的模糊理想，且 $T(E_1)\perp T(E_2)$。令 $f\in T(E)$，则存在 $x\in E$，使得 $f=Tx$。取 $x=x_1+x_2$，其中 $x_1\in E_1$，$x_2\in E_2$，则 $f=Tx=Tx_1+Tx_2$，其中 $Tx_1\in T(E_1)$，$Tx_2\in T(E_2)$。因此，$TE=T(E_1)+T(E_2)$，即 $T(E_1)$和 $T(E_2)$是 $T(E)$中的模糊带。由模糊投影带的定义可知 $T(E_2)$是 $T(E)$中的模糊投影带。

定义 3.9 假设 E 和 F 是模糊 Riesz 空间，$T:E\rightarrow F$ 是模糊 Riesz 同态，如果 $x=\sup x_n\ (n=1,2,\cdots)$ 在 E 中成立，有 $Tx=\sup Tx_n$ 在 F 中成立，则称 T 是模糊 σ-同态。

定理 3.10 假设 T 是模糊 Riesz 空间 (E,u) 到模糊 Riesz 空间 (F,v) 映上的模糊同态，则以下结论等价：

(1) T 是模糊 Riesz σ-同态；

(2) 对 F 中模糊 σ-理想 A，$T^{-1}(A)$是 E 中的模糊 σ-理想；

(3) T 的核 $Ker(T)$是 E 中的模糊 σ-理想。

证明：(1) $\Rightarrow$ (2) 假设 T 是模糊 Riesz σ-同态，A 是 F 中的模糊 σ-理想。令 $y_n\uparrow y$ 且 $y_n\in\left(T^{-1}(A)\right)^+$。因 T 是模糊 Riesz σ-同态，则 $Ty_n\in A^+$ 且 $Ty_n\uparrow Ty$。又因 A 是模糊 σ-理想，则 $Ty\in A$，因此 $y\in T^{-1}(A)$。即 $T^{-1}(A)$ 是模糊 σ-理想。

(2) $\Rightarrow$ (3) 因 $KerT$ 是 F 中的模糊 σ-理想{0}的逆像，因此 $KerT$ 是 E 中的模糊 σ-理想。

(3) $\Rightarrow$ (1) 假设 $KerT$ 是模糊 σ-理想，且 $y_n\in E^+,y_n\uparrow y$。下面证明 $Ty_n\uparrow Ty,Ty_n\in F^+$。设 $\mu(x,y)>\frac{1}{2}$ (否则用 $x\wedge y$ 替换 x)，取 $\nu(Ty_n,Tx)>\frac{1}{2},\nu(Tx,Ty)>\frac{1}{2}$，令 $z_n=y_n\vee x-x$，则 $\mu(0,z_n)>\frac{1}{2},z_n\uparrow x\vee y-x=y-x$。因 $Tz_n=Ty_n\vee Tx-Tx=Tx-Tx$，则 $z_n\in KerT$。因 $KerT$ 是模糊 σ-理想，则 $y-x\in KerT$，即 $Tx=Ty$，因此 $Ty_n\uparrow Ty$。

定义 3.11 假设 (E,u) 是模糊 Riesz 空间，如果存在 $w\in E^+$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在指标集 $n(\varepsilon)$，使得当 $n>n(\varepsilon)$ 时，有 $\mu(|x-x_n|,\varepsilon w)>\frac{1}{2}$，则称 E 中的序列 $\{x_n\}$ 模糊 w-一致收敛于 x。

定义 3.12 假设 (E,u) 是模糊 Riesz 空间，对于 E 中的序列 $\{x_n\}$，若存在 $w\in E^+$，使得 $\{x_n\}$ 模糊 w-一致收敛于 $x\in E$，则称序列 $\{x_n\}$ 相对模糊一致收敛于 $x\in E$。

定义 3.13 假设 (E,u) 是模糊 Riesz 空间，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在指标集 $n(\varepsilon)$，使得当 $m,n>n(\varepsilon)$ 时，有 $\mu(|x_m-x_n|,\varepsilon w)>\frac{1}{2}$，则称序列 $\{x_n\}$ 为模糊 w-一致柯西列。

若对任意的 $w\in E$，每个模糊 w-一致柯西列都有模糊 w-一致极限，则称模糊 Riesz 空间是模糊一致完备的。

定理 3.14 假设 $(E,u),(F,v)$ 是模糊 Riesz 空间，$T:E\rightarrow F$ 是模糊 Riesz 同态，则以下结论成立：

(1) E 中相对模糊一致收敛柯西列的像是 F 中的相对模糊一致收敛柯西列。

(2) 若 $\{Tx_n\}$ 是 F 中的相对模糊一致收敛柯西列，则存在子列 $\{Tx_{n_k}\}$ 和 E 中对应的序列 $\{y_n\}$，使得对所有的 k，有 $Ty_k=Tx_{nk}$，且 $\{y_n\}$ 是 E 中相对模糊一致收敛柯西列。

(3) 若 E 是模糊一致完备的，则 F 也是模糊一致完备的。即：模糊 Riesz 同态将模糊一致完备空间映成模糊一致完备空间。

证明：(1) 假设 $\{x_n\}$ 是相对模糊一致收敛柯西列，由定义可知，存在 $w\in E^+$，使得当 $m,n>n(\varepsilon)$ 时，有 $\mu(|x_m-x_n|,\varepsilon w)>\frac{1}{2}$。因此，对 $m,n>n(\varepsilon)$，有 $\nu(|Tx_m-Tx_n|,\varepsilon Tu)>\frac{1}{2}$，则 $\{Tx_n\}$ 也是相对模糊一致收

敛柯西列。

(2) 假设$\{Tx_n\}$是相对模糊一致收敛柯西列，则存在$w \in E^+$，使得$\{Tx_n\}$是模糊 Tw-一致收敛柯西列。假设$\{Tx_{n_k}\}$是$\{Tx_n\}$的子序列，且$n_1 < n_2 < \cdots$，$\nu\left(\left|Tx_{n_{k+1}} - Tx_{n_k}\right|, 2^{-k}Tw\right) > \frac{1}{2}$对所有的 k 成立。由定理 2.1 可知，存在$\{z_n\}$，使得对所有的 k，有$Tz_k = Tx_{n_{k+1}} - Tx_{n_k}$且$\mu\left(\left|z_k\right|, 2^{-k}w\right) > \frac{1}{2}$。令$y_k = x_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{k-1}$对所有的 k 满足$Ty_k = Tn_k$，则$\{y_n\}$是模糊 w-一致柯西列。

(3) 假设 E 是模糊一致完备的，且$\{Tx_n\}$是模糊 Tw-一致收敛柯西列。由(2)可知，存在子序列$\{Tx_{n_k}\}$和对应的序列$\{y_n\}$，使得$Ty_k = Tx_{n_k}$，且序列$\{y_n\}$是模糊 w-一致柯西列。因 E 是模糊一致完备的，$\{y_n\}$模糊 w-一致收敛于$y \in E$，$\{Ty_k\}$模糊 Tw-一致收敛于 Ty。因此，当$k \to \infty$，$\{Ty_k\}$模糊 Tw-一致收敛于 Ty。

基金项目

国家自然科学基金资助(11801458)。

参考文献

[1] Zadeh, L. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Zadeh, L. (1971) Similarity Relations and Fuzzy Ordering. *Information Sciences*, **3**, 177-200. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1

[3] Venugopalan, P. (1992) Fuzzy Ordered Sets. *Fuzzy Sets & Systems*, **46**, 221-226. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90134-P

[4] Beg, I. and Islam, M.U. (1994) Fuzzy Riesz Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **2**, 211-241.

[5] Beg, I. and Islam, M.U. (1995) Fuzzy Ordered Linear Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **3**, 659-670.

[6] Beg, I, (1997) σ-Complete Fuzzy Riesz Spaces. *Results in Mathematics*, **31**, 292-299. https://doi.org/10.1007/BF03322166

[7] Beg, I. and Islam, M.U. (1997) Fuzzy Archimedean Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **5**, 413-423.

[8] Liang, H. (2015) Fuzzy Riesz Subspaces, Fuzzy Ideals, Fuzzy Bands and Fuzzy Band Projections. *Annals of the West University of Timisoara*: *Mathematics and Computer Science*, **53**, 77-108. https://doi.org/10.1515/awutm-2015-0005

[9] Iqbal, M. and Bashir, Z. (2020) The Existence of Fuzzy Dedekind Completion of Archimedean Fuzzy Riesz Space. *Computational & Applied Mathematics*, **39**, Article No. 116. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1139-3

[10] Li, S.G. (1999) On Two Weaker Forms of Continuous Order-Homomorphisms. *Fuzzy Sets and Systems*, **101**, 469-475. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00103-6

[11] 陈水利. LF 拓扑空间上的若干序同态[J]. 陕西师大学报(自然科学版), 1988, 16(3): 15-19.

[12] Chen, S.L. and Cheng, J.S. (1994) The Characterizations of Semi-Continuous and Irresolute Order-Homomorphisms on Fuzzes. *Fuzzy Sets & Systems*, **64**, 105-112. https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90012-4

[13] Wang, G.J. (1984) Order-Homomorphisms on Fuzzes. *Fuzzy Sets and Systems*, **12**, 281-288. https://doi.org/10.1016/0165-0114(84)90074-5

[14] Wang, G.J. (1992) Theory of Topological Molecular Lattices. *Fuzzy Sets & Systems*, **47**, 351-376. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90301-J