Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 2012-2017
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112224

完备代数正规类中的基根

杨宗文，娄本功

云南大学数学系，云南 昆明

收稿日期：2021年11月6日；录用日期：2021年12月7日；发布日期：2021年12月14日

摘 要

本文定义了完备代数正规类中代数类X确定的基根类$\mathbf{L}_b(X)$，讨论了基根类$\mathbf{L}_b(X)$与代数类X、下根$\mathbf{L}(X)$的关系。

关键词

点态化完备代数正规类，基根，下根

The Base Radicals in Normal Classes of Complete Algebra

Zongwen Yang, Bengong Lou

Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming Yunnan

Received: Nov. 6th, 2021; accepted: Dec. 7th, 2021; published: Dec. 14th, 2021

Abstract

The base radicals classes $\mathbf{L}_b(X)$ determined by algebra class X in normal classes of complete pointwise algebras are defined, and the relationship between the base radicals classes $\mathbf{L}_b(X)$, algebras classes X and the lower radicals $\mathbf{L}(X)$ is discussed.

Keywords

Normal Classes of Complete Pointwise Algebras, Base Radicals, Lower Radicals

文章引用: 杨宗文, 娄本功. 完备代数正规类中的基根[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 2012-2017.
DOI: 10.12677/pm.2021.1112224

1. 引言

环及其它代数系统根理论的统一研究促使一般代数正规类根理论的建立[1]-[15]，为了进一步统一地研究一般代数正规类中根性质，文献[16]-[23]分别引入了可积代数正规类、完备代数正规类，对特殊根等进行了研究，并对一类特殊的半环——大半环(可做单侧减法的半环)建立了相应的根理论；文献[24] [25] [26] [27]对完备代数正规类进行了点态化，研究了点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类确定的上根——反单根、遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根、诣零根、λ-根、正则根、κ-根和 β-根的结构性质，文献[28]使用预根概念给出了根类的一个映射刻画，文献[29]定义了点态化完备代数正规类中的低幂等根，证明了 Boolean 根 β、正则根 ν、遗传幂等根 χ、λ-根 λ、幂等代数根 ι 都是低幂等根，并且这 5 个低幂等根满足 $\beta \le \nu \le \chi \le \lambda \le \iota$，文献[30]定义了点态化完备代数正规类中的小理想及小理想遗传根，讨论了小理想及根 R 和 R-半单类 S_R 与小理想相关的 2 个条件(*)与(**)的一些性质，进一步讨论了根 R 是一个小理想遗传根的 2 个条件。

本文在文献[24]-[30]建立的点态化完备代数正规类基础上，讨论完备代数正规类中基根的构造。

2. 预备知识及基本引理

点态化完备代数正规类的相关概念及性质参见文献[24]-[30]，为了建立每个代数的子代数乘积与 S_a 中点乘积之间的联系，本文使用文献[26] [27]中强化了的点乘积公理。

设 $\mathscr{W}$ 是一个完备代数正规类，X 是 $\mathscr{W}$ 的子类。文献[15] [16]给出可积代数正规类的子类 $X \subseteq \mathscr{W}$ 上的如下算子：

$$uX = \{a \in \mathscr{W} \mid \forall i \lhd a, i \ne a, \text{有}\, a/i \notin X\},$$

$$sX = \{a \in \mathscr{W} \mid \forall 0 \ne i \lhd a, \text{有}\, i \notin X\},$$

$$hX = \{a \in \mathscr{W} \mid \text{存在}\, b \in X, i \lhd b, \text{使得}\, a \sim b/i\},$$

$$eX = \{a \in \mathscr{W} \mid \text{存在}\, i \lhd a, i \in X, \text{使得}\, a/i \in X\},$$

$$(X) = \{a \in \mathscr{W} \mid \text{存在}\, i \lhd a, a/i \in X\},$$

$$X_\lambda = \{a \in \mathscr{W} \mid \text{存在}\, i \lhd_s a, 0 \ne i \in X\}。$$

从而，

$$usX = \{a \in \mathscr{W} \mid a\text{的非}0\text{同态像}\, b = a/i\, \text{都有非}0\text{理想}\, j/i \in X\},$$

$$suX = \{a \in \mathscr{W} \mid a\text{的非}0\text{理想}\, i\, \text{都有非}0\text{同态像}\, i/j \in X\}。$$

进一步，$\forall a \in \mathscr{W}$，引入 3 个记号：

$X(a) = \vee\{i \mid i \lhd a, i \in X\}$，即 $X(a)$ 是 a 的所有 X 理想之并；

$(a)X = \wedge\{i \mid i \lhd a, a/i \in X\}$，即 $(a)X$ 是 a 的所有商为 X 同态像的理想之交；

$A_a = \{i \mid \text{存在}\, i = i_0 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_n = a, i_k \lhd i_{k+1}, k = 0,1,\cdots,n-1\}$。

uX 是非 0 同态像都不在 X 中的代数全体，sX 是非 0 理想都不在 X 中的代数全体，usX 是非 0 同态像都有非 0 理想在 X 中的代数全体，suX 是非 0 理想都有非 0 同态像在 X 中的代数全体，A_a 是代数 a 的所有可达子代数全体。

文献[12] [13] [15]分别建立了代数正规类中下根及上根的构造。

对于序 α，如果 $\alpha = 1$，定义

$$X_1 = hX = \{a \in \mathscr{A} \mid \text{存在}\, b \in X, i \lhd b, \text{使得}\, a \sim b/i\};$$

$$X_2 = usX_1 = \{a \in \mathscr{A} \mid a\text{的非}0\text{同态像有非}0\, X_1\text{-理想}\};$$

如果 $\alpha \neq 1$ 不是极限序，$X_{\alpha-1}$ 已定义，则

$$X_\alpha = \{a \in \mathscr{A} \mid a\text{的非}0\text{同态像有非}0\, X_{\alpha-1}\text{-理想}\} = usX_{\alpha-1};$$

如果 $\alpha \neq 1$ 是极限序，则 $X_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} X_\beta$。

则 $\mathrm{L}(X) = \bigcup X_\alpha$ 是一个根类，称 X 确定的下根。下根 $\mathrm{L}(X)$ 是使得 X 中代数都是根代数的最小的根。

令 $\overline{X} = \{a \in \mathscr{A} \mid \text{存在}\, b \in X, \text{使得}\, a \in A_b\} = \bigcup\limits_{a \in X} A_a$，即 $\overline{X}$ 是 X 中代数的可达子代数全体构成的代数类，$\overline{\overline{X}} = \{a \in \mathscr{A} \mid a\text{的非}0\text{理想}\, i\, \text{都有非}0\text{同态像}\, i/j \in \overline{X}\} = su\overline{X}$，则 $\mathrm{U}(X) = \overline{\overline{X}}$ 是一个根类，称 X 确定的上根。上根 $\mathrm{U}(X)$ 是使得 X 中代数都是半单代数的最大的根。

$\mathscr{A}$ 的子类 X 上的算子在根性质的判定上有：

引理 2.1 [13]： $\mathrm{R} \subseteq \mathscr{A}$ 是一个子类，则 R 是一个根类 $\Leftrightarrow \mathrm{R} = us\mathrm{R}$。

引理 2.2 [13]： $\mathrm{P} \subseteq \mathscr{A}$ 是一个子类，则 P 是一个根半单类 $\Leftrightarrow \mathrm{P} = su\mathrm{P}$。

对 $\mathscr{A}$ 的子类 X，下根 $\mathrm{L}(X)$ 与上根 $\mathrm{U}(X)$ 是根据子类 X 构造的 2 个根性质，下面讨论由子类 X 确定的另一种根性质的构造。

3. 点态化完备代数正规类中的基根

本节引入点态化完备代数正规类 $\mathscr{A}$ 的子类 X 确定中的基根的构造。

$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，X 是 $\mathscr{A}$ 的子类，定义：

$$\mathrm{L}_b(X) = \{a \in \mathscr{A} \mid a\text{的非}0\text{同态像有非}0\, X\text{-可达子代数}\}。$$

引理 3.1： $X \subseteq \mathscr{A}$ 是一个代数类，则 $\mathrm{L}_b(X)$ 是一个同态闭类。

证明： 设 $a \in \mathrm{L}_b(X)$，$i \lhd a$，$a/i \neq 0$。因为 a 的非 0 同态像都有非 0 可达子代数不在 X 中，a 的非 0 同态像的非 0 同态像也是 a 的非 0 同态像，即 a 的非 0 同态像都在 $\mathrm{L}_b(X)$ 中，从而 $\mathrm{L}_b(X)$ 是一个同态闭类。证毕。

引理 3.2： $X \subseteq \mathscr{A}$ 是一个同态闭类，则 $\mathrm{L}(X)$ 是 X 确定的下根，则 $\mathrm{L}(X) \subseteq \mathrm{L}_b(X)$。

证明： 由 $X \subseteq \mathscr{A}$ 是一个同态闭类，从下根的构造有 $X_1 = X \subseteq \mathrm{L}_b(X)$，$\forall a \in X_2$，则 a 的非 0 同态像都有非 0 理想在 $X_1 = X$ 中，从而 $X_2 = X \subseteq \mathrm{L}_b(X)$。进一步有 $X_\alpha \subseteq \mathrm{L}_b(X)$，从而 $\mathrm{L}(X) \subseteq \mathrm{L}_b(X)$。证毕。

定理 3.3： $X \subseteq \mathscr{A}$ 是一个代数类，则 $\mathrm{L}_b(X)$ 是一个根类。

证明： 对 $\mathrm{L}_b(X)$ 确定的下根 $\mathrm{L}(\mathrm{L}_b(X))$，显然有 $\mathrm{L}_b(X) \subseteq \mathrm{L}(\mathrm{L}_b(X))$。

设 $a \in \mathrm{L}(\mathrm{L}_b(X))$，$\mathrm{L}(\mathrm{L}_b(X))$ 是一个同态闭类，故 $\forall i \lhd a$，$a/i \neq 0$，$a/i \in \mathrm{L}(\mathrm{L}_b(X)) \subseteq \mathrm{L}_b(\mathrm{L}_b(X))$ ($\mathrm{L}_b(X)$ 是一个同态闭类，由引理 3.2 得)。则 a/i 有一个可达子代数 $c \in \mathrm{L}_b(X)$ 且 c 有一个非 0 可达子代数 $c' \in X$，因此 c' 是 a/i 的一个非 0 X-可达子代数，从而 $a \in \mathrm{L}_b(X)$，即 $\mathrm{L}(\mathrm{L}_b(X)) \subseteq \mathrm{L}_b(X)$。

综上，$\mathrm{L}_b(X) = \mathrm{L}(\mathrm{L}_b(X))$ 是一个根类。证毕。

定义 3.4： $\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，$X \subseteq \mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}$ 的子类，定理 3.3 中确定的根类 $\mathrm{L}_b(X)$ 称为是由 X 确定的基根。

推论 3.5： $X \subseteq \mathscr{A}$ 是一个同态闭类，则 $\mathrm{L}_b(X)=\mathrm{L}(X)$。

证明： 因为 X 同态闭时，$\forall a \in X$，$i \lhd a$，$0 \neq a/i \in X$，从而 $a \in \mathrm{L}_b(X)$，$X \subseteq \mathrm{L}_b(X)$，故 $\mathrm{L}_b(X)=\mathrm{L}(X)$。证毕。

注 1 $\mathrm{L}_b(X)$ 与 X 的关系不确定，$\mathrm{L}_b(X) \cap X=0$，$\mathrm{L}_b(X) \cap X=X$ 及 $\mathrm{L}_b(X) \cap X \neq 0$，$X$ 都可能成立，故通常 $\mathrm{L}_b(X)$ 与 $\mathrm{L}(X)$ 不一定相同。但是当 X 是一个同态闭类，则 $\mathrm{L}_b(X)$ 与 $\mathrm{L}(X)$ 相同。

定理 3.6： $X, Y \subseteq \mathscr{A}$ 是 2 个代数类，则：

1) 如果 $X \subseteq Y$，则 $\mathrm{L}_b(X) \leq \mathrm{L}_b(Y)$；

2) a 是一个单代数，则 $a \in X \Leftrightarrow a \in \mathrm{L}_b(X)$；

3) $\mathrm{L}_b(X)=\mathrm{L}_b(\mathrm{L}_b(X))$。

证明： 1)，2)显然。

3) 因为 $\mathrm{L}_b(X)$ 是一个根类，故 $\mathrm{L}_b(X)$ 同态闭，所以 $\mathrm{L}_b(\mathrm{L}_b(X))=\mathrm{L}(\mathrm{L}_b(X))=\mathrm{L}_b(X)$。证毕。

对一个代数类 $X \subseteq \mathscr{A}$，令

$$X_h=\{a \in \mathscr{A} \mid a\text{的同态像}\, b=a/i\,\text{都有}\, b \in X\},$$

$$\mathrm{S}(X)=\{a \in \mathscr{A} \mid a\,\text{有非}0\; X\text{-可达子代数}\},$$

则有：

推论 3.7： $X \subseteq \mathscr{A}$ 是一个代数类，有 $\mathrm{L}(X_1) \leq \mathrm{L}_b(X) \leq \mathrm{L}(X_h)$。

证明： 因为 $X_1 \subseteq X \subseteq X_h$，$X_1, X_h$ 同态闭，由定理 3.6 得 $\mathrm{L}(X_1)=\mathrm{L}_b(X_1) \leq \mathrm{L}_b(X) \leq \mathrm{L}_b(X_h)=\mathrm{L}(X_h)$。证毕。

定理 3.8： X 是一个代数类，则 $X \subseteq \mathrm{L}_b(X) \Leftrightarrow \mathrm{L}_b(X)=\mathrm{L}(X_h)$。

证明： 由推论 3.7 得 $\mathrm{L}_b(X) \leq \mathrm{L}(X_h)$。

“$\Rightarrow$”如果 $X \subseteq \mathrm{L}_b(X)$，由于 $\mathrm{L}_b(X_h)$ 是包含 X 的最小根类，而 $\mathrm{L}_b(X)$ 是包含 X 的根类，因此 $\mathrm{L}(X_h) \leq \mathrm{L}_b(X)$，从而 $\mathrm{L}_b(X)=\mathrm{L}(X_h)$。

“$\Leftarrow$”如果 $\mathrm{L}_b(X)=\mathrm{L}(X_h)$，则 $X \subseteq \mathrm{L}(X_h)=\mathrm{L}_b(X)$。证毕。

定理 3.9： X 是一个代数类，如果 $X \cap \mathrm{S}(\mathrm{L}_b(X))=0$，则 $\mathrm{S}(\mathrm{L}_b(X))$ 是与 X 交为 0 的最大半单类。

证明： 设 R 是根类，R-半单类 PR 真包含 $\mathrm{S}(\mathrm{L}_b(X))$，且 PR 是与 X 交为 0 的最大半单类，设 $a \in \mathrm{PR}$，但 $a \notin \mathrm{S}(\mathrm{L}_b(X))$，则 a 有一个 $\mathrm{L}_b(X)$-理想，但不是 R-理想。即存在 $0 \neq i \lhd a$，使得 $i \in \mathrm{L}_b(X)$，因此 i 有非 0 X-可达子代数 j。但 j 也是 a 的非 0 X-可达子代数，由于 R-半单类 PR 是遗传的，故 $j \in \mathrm{PR}$，进而 $j \in \mathrm{PR} \cap X$，和 PR 与 X 交为 0 矛盾，所以 $\mathrm{S}(\mathrm{L}_b(X))$ 是与 X 交为 0 的最大半单类。证毕。

定理 3.10： 如果 R 是一个遗传根类，则 $\mathrm{R} \cap \mathrm{L}_b(\mathrm{PR})=0$。

证明： 设 $a \in \mathrm{R} \cap \mathrm{L}_b(\mathrm{PR})$，如果 $a \neq 0$，由 $a \in \mathrm{L}_b(\mathrm{PR})$，则 a 有非 0 PR-可达子代数 b。R 是一个遗传根类，$a \in \mathrm{R}$，从而 $b \in \mathrm{R}$，即 $0 \neq b \in \mathrm{R} \cap \mathrm{L}_b(\mathrm{PR})$，矛盾，所以 $\mathrm{R} \cap \mathrm{L}_b(\mathrm{PR})=0$。证毕。

定理 3.11： X 是一个代数类，有 $X \cap \mathrm{L}_b(X)=0 \Leftrightarrow X$ 满足条件：

$\forall 0 \neq a \in X \Rightarrow$ 存在 a 的非 0 同态像 c，使得 c 没有非 0 X-可达子代数。

证明：“$\Rightarrow$” $X \cap \mathrm{L}_b(X)=0$，如果有 $a \in X$，$a \neq 0$ 且不存在 a 的非 0 同态像 c，使得 c 没有非 0 X-可达子代数，即 a 的非 0 同态像 c 都有非 0 X-可达子代数，故 $a \in \mathrm{L}_b(X)$，从而 $a \in X \cap \mathrm{L}_b(X)$，与 $X \cap \mathrm{L}_b(X)=0$ 矛盾，所以 $\forall 0 \neq a \in X \Rightarrow$ 存在 a 的非 0 同态像 c，使得 c 没有非 0 X-可达子代数。

“$\Leftarrow$” $\forall 0 \neq a \in X \Rightarrow$ 存在 a 的非 0 同态像 c，使得 c 没有非 0 X-可达子代数，设 $a \in X \cap \mathrm{L}_b(X)$，如

果 $a \neq 0$，由 $a \in \mathrm{L}_b(X)$，则 a 的非 0 同态像 c 都有非 0 X-可达子代数，与存在 a 的非 0 同态像 c，使得 c 没有非 0 X-可达子代数矛盾，所以 $a \neq 0$，即 $X \cap \mathrm{L}_b(X) = 0$。证毕。

4. 小结

本文定义了完备代数正规类中代数类 X 确定的基根类 $\mathrm{L}_b(X)$，讨论了基根类 $\mathrm{L}_b(X)$ 与代数类 X、下根 $\mathrm{L}(X)$ 的关系。

基金项目

国家自然科学基金(11861076)；云南省自然科学基金(2019FB139)。

参考文献

[1] Száse, F.A. (1981) Radicals of Rings. John Wiley & Sons, New York.

[2] Gardner, B.J. and Wiegandt, R. (2004) Radical Theory of Rings. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel. http://ecite.utas.edu.au/27037 https://doi.org/10.1201/9780203913352

[3] McDougall, R. (1999) A Generalisation of the Lower Radical Class. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **59**, 139-146. https://doi.org/10.1017/S000497270003269X

[4] Gardner, B.J. and McDougall, R.G. (2003) On the Base Radical Class for Associative Rings. *Acta Mathematica Hungarica*, **98**, 263-272. https://doi.org/10.1023/A:1022882010815

[5] Mcconnell, N.R., Mcdougall, R.G. and Stokes, T. (2013) On Base Radical and Semisimple Classes Defined by Class Operators. *Acta Mathematica Hungarica*, **138**, 307-328. https://doi.org/10.1007/s10474-012-0249-9

[6] Mcdougall, R.G. and Thornton, L.K. (2018) On Base Radical Operators for Classes of Finite Associative Rings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **98**, 239-250. https://doi.org/10.1017/S0004972718000461

[7] 谢邦杰. 关于周期环与 Jacobson 环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1982, 2(2): 11-13.

[8] 于宪君. 关于 $F_{A,\delta}$-环与广义周期环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1988, 8(3): 341-345.

[9] 胡小美. 几类与 Jacbson 根相关环的研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 杭州师范大学, 2017.

[10] 于宪君, 朱捷. 关于周期环的几个定理[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2004, 21(3): 20-22.

[11] 杜现昆, 齐毅. 周期环的刻划[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001, 39(3): 29-31.

[12] Puczylowski, E.R. (1993) On General Theory of Radicals. *Algebra Universalis*, **39**, 53-60. https://doi.org/10.1007/BF01196549

[13] Wang, Y. and Zhang, A.H. (2002) Radicals and Semisimple Classes of the Class of Algebras. *Journal of Anshan Normal University*, **4**, 5-10.

[14] 任艳丽, 王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597-602.

[15] Yang, Z.W. (2006) The Upper Radical Classes of the Class of Algebras. *Journal of Yunnan University* (*Natural Sciences Edition*), **28**, 8-11.

[16] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2008) The Supernilpotent Radical, Special Radical and Bear Radical in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **32**, 181-192.

[17] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2010) The Radicals and Likemodules in Normal Classes of Complete Alagebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 377-386.

[18] 杨宗文, 杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2006, 31(3): 112-116, 120.

[19] 杨宗文, 杨柱元. 子环的和与积[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 335-338.

[20] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 大半环子半环的和与积[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6): 113-118.

[21] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 可积代数正规类中半素代数类及半素一致代数类确定的上根[J]. 数学理论与应用, 2008, 28(4): 71-75.

[22] Yang, Z.W., Yang, Z.Y. and Li, Y.B. (2010) The General Radicals Theory of the Big Semirings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 1149-1167.

[23] Yang, Z.W. and Yang, Z.Y. (2011) The Semihereditary and Semisupernilpotent Radicals in Normal Classes of Product

Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 891-902.

[24] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 546-554. https://doi.org/10.12677//pm.2018.85072

[25] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 712-722. https://doi.org/10.12677//pm.2018.86096

[26] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 λ-根和正则根[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 836-842. https://doi.org/10.12677/pm.2019.97109

[27] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 Jacobson 代数和 Boolean 代数[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1009-1014. https://doi.org/10.12677/pm.2019.99127

[28] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中 Amitsur-Kurosh 根的映射刻画[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1138-1144. https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012135

[29] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中的低幂等根[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 1-6. https://doi.org/10.12677/pm.2021.111001

[30] 杨宗文, 娄本功. 点态化完备代数正规类中的小理想[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1691-1695. https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110189