Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 2018-2022
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112225

一种传递群的构造举例

李　诺，邓　奇

云南师范大学，云南　昆明

收稿日期：2021年11月7日；录用日期：2021年12月8日；发布日期：2021年12月15日

摘　要

对于传递置换群G在对应的对称群中的正规化子N，N依共轭作用在子群G上，得到一个同态$\Psi: N \to Aut(G)$。Dixon在经典专著《Permutation Groups》中对此同态的同态像与G的自同构群的关系进行了研究，描述了位于$Im\Psi$下G的全体自同构。在此基础上Dixon提出构造一个例子，使得对于传递群G，满足Ψ的像不是G的全体自同构。本文我们在四次对称群上提供这样一个例子。

关键词

传递群，自同构群，正规化子，中心化子

Construction of an Example of a Transitive Group

Nuo Li, Qi Deng

Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Nov. 7th, 2021; accepted: Dec. 8th, 2021; published: Dec. 15th, 2021

Abstract

In this paper, we will consider the normalizer of the subgroup of the transitive permutation groups. The N of G acts naturally on the set G by conjugation, this gives a homomorphism $\Psi: N \to Aut(G)$. Dixon studied the relationship between the homomorphic image and the automorphisms of G in his monograph *Permutation Groups*. He described the automorphisms of G which lie in the image of Ψ. Based on this, he proposed to construct an example G for which the image of this homomorphism is not all of automorphisms of G. In this short note, we will provide such an example on the quartic symmetry group.

文章引用: 李诺, 邓奇. 一种传递群的构造举例[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 2018-2022.
DOI: 10.12677/pm.2021.1112225

Keywords

Transitive Group, Automorphism Group, Normalizer, Centralizer

1. 前言

群的概念最先是由 Galois 在研究方程根式解问题时提出，Galois 对置换群进行了研究，并通过置换群研究对一般群理论的发展作出了最重要的贡献。随后 Burnside、Wielandt、Dixon 和 Praeger 等人对置换群的研究工作得到许多优秀成果，详见[1] [2] [3] [4]。而在群论的研究中，子群的正规性的研究通常被学者作为出发点，子群的正规化子能很好地度量子群的正规性。另外子群的自同构群也是有限群中较为困难的问题之一，因此对子群正规化子和自同构群的研究是很有意义的工作。

本文考虑 Ω 上对称群 $Sym(\Omega)$ 的子群 G 在 $Sym(\Omega)$ 中的正规化子 N，N 依共轭作用在群 G 上，得到一个同态 $\Psi: N \to Aut(G)$，$\Psi(x): u \mapsto x^{-1}ux$。然后对同态的像和群 G 的自同构进行研究，Dixon 在([1], 4.2 节)中提出举例构造一个传递群 G，满足 Ψ 的像不是 G 的全体自同构。本文构造这样的例子如下：

构造 1.1 设 $\Omega=\{1,2,3,4\}$，$G=D_8$，$G \le Sym(\Omega)$ 传递，$N=N_{Sym(\Omega)}(G)$，N 在 G 上有共轭作用，可定义同态映射：

$$\Psi: N \to Aut(G)$$

$$\Psi(x): u \mapsto x^{-1}ux$$

$Ker\Psi = C_{Sym(\Omega)}(G)$，则 $Im\Psi < Aut(G)$。

2. 预备知识

本文使用的符号和语言都是标准的，引用的一些有限群的基本概念和定理列举如下，参见[1]和[5]。

定义 2.1 设 Ω 是一个非空集合，Ω 中的元素称为点，Ω 到自身的一个双射称为 Ω 上的一个置换，Ω 上的全体置换构成的群称为 Ω 上的**对称群**，记为 $Sym(\Omega)$。

定义 2.2 设 G 是一个群，H 是 G 的子群。若 $g \in G$，$H^g = H$，则称元素 g 正规化 H，G 中所有正规化 H 的元素构成的集合称为 H 在 G 中**正规化子**，记为：

$$N_G(H)=\{g \in G \mid H^g = H\},$$

如果 $N_G(H)=G$，则称 H 是 G 的**正规子群**，记作 $H \trianglelefteq G$。

定义 2.3 设 G 是一个群，H 是 G 的子群，若元素 g 满足对所有 $h \in H$，恒有 $h^g = h$，则称元素 g 中心化 H，而称 G 中所有中心化 H 的元素构成的集合称为 H 在 G 中**中心化子**，记为：

$$C_G(H)=\{g \in G \mid h^g = h, \forall h \in H\}.$$

定义 2.4 我们称映射 $\alpha: G \to G_1$ 为群 G 到 G_1 的一个同态映射，如果

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \forall a,b \in G$$

如果 α 是单射，则称为单同态，α 是满射，则称为满同态；而如果 α 是双射，则称 α 为 G 到 G_1 的同

构映射。这时称群 G 和 G_1 同构，记作 $G\cong G_1$。

群到自身的同构称为群的自同构，以 $Aut(G)$ 表示 G 的全体自同构组成的集合，叫做 G 的自同构群。

定义 2.5 平面上正 n 边形($n\ge 3$)的全体对称的集合 D_{2n}。它包含 n 个旋转和 n 个反射(沿 n 条不同的对称轴)，对于变换的乘法组成一个群，叫做二面体群 D_{2n}，它包含 $2n$ 个元素。

定理 2.6 设 $\alpha:G\to H$ 是同态映射，则 $Ker\alpha\trianglelefteq G$，且 $G^{\alpha}\cong G/Ker\alpha$。

定理 2.7 (N/C 定理)设 H 是 G 的子群，则 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $Aut(H)$ 的一个子群。

定理 2.8 ([1], Theorem 4.2B)设 $G\le Sym(\Omega)$ 传递，$\alpha\in\Omega$，$N=N_{Sym(\Omega)}(G)$，N 在 G 上有共轭作用，可定义同态映射：

$$\Psi:N\to Aut(G)$$

$$\Psi(x):u\mapsto x^{-1}ux$$

$Ker\Psi=C_{Sym(\Omega)}(G)$，$\sigma\in Aut(G)$，则 $\sigma\in Im\Psi$ 当且仅当 $(G_\alpha)^{\sigma}$ 是 G 的点稳定子。

3. 主要定理及结果证明

本节利用置换群和有限群的基础知识，对主要定理进行证明，并构造所需要的例子，结果的正确性证明如下：

定理 2.6 设 $\alpha:G\to H$ 是同态映射，则 $Ker\alpha\trianglelefteq G$，且 $G^{\alpha}\cong G/Ker\alpha$。

证明：对 $\forall a,b\in Ker\alpha$，有 $a^{\alpha}=b^{\alpha}=1$，$\left(ab^{-1}\right)^{\alpha}=a^{\alpha}\left(b^{-1}\right)^{\alpha}=\left(b^{\alpha}\right)^{-1}=1$，

所以 $ab^{-1}\in Ker\alpha$，故 $Ker\alpha\le G$；$\forall g\in G$，$\forall a\in Ker\alpha$，有 $\left(a^{g}\right)^{\alpha}=\left(g^{-1}ag\right)^{\alpha}=\left(g^{-1}\right)^{\alpha}a^{\alpha}g^{\alpha}=1$，所以 $\left(a^{g}\right)^{\alpha}\in Ker\alpha$，故 $(Ker\alpha)^{g}\subseteq Ker\alpha$，所以 $Ker\alpha\trianglelefteq G$。

下面证明 $G^{\alpha}\cong G/Ker\alpha$。

令 $K=Ker\alpha$，$\rho:G/K\mapsto G^{\alpha},Kg\mapsto g^{\alpha}$，首先 ρ 定义合理，显然 ρ 是单射，且是满射，又因为 $\rho(Kg_1Kg_2)=\rho(Kg_1g_2)=(g_1g_2)^{\alpha}=g_1^{\alpha}g_2^{\alpha}=\rho(Kg_1)\rho(Kg_2)$，所以 ρ 是同态映射，因此 ρ 是同构映射，综上所述 $G^{\alpha}\cong G/Ker\alpha$。证毕。

定理 2.7 (N/C 定理)设 H 是 G 的子群，则 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $Aut(H)$ 的一个子群。

证明：设 $\rho:N_G(H)\to Aut(H)$，$g\mapsto\rho(g):x\to g^{-1}xg$，首先 ρ 定义合理，$\forall x\in H$，$\forall g,h\in N_G(H)$，有：

$$x^{\rho(gh)}=(gh)^{-1}xgh=h^{-1}g^{-1}xgh=h^{-1}x^{\rho(g)}h=x^{\rho(g)\rho(h)},$$

因此 ρ 是同态映射，则由定理 2.6 有 $N_G(H)/Ker\rho\cong\left(N_G(H)\right)^{\rho}\le Aut(H)$，又因为 $Ker\rho=\left\{g\in N_G(H)\middle|\forall x\in H,x=g^{-1}xg\Rightarrow gx=xg\right\}=C_G(H)$，所以 $N_G(H)/C_G(H)\cong\left(N_G(H)\right)^{\rho}\le Aut(H)$，即 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $Aut(H)$ 的一个子群。证毕。

定理 2.8 ([1], Theorem 4.2B)设 $G\le Sym(\Omega)$ 传递，$\alpha\in\Omega$，$N=N_{Sym(\Omega)}(G)$，N 在 G 上有共轭作用，可定义同态映射：

$$\Psi:N\to Aut(G)$$

$$\Psi(x):u\mapsto x^{-1}ux$$

$Ker\Psi=C_{Sym(\Omega)}(G)$，$\sigma\in Aut(G)$，则 $\sigma\in Im\Psi$ 当且仅当 $(G_\alpha)^{\sigma}$ 是 G 的点稳定子。

证明：充分性：设 $\sigma\in Im\Psi$，$N=N_{Sym(\Omega)}(G)$，则 $\exists x\in N$，使得 $\sigma=Im\Psi$，对 $\alpha,\beta\in\Omega$，有：$\beta=\alpha^{x}$，$(G_\alpha)^{\sigma}=x^{-1}G_\alpha x=G_\beta$。即 $(G_\alpha)^{\sigma}$ 是 G 的点稳定子。

必要性：若$\sigma \in Aut(G)$，且$(G_\alpha)^\sigma = G_\beta$，$\beta \in \Omega$，$G \le Sym(\Omega)$的两个传递置换表示：$x \mapsto x$，$x \mapsto x^\sigma$是等价的，因为$G_\beta$是他们的点稳定子。因此$\exists t \in Sym(\Omega)$，对$\forall x \in G$，使得$xt = tx^\sigma$，所以$t \in N = N_{Sym(\Omega)}(G)$。因此$\sigma = \Psi(t) \in Im\Psi$。证毕。

构造 1.1 设$\Omega = \{1,2,3,4\}$，$G = D_8$，$G \le Sym(\Omega)$传递，$N = N_{Sym(\Omega)}(G)$，N在G上有共轭作用，可定义同态映射：

$$\Psi : N \to Aut(G)$$

$$\Psi(x) : u \mapsto x^{-1}ux$$

则$Im\Psi < Aut(G)$。

证明：设$\Omega = \{1,2,3,4\}$，$G = D_8 = \langle a,b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$，定义同态映射：

$$\Psi : N \to Aut(G)$$

$$\Psi(x) : u \mapsto x^{-1}ux$$

若$\alpha \in Aut(G)$，当且仅当a^α，b^α必须满足同一定义关系下，从而a^α为 4 阶元，b^α为 2 阶元，因为在D_8中$b^{-1} = b$，所以有：

$$(a^i b)^2 = a^i b a^i b = a^i b^{-1} a^i b = a^i a^{-i} = 1$$

故$a^i b$均为 2 阶元，故a^α只可能为$a^{\pm 1}$，b^α只可能为$b, ab, a^2 b, a^3 b$。

从而$|Aut(G)| = 8$。

令$\sigma : a \mapsto a, b \mapsto ab$，$\tau : a \mapsto a^{-1}, b \mapsto b$，

由于$(a^\sigma)^4 = a^4 = 1$，$(b^\sigma)^2 = (ab)^2 = 1$，$(b^\sigma)^{-1} a^\sigma b^\sigma = (a^\sigma)^{-1}$，$(a^\tau)^4 = (a^{-1})^4 = 1$，$(b^\tau)^2 = (b)^2 = 1$，$(b^\tau)^{-1} a^\tau b^\tau = (a^\tau)^{-1}$，

故$\sigma, \tau \in Aut(G)$。

因为$\sigma^2 : a \mapsto a, b \mapsto a^2 b$，$\sigma^3 : a \mapsto a, b \mapsto a^3 b$，$\sigma^4 : a \mapsto a, b \mapsto a^4 b = b$，

所以$o(\sigma) = 4$。

因为$\tau^2 : a \mapsto a, b \mapsto b$，所以$o(\tau) = 2$。

又因为$\tau^{-1}\sigma\tau : a \mapsto a, b \mapsto a^{-1} b$，$\sigma^{-1} = \sigma^3 : a \mapsto a, b \mapsto a^3 b$，且$a^{-1} = a^3$，

所以$\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1}$。

综上$|Aut(G)| = 8$，且$Aut(G) = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle \cong D_8$。

接下来考虑$N_{S_4}(G)$。

因为$D_8 \trianglelefteq N_{S_4}(G) \le S_4$，所以$8 = |D_8| \,\big|\, |N_{S_4}(G)|$，$|N_{S_4}(G)| \,\big|\, |S_4| = 24$，

因此$|N_{S_4}(G)| = 8, 16, 24$。

因为S_4中没有 16 阶子群，所以$|N_{S_4}(G)| \ne 16$；

因为S_4中 24 阶子群是S_4，但D_8不是S_4的正规子群，所以$|N_{S_4}(G)| \ne 24$；

故$|N_{S_4}(G)| = 8$，因为$D_8 \trianglelefteq N_{S_4}(G)$，所以$N_{S_4}(G) = D_8$。又因为$Ker\Psi = C_{S_4}(G) = Z_2$，

所以由定理 2.6，定理 2.7 有：

$$Im\Psi \cong G/Ker\Psi = N_{S_4}(G)/C_{S_4}(G) = D_8/Z_2 < Aut(G),$$

证毕。

参考文献

[1] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1996) Permutation Groups (Graduate Texts in Mathematics, 163). Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3

[2] Cameron, P.J. (1981) Finite Permutation Groups and Finite Simple Groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **13**, 1-22. https://doi.org/10.1112/blms/13.1.1

[3] Praeger, C.E. (1990) Finite Permutation Groups: A Survey. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, **1456**, 63-84. https://doi.org/10.1007/BFb0100731

[4] Baumeister, B. (2007) Primitive Permutation Groups with a Regular Subgroup. *Journal of Algebra*, **310**, 569-618. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.09.027

[5] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 1982.