Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 2069-2075
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112230

二面体群和广义四元数群上的有限对偶双凯莱图

甯鸿琳

云南财经大学统计与数学学院，云南 昆明

收稿日期：2021年11月10日；录用日期：2021年12月10日；发布日期：2021年12月17日

摘要

本文主要给出了有限对偶双凯莱图的一个等价条件，得到了二面体群和广义四元数群上的对偶双凯莱图的性质和结构。

关键词

二面体群，广义四元数群，有限对偶双凯莱图，半对称图

Finite Dual Bi-Cayley Graphs on Dihedral Groups and Generalized Quaternion Groups

Honglin Ning

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Nov. 10^{th}, 2021; accepted: Dec. 10^{th}, 2021; published: Dec. 17^{th}, 2021

文章引用: 甯鸿琳. 二面体群和广义四元数群上的有限对偶双凯莱图[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 2069-2075.
DOI: 10.12677/pm.2021.1112230

Abstract

In this paper, we give an equivalent condition of finite dual bi-Cayley graphs and obtain properties and structures of dual bi-Cayley graphs on dihedral groups and generalized quaternion groups.

Keywords

Dihedral Group, Generalized Quaternion Group, Finite Dual Bi-Cayley Graph, Semisymmetric Graph

1. 引言

本文研究的图都是有限连通的无向单图, 本文涉及的群都是有限群. 设 Γ 为一个图, 我们用 $V\Gamma$, $E\Gamma$, $A\Gamma$ 和 $Aut(\Gamma)$ 分别表示它的顶点集, 边集, 弧集和全自同构群, 称 Γ 的顶点个数 $|V\Gamma|$ 为 Γ 的阶数. 与顶点 α 相邻接的顶点组成的集合称为 α 的邻域, 记为 $\Gamma(\alpha)$, 称 $|\Gamma(\alpha)|$ 为点 α 的度数, 记为 $val(\alpha)$. 如果每个点的度数都相同, 则称 Γ 为正则图, 此时图 Γ 的度数 $val(\Gamma)$ 等于点 α 的度数. 设 $X \leq Aut(\Gamma)$ 为图 Γ 的一个自同构群, 如果 X 在 $V\Gamma$, $E\Gamma$, 或 $A\Gamma$ 上传递, 则分别称 Γ 是 X-点传递图, X-边传递图, 或 X-弧传递图. 如果 X 分别地在 $E\Gamma$ 上传递, 但在 $V\Gamma$ 上不传递, 则称 Γ 是 X-半对称图.

双凯莱图是代数图论的热门研究方向之一. 给定一个群 H 及其子集 R, L, S, 其中$R = R^{-1}$, $L = L^{-1}$, $R \cup L \subseteq H \backslash \{1\}$. 定义群 H 上的双凯莱图 $BiCay(H, R, L, S)$ 如下: 顶点集 $V\Gamma = H_0 \cup H_1$, 其中 $H_0 := \{h_0 \mid h \in H\}$, $H_1 := \{h_1 \mid h \in H\}$, 边集 $E\Gamma = \{\{h_0, g_0\} \mid gh^{-1} \in R\} \cup \{\{h_1, g_1\} \mid gh^{-1} \in L\} \cup \{\{h_0, g_1\} \mid gh^{-1} \in S\}$.

双凯莱图是代数图论中最重要的图类之一, 也是代数图论的热门研究课题之一. 关于双凯莱图的研究, 近年来研究学者们做了许多工作, 在 2012 年, Kovács 和 Kuzman 等人在文献 [1]中分类了循环群上的四度边传递双凯莱图. 在 2014 年, Zhou 和 Feng 在文献 [2]中分类了交换群上三度点传递双凯莱图. 在 2020 年, Conder 和 Zhou 等人在文献 [3]中给出了几乎正规边传递双凯莱图的一个刻画, 同时给出了围长不超过6的边传递图的完全分类. 值得一提的是在 2016 年, Zhou 和 Feng 在文

献 [4]中对于群 H 上的双凯莱图, 确定了 H 在图的全自同构群中的正规化子, 这一结果进一步推动了后续双凯莱图的研究. 关于双凯莱图的最新研究可参见文献 [5–9].

在文献 [10]中对于有限群上的对偶凯莱图进行了研究, 得到了一些好的结果: 给出了有限对偶凯莱图的相关性质和结构, 对其对称性也进行了一定的研究. 类似地, 我们可将有限对偶凯莱图的研究推广到有限对偶双凯莱图. 本文将对二面体群和广义四元数群上的对偶双凯莱图进行讨论.

本文所使用的术语和符号都是标准的, 可以参考著作 [11]. 对于群 G, 我们用 $Z(G)$ 表示 G 的中心. 对于两个群 N 和 H, 我们用 $N:H$ 表示 N 被 H 的可裂扩张. 对于一个正整数 n, 我们用 K_{2n} 表示 $2n$ 阶的完全图, $K_{n,n}$ 表示 $2n$ 阶的完全二部图, $K_{n,n}$-nK_2 表示在 $K_{n,n}$ 中去掉一个完全匹配所得的图.

2. 预备知识

二面体群和广义四元数群是群论里十分重要的群. 下面我们给出二面体群和广义四元数群的定义.

$2n$ 阶二面体群 D_{2n} 定义如下:

$$D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle (n > 2).$$

$4n$ 阶广义四元数群 D_{2n} 定义如下:

$$Q_{4n} = \langle a, b \mid a^{2n} = 1, b^2 = a^n, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle (n \geq 2).$$

易知二面体群和广义四元数群都是非交换群.

设 $\Gamma = BiCay(H, R, L, S)$ 是有限群 H 上的双凯莱图,

$$\hat{H} = \{\hat{h} \mid \hat{h} : x_0 \mapsto (xh)_0, x_1 \mapsto (xh)_1, x \in H, h \in H\},$$

$$\check{H} = \{\check{h} \mid \check{h} : x_0 \mapsto (h^{-1}x)_0, x_1 \mapsto (h^{-1}x)_1, x \in H, h \in H\}.$$

分别是 H 的右正则表示和左正则表示. 容易验证右正则表示 $\hat{H}$ 总是双凯莱图 Γ 全自同构群的子群, 而左正则表示 $\check{H}$ 则不一定. 如果 $\check{H} \leq Aut(\Gamma)$, 则称 Γ 是有限对偶双凯莱图. 此时容易验证 $\hat{H}\check{H}$ 是 $Aut(\Gamma)$ 的子群.

由于本文涉及的群都是有限群, 故在后文的叙述中将有限对偶双凯莱图简称为对偶凯莱图. 若 H 是交换群, 则 $\check{H} = \hat{H} \leq Aut(BiCay(H, R, L, S))$, 根据对偶双凯莱图的定义可得交换群上的双凯莱图都是对偶双凯莱图. 因此我们主要研究非交换群上的对偶双凯莱图. 由文献[3]双凯莱图具有以下基本性质:

引理 2.1 [3] 设 $\Gamma = BiCay(H, R, L, S)$ 是群 H 上连通的双凯莱图, 其中 R, L, S 是 H 的子集. 则以下命题成立:

(1) $\langle R, L, S\rangle = H$;

(2) 在图自同构的意义下, S 可包含 H 中的单位元;

(3) $BiCay(H, R, L, S) \cong BiCay(H, R^{\alpha}, L^{\alpha}, S^{\alpha})$, 其中 $\alpha \in Aut(H)$;

(4) $BiCay(H, R, L, S) \cong BiCay(H, R, L, S^{-1})$.

3. 主要结果

在双凯莱图中, 群 H 的右正则表示和左正则表示有以下命题:

命题 3.1 $\hat{H} \cap \check{H} \cong Z(H)$. 特别地, $\hat{H} \neq \check{H}$ 当且仅当 H 是非交换群.

证明 取 $\hat{h} = \check{g}$, h, $g \in H$, 则

$$(xh)_0 = (x_0)^{\hat{h}} = (x_0)^{\check{g}} = (g^{-1}x)_0,$$

$$(xh)_1 = (x_1)^{\hat{h}} = (x_1)^{\check{g}} = (g^{-1}x)_1,$$

任意 $x \in H$, 令 $x = 1$, 则 $g^{-1} = h$. 因此 $(xh)_0 = (hx)_0$, $(xh)_1 = (hx)_1$, 即有 $xh = hx$, 则 $h \in Z(H)$. 故 $\hat{H} \cap \check{H} = \{\hat{h} | h \in Z(H)\} \cong Z(H)$. □

本文得到的第一个主要结论是给出了对偶双凯莱图的一个等价条件.

定理 3.2 设 $\Gamma = BiCay(H, R, L, S)$ 是群 H 上的双凯莱图, Γ 是对偶双凯莱图当且仅当 R, L, S 分别是群 H 的某些共轭类的并.

证明 充分性. 由 Γ 是对偶双凯莱图,有 $\check{H} \leq Aut(\Gamma)$, 而 $\tilde{h} = \check{h}\hat{h} \in \check{H}\hat{H} \leq Aut(\Gamma)$. 由 $\Gamma(1_0) = R_0 \cup S_1$, $\tilde{H} = \{\tilde{h} \mid h \in H\} \leq Aut(\Gamma)$, 有 $(\Gamma(1_0))^{\tilde{H}} = \Gamma(1_0) = R_0 \cup S_1$, 任意 $r \in R$, $\tilde{h} \in \tilde{H}$, 而由 $1_0 \sim r_0$ 有 $(1_0)^{\tilde{h}} \sim (r_0)^{\tilde{h}} = (r^h)_0$, 因此 $r^h \in R$, 于是 $R^h \subseteq R$, 又因为 $\tilde{h} \in Aut(\Gamma)$, 则有 $R^h = R$, 由 h 的任意性可得 R 是 H 的一些共轭类的并. 同理可得 L, S 也是 H 的一些共轭类的并.

必要性. 若 R, L, S 分别是群 H 的某些共轭类的并, 则对于任意 $h \in H$, 有 $R^h = R$, $L^h = L$, $S^h = S$. 任意 $x, y, h \in H$, 有

$$x_0 \sim y_0 \Leftrightarrow yx^{-1} \in R \Leftrightarrow (yx^{-1})^h \in R^h = R \Leftrightarrow (x_0)^{\check{h}} \sim (y_0)^{\check{h}},$$

$$x_1 \sim y_1 \Leftrightarrow yx^{-1} \in L \Leftrightarrow (yx^{-1})^h \in L^h = L \Leftrightarrow (x_1)^{\check{h}} \sim (y_1)^{\check{h}},$$

$$x_0 \sim y_1 \Leftrightarrow yx^{-1} \in S \Leftrightarrow (yx^{-1})^h \in S^h = S \Leftrightarrow (x_0)^{\check{h}} \sim (y_1)^{\check{h}},$$

$$y_1 \sim x_0 \Leftrightarrow yx^{-1} \in S \Leftrightarrow (yx^{-1})^h \in S^h = S \Leftrightarrow (y_1)^{\check{h}} \sim (x_0)^{\check{h}},$$

因此 $\check{h} \in Aut(\Gamma)$, 故 $\check{H} \leq Aut(\Gamma)$, 于是 Γ 是对偶双凯莱图. □

下面的定理给出了二面体群和广义四元数群上对偶双凯莱图的性质.

定理 3.3

(1) 不存在 $2n$ 阶二面体群上连通的 G-半对称对偶双凯莱图, 其中 $H = D_{2n}$, $G = \check{H}\hat{H} \le Aut(\varGamma)$, n 是偶数.

(2) 不存在广义四元数群上连通的 G-半对称对偶双凯莱图, 其中 $H = Q_{4n}$, $G = \check{H}\hat{H} \le Aut(\varGamma)$.

证明 (1)设 $H = D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, $\varGamma = BiCay(H, R, L, S)$, 其中 n 是偶数. 若 $\varGamma$ 是 G-半对称的对偶双凯莱图, 则 $\varGamma$ 是一个二部图, 即 $R = L = \emptyset$, 并且 $G_{1_0} = \tilde{H}$ 在 $\varGamma(1_0) = S_1$ 上传递, 即 $S_1 = s_1^{\tilde{H}} = (s^{\tilde{H}})_1 = (s^H)_1$, $1 \ne s \in S$, 进而 $S = s^H$. 由于 $\varGamma$ 是连通图, 由引理 2.1 有, $\langle S\rangle = \langle s^H\rangle = H$. 设 $s = a^ib^j, 0 \le i \le n-1, 0 \le j \le 1$. 如果 $j = 0$, 那么 $s \in \langle a\rangle$. 由 $\langle a\rangle$ 是 H 的特征子群, 有 $\langle S\rangle \le \langle a\rangle < H$, 这与 $\varGamma$ 的连通性矛盾. 因此 $s = a^ib$ 是一个二阶元.

若 n 是偶数. 由于 $b^a = a^{-1}a^bb = a^{-2}b = a^{n-2}b$, 如果 s 与 b 在 H 中共轭, 那么 $S = \{b, a^2b, \cdots, a^{n-2}b\}$, 但是 $\langle S\rangle = \langle a^2, b\rangle = \langle a^2\rangle : \langle b\rangle \cong D_n$, 这与连通性矛盾. 如果 s 与 b 在 H 中不共轭, 那么 $S = \{ab, a^3b, \cdots, a^{n-1}b\}$. 但是 $\langle S\rangle = \langle a^2, ab\rangle = \langle a^2\rangle : \langle ab\rangle \cong D_n$, 这也与连通性矛盾. 故当 n 为偶数时, $\varGamma$ 不存在.

(2)设 $H = Q_{4n} = \langle a, b \mid a^{2n} = 1, b^2 = a^n, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, $\varGamma = BiCay(H, R, L, S)$. 因为 $\varGamma$ 是 G-半对称的对偶双凯莱图, 则 $\varGamma$ 是一个二部图, 由 (1) 的证明可得 $R = L = \emptyset$, $S = s^H$. 由于 $\varGamma$ 是连通图, 由引理 2.1 有, $\langle S\rangle = \langle s^H\rangle = H$. 设 $s = a^ib^j, 0 \le i \le 2n-1, 0 \le j \le 1$. 如果 $j = 0$, 那么 $s \in \langle a\rangle$. 由 $\langle a\rangle$ 是 H 的特征子群, 有 $\langle S\rangle \le \langle a\rangle < H$, 这与 $\varGamma$ 的连通性矛盾. 因此 $s = a^ib$ 是一个4 阶元.

如果 s 与 b 在 H 中共轭, 那么 $S = s^H = \{b, ba^2, \cdots, ba^{2n-2}\}$, 此时 $\langle S\rangle = \langle b, a^2\rangle < Q_{4n}$, 这与连通性矛盾. 如果 s 与 b 在 H 中不共轭, 那么 $S = \{ba,\ ba^3,\ \cdots, ba^{2n-1}\}$, 此时 $\langle S\rangle = \langle ab, a^2\rangle < Q_{4n}$, 这与连通性矛盾. 故不存在广义四元数群上连通的 G-半对称对偶双凯莱图.

推论 1 设 $\varGamma = BiCay(H, R, L, S)$ 是 $2m$ 阶二面体群上连通的 G-半对称对偶双凯莱图, 其中 $H = D_{2m}$, $G = \check{H}\hat{H} \le Aut(\varGamma)$, m 是奇数. 则

$$\varGamma = BiCay(H, \emptyset, \emptyset, \{b, ab, \cdots, a^{m-1}b\}).$$

证明 设 $H = D_{2m} = \langle a, b \mid a^m = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, $\varGamma = BiCay(H, R, L, S)$, 其中 m 是奇数. 若 $\varGamma$ 是连通的 G-半对称对偶双凯莱图, 由定理 3.3 的证明可知, $R = L = \emptyset$, 并且 $S = s^H$, 其中 $s = a^ib$ 是一个二阶元. 由于 m 是奇数, 则 H 中的每一个二阶元都与 b 在 H 中共轭, 那么 $S = s^H = \{b, ab, \cdots, a^{n-1}b\}$. 此时$\langle S\rangle = \langle a, b\rangle = D_{2m}$, 满足连通性.

下面这个定理给出了二面体群和广义四元数群上的特殊的对偶双凯莱图的结构.

定理 3.4 设 n 是正整数, 则

(1) 若 $n > 4$ 是偶数, 则 $K_{2n}, K_{n,n}, K_{n,n} - nK_2$ 是二面体群上的对偶双凯莱图.

(2) 若 $4 \mid n$ 且 $n \ge 8$, 则 $K_{2n}, K_{n,n}, K_{n,n} - nK_2$ 是广义四元数群上的对偶双凯莱图.

证明 (1) 因为 n 是大于4 的偶数, 即 $n = 2k, k > 2$, 则存在 n 阶二面体群 $D_{2k} = \langle a, b \mid a^k = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle (k > 2)$, 令 $H = D_{2k}$, 构造 H 上的双凯莱图 $BiCay(H, H\backslash\{1\}, H\backslash\{1\}, H)$,

此双凯莱图共有 $2n$ 个点, 并且任意一个点都与另外 $2n$-1 个点相邻接, 根据完全图的定义可得, $K_{2n} \cong BiCay(H, H\backslash\{1\}, H\backslash\{1\}, H)$. 由于 $H\backslash\{1\} = (H\backslash\{1\})^{-1}$ 是 H 的一些共轭类的并, 根据定理 3.2 , 故 K_{2n} 是 H 上的对偶双凯莱图.

对于上述 H, 构造 H 上的双凯莱图 $BiCay(H, \emptyset, \emptyset, H)$. 此双凯莱图为 $2n$ 个点上的二部图, 并且任意一个点都仅与另外一个部中的所有点相邻接, 根据完全二部图的定义可得, $K_{n,n} \cong BiCay(H, \emptyset, \emptyset, H)$, 根据定理 3.2 , $K_{n,n}$ 是 H 上的对偶双凯莱图.

构造 H 上的双凯莱图 $BiCay(H, \emptyset, \emptyset, H\backslash\{1\})$, 则 $K_{n,n} - nK_2 \cong BiCay(H, \emptyset, \emptyset, H\backslash\{1\})$. 因为 $H\backslash\{1\} = (H\backslash\{1\})^{-1}$ 是 H 的一些共轭类的并, 根据定理 3.2 , $K_{n,n} - nK_2$ 是 H 上的对偶双凯莱图.

(2)由于 $4 \mid n$ 且 $n \geq 8$, 于是 $n = 4l, l \geq 2$, 则存在 n 阶广义四元数群

$$Q_{4l} = \langle a, b \mid a^{2l} = 1, b^2 = a^l, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle (l \geq 2),$$

令 $H = Q_{4l}$, 构造 H 上的双凯莱图 $BiCay(H, H\backslash\{1\}, H\backslash\{1\}, H)$, $BiCay(H, \emptyset, \emptyset, H)$, $BiCay(H, \emptyset, \emptyset, H\backslash\{1\})$, 根据 (1) 的证明, 有 $K_{2n} \cong BiCay(H, H\backslash\{1\}, H\backslash\{1\}, H)$, $K_{n,n} \cong BiCay(H, \emptyset, \emptyset, H)$, $K_{n,n} - nK_2 \cong BiCay(H, \emptyset, \emptyset, H\backslash\{1\})$, 并且它们都是 H 上的对偶双凯莱图, 故 K_{2n}, $K_{n,n}$, $K_{n,n} - nK_2$ 是广义四元数群上的对偶双凯莱图. □

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (11961076).

参考文献

[1] Kovács, I., Kuzman, B., Malnič, A. and Wilson, S. (2012) Characterization of Edge-Transitive 4-Valent Bicirculants. *Journal of Graph Theory*, **69**, 441-463. https://doi.org/10.1002/jgt.20594

[2] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2014) Cubic Bi-Cayley Graphs over Abelian Groups. *European Journal of Combinatorics*, **36**, 679-693. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2020.05.006

[3] Conder, M., Zhou, J.X., Feng, Y.Q. and Zhang, M.M. (2020) Edge-Transitive Bi-Cayley Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **145**, 264-306. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2020.05.006

[4] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2016) The Automorphisms of Bi-Cayley Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **116**, 504-532. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.10.004

[5] Arezoomand, M., Behmaram, A., Ghasemi, M. and Raeighasht, P. (2020) Isomorphisms of Bi-Cayley Graphs on Dihedral Groups. *Discrete Mathematics Algorithms and Applications*, **2**, Article ID: 2050051. https://doi.org/10.1142/S1793830920500512

[6] Pan, J.M. and Yin, F.G. (2021) On Edge-Transitive Bi-Frobenius-Metacirculants. *Discrete Mathematics*, **344**, Article ID: 112435. https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112435

[7] Qiao, S. and Zhou, J.X. (2020) On Tetravalent Vertex-Transitive Bi-Circulants. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **51**, 277-288. https://doi.org/10.1007/s13226-020-0400-1

[8] Wang, X. (2021) Cubic Edge-Transitive Bi-Cayley Graphs on Generalized Dihedral Group. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 1-11. https://doi.org/10.1007/s40840-021-01205-9

[9] Yang, J.X., Liu, X.G. and Wang, L.G. (2021) Energies of Complements of Unitary One-Matching Bi-Cayley Graphs over Commutative Rings. *Linear and Multilinear Algebra*, **2**, 1-16. https://doi.org/10.1080/03081087.2021.1920878

[10] Pan, J.M. (2020) On Finite Dual Cayley Graphs. *Open Mathematics*, **18**, 595-602. https://doi.org/10.1515/math-2020-0141

[11] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京: 科学出版社, 2007.