Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 1993-2002
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112222

Hans汉斯

共轭类长两两最大公因子至多有两个素因子的有限单群

张耀芳[1]，刘燕俊[2]

[1]九江职业大学师范学院，江西 九江
[2]江西师范大学数学与统计学院，江西 南昌

收稿日期：2021年11月4日；录用日期：2021年12月6日；发布日期：2021年12月13日

摘 要

本文证明了A_5 是唯一满足任意两个不同共轭类长的最大公因子至多有两个(不一定不同)素因子的有限单群。

关键词

有限单群，共轭类，最大公因子，素因子

Finite Simple Groups in Which Any Two Different Conjugacy Class Lengths Have at Most Two Prime Divisors in Common

Yaofang Zhang[1], Yanjun Liu[2]

[1]Normal School, Jiujiang Vocational University, Jiujiang Jiangxi
[2]School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi

Received: Nov. 4^{th}, 2021; accepted: Dec. 6^{th}, 2021; published: Dec. 13^{th}, 2021

文章引用: 张耀芳, 刘燕俊. 共轭类长两两最大公因子至多有两个素因子的有限单群[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 1993-2002. DOI: 10.12677/pm.2021.1112222

Abstract

This paper shows that A_5 is the only finite simple group such that the greatest common divisor of any pair of its different conjugacy class lengths has at most two (not necessarily different) prime divisors.

Keywords

Finite Simple Group, Conjugacy Class, Greatest Common Divisor, Prime Divisor

1. 引言

有限群论是一个非常活跃的研究领域, 仍然还有许多未解决的问题. 事实上自从1965年开始, 每隔几年俄罗斯科学院数学所都会出版群论中未解决的公开问题集, 现已经到将近20版, 详见 [1]. 通常, 有限群特征标理论中特征标度数与群的共轭类长有着很多未被很好理解的联系. 在一定意义上, 共轭类长可以看作和特征标度数对偶. 设 G 为有限群, 我们称集合 $cd(G)=\{\chi(1)|\chi\in Irr(G)\}$ 为 G 的复不可约特征标度数集合. 在有限群特征标理论研究中, 假定 G 的任意两个不同不可约特征标度数互素, 众所周知, $cd(G)\leq 3$ 如果 G 可解. 对于一般情形, 根据有限群特征标度数图的连通分支数定理, 我们有 $cd(G)\leq 4$.

弱化互素条件, M.lewis 率先研究了满足单素数假设的有限群, 这里单素数假设指对于不同度数 $\chi(1)$, $\psi(1)\in cd(G)$, 最大公因子 $gcd(\chi(1),\psi(1))$ 要么为1, 要么为某一素数. 在系列论文中, 他证明了满足单素数假设的有限群 G , 有 $|cd(G)|\leq 9$. 沿着这个方向, M.Lewis 在文献 [2]中引入了 $n-$ 素数假设这一概念, 具体来说, 称 G 满足 $n-$ 素数假设, 若对于不同度数 $\chi(1)$, $\psi(1)\in cd(G)$, $gcd(\chi(1),\psi(1))$ 的不一定不同的素因子总个数至多为 n . 在该文中, 作者提出下述猜想: 当 G 可解时, 存在定义在非负整数上的整数值函数 $f(n)$, 使得 $|cd(G)|\leq f(n)$. 这一猜想现被部分证明是对的, 并且当 $n=0,1$ 时, $f(0)=3$, $f(1)=9$, 对于 $n=2$, J.Hamblin 与 M.Lewis 证明了 $f(2)\leq 462515$, 详见 [3].

2010年, 刘燕俊, 宋学玲和张继平在文献 [4]中研究了满足素数方幂假设的非可解群, 这里素数方幂假设指, 对于不同度数 $\chi(1)$, $\psi(1)\in cd(G)$, 二者的最大公因子 $gcd(\chi(1),\psi(1))$ 为素数方幂. 2017年, 杜妮和 Mark L. Lewis 在文献 [5]中研究了满足素数方幂的可解群, 得到结论：如果 G 为满

足素数方幂的可解群, 则 G 的 Fitting 高至多为12. 如果 $|G|$ 为奇数且 G 满足素数方幂假设, 则 G 的 Fitting 高至多为6.

近期, Camina 父女研究了满足任意两个不同共轭类长的最大公因子均为素数方幂的非可解群, 得到了一些很好的性质，详见 [6]. 为此, 本文研究了满足任意两个不同共轭类长的最大公因子至多有两个（不一定不同）素因子的有限单群, 主要结论如下：

定理 1. 设 S 为非交换单群. 若 S 的任意两个不同的共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 素因子, 则 S 为 $A_1(4) \cong A_1(5) \cong A_5$.

2. 预备知识

本节先介绍论文所需要的一些简单结论.

引理1. 设 $G = SL(2,\ F)$, 其中 F 为有 $q = p^n$ 个元素的有限域, p 是奇素数. 令 v 为循环群 $F^* = F - \{0\}$ 的生成元, 则 G 中有元素

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix},$$

$|a| = q - 1$, 且 G 包含一个阶为 $q + 1$ 的元素 b . 对 $\forall x \in G$, (x) 为 G 中包含 x 的共轭类, G 有 $q + 4$ 个共轭类, 分别为:

$$(1),\ (z)\ ,\ (c)\ ,\ (d)\ ,\ (zc)\ ,\ (zd)\ ,\ (a)\ ,\ (a^2)\ ,\cdots,\ (a^{(q-3)/2})\ ,\ (b)\ ,\ (b^2)\ ,\cdots,\ b^{(q-1)/2}\ ,$$

其共轭类长详表 1

Table 1. Conjugate class lengths of $SL(2,\ F)$, p odd
表 1. $SL(2,\ F)$的共轭类长，p 奇数

x	1	z	c	d	zc	zd	a^l	b^m
$\|x\|$	1	1	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$q(q+1)$	$q(q-1)$

其中: $1 \le l \le (q-3)/2,\ 1 \le m \le (q-1)/2.$

证明: 详见([7], 定理38.1). □

引理2. 设 $G = SL(2,\ F)$, 其中 F 为有 $q = 2^n$ 个元素的有限域. 令 v 为循环群 $F^* = F - \{0\}$ 的生成元, 则 G 中有元素:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix},$$

且 G 中包含一个阶为 $q + 1$ 的元素 b . 对 $\forall x \in G$, (x) 为 G 中包含 x 的共轭类, G 有 $q + 1$ 个共轭类, 分别为:

$$(1)\ ,\ (c)\ ,\ (a)\ ,\ (a^2)\ ,\cdots,\ (a^{(q-2)/2})\ ,\ (b)\ ,\ (b^2)\ ,\cdots,\ (b^{q/2})\ ,$$

其共轭类长详见表 2,

Table 2. Conjugate class lengths of $SL(2,\ F)$, p even
表 2. $SL(2,\ F)$的共轭类长，p 偶数

x	1	c	a^l	b^m
$\|x\|$	1	(q^2-1)	$q(q+1)$	$q(q-1)$

其中：$1 \le l \le (q-2)/2$，$1 \le m \le q/2$．

证明: 详见([7], 定理38.2). □

引理3. 设 $G = SL_2(q)$，$G/Z = PSL_2(q)$，则

$$|G : C_G(x)| = |\overline{G} : C_{\overline{G}}(\overline{x})|,$$

即以 x 和 $\overline{x}$ 为代表元素的两个共轭类的长度相同.

证明: 直接验算即得. □

3. 有限单群共轭类长

根据单群分类定理，有限非交换单群为以下群之一：离散单群、交错群、李型单群以及Tits单群，详见 [8].

3.1. 交错群

定理1. 设 $S = A_n (n \ge 5)$，若群 S 的任意两个不同共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 素因子，则 $S = A_5$．

证明: 当 $n = 5$ 时，A_5 不同共轭类长分别为 $1, 12, 15, 20$．它们的最大公因子分别为：

$$(12,\ 15) = 3,\ (12,\ 20) = 2^2,\ (15,\ 20) = 5.$$

所以 A_5 的任意两个不同共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 素因子.

当 $n = 6$ 时，A_6 不同共轭类长分别为 $1, 40, 45, 72, 90$．它们的最大公因子分别为:

$$(40,\ 45) = 5,\ (40,\ 72) = 2^3, (40,\ 90) = 2 \cdot 5,$$

$$(45,\ 72) = 3^2, (45,\ 90) = 3^2 \cdot 5, (72,\ 90) = 2 \cdot 3^2.$$

其中, 以 $(12)(34)$ 为代表元素的共轭类长为45, 以 $(1234)(56)$ 为代表元素的共轭类长为90. 所以 A_6 有两个不同共轭类长，其最大公因子有3个 (可以相同) 素因子.

当 $n = 7$ 时，A_7 不同共轭类长分别为:

$$1, 70, 105, 210, 280, 360, 504, 630.$$

70和210最大公因子为 $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. 其中, 以 (123) 为代表元素的共轭类长为70, 以 (123)(45)(67) 为代表元素的共轭类长为210, 所以 A_7 有两个不同共轭类长的最大公因子有3个 (可以相同) 素因子.

当 $n = 8$ 时, A_8 中以 (123)(456) 为代表元素的共轭类长是1120, 以 (123456)(78) 为代表元素的共轭类长是3360,

$$(1120, 3360) = 1120,\ 1120 = 2^3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7,$$

A_8 有两个不同共轭类长，其最大公因子有3个以上 (可以相同) 素因子. 当 $n = 9$ 时, A_9 中以 (12345) 为代表元素的共轭类长是3024, 以 (12345)(67)(89) 为代表元素的共轭类长是9072,

$$(3024, 9072) = 3024, 3024 = 3^3 \cdot 4^2 \cdot 7,$$

所以 A_9 有两个不同共轭类长，其最大公因子有3个以上 (可以相同) 素因子.

类似于上一章对交错群的分析, 对于 A_n , 当 $n = 2k(k \geq 3)$ 时, 考虑共轭类代表元素:

$$(1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)(k,\ k+1,\ \cdots,\ 2k-2)及(1,\ 2,\ \cdots,\ 2k-2)(2k-1,\ 2k).$$

它们的共轭类长分别为

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (k-2) \cdot k \cdot (k+1) \cdots (2k-3) \cdot (2k-1) \cdot 2k$$

及

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots k \cdot (k+1) \cdots (2k-3) \cdot (2k-1) \cdot 2k,$$

可以看出后者是前者的 $(k-1)$ 倍, 它们的最大公因子为:

$$2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-3) \cdots k \cdot (k-2) \cdots 4 \cdot 3.$$

易知, 当 $k \geq 3$ 时, A_{2k} 有两个不同共轭类长，其最大公因子有2个以上 (可以相同) 素因子.

对于 A_n , 当 $n = 2k+1(k \geq 3)$ 时, 考虑共轭类代表元素

$$(1,\ 2,\ \cdots,\ 2k-3) \text{ 及 } (1,\ 2,\ \cdots,\ 2k-3)(2k-2,\ 2k-1)(2k,\ 2k+1)\ .$$

它们的共轭类长分别为

$$(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots 5$$

及

$$(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots 5 \cdot 3,$$

可以看出后者是前者的3倍, 它们的最大公因子为

$$(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots 5.$$

易知, 当 $k \geq 3$ 时, A_{2k+1} 有两个不同共轭类长，其最大公因子有3个以上 (可以相同) 素因子. 定理得证. $\square$

3.2. 离散单群

定理2. *设 S 为 $Tits$ 单群或者26个离散单群之一, 则 S 至少有两个不同共轭类长, 它们的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子.*

证明: 根据 GAP 程序 [9]即可得证, 详见表 3.

Table 3. Maximum common factor for different conjugate class lengths
表 3. 最大的共轭类长公因子

离散单群	共轭类长最大公因子	离散单群	共轭类长最大公因子
M_{11}	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	Fi_{24}'	$2^2 \cdot 3^7 \cdot 7^2 \cdot 23 \cdot 29$
M_{12}	$3^2 \cdot 11$	HS	$5^2 \cdot 11 \cdot 7$
M_{22}	$5 \cdot 7 \cdot 11$	McL	$5^2 \cdot 11$
M_{23}	$3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$	He	$3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 17$
M_{24}	$3^2 \cdot 11 \cdot 23$	Ru	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 29$
J_1	$7 \cdot 11 \cdot 19$	Suz	$3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$
J_2	$3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$O'N$	$7^2 \cdot 19 \cdot 11 \cdot 31$
J_3	$3^2 \cdot 17 \cdot 19$	HN	$3^4 \cdot 5^3 \cdot 19$
J_4	$11^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$	Ly	$5^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
Co_1	$3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	Th	$3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31$
Co_2	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23$	B	$3^4 \cdot 5^3 \cdot 31 \cdot 47$
Co_3	$3^3 \cdot 5^2 \cdot 23$	M	$3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 59 \cdot 71$
Fi_{22}	$3^3 \cdot 5 \cdot 13$	${}^2\mathrm{F}_4(2)'$	$3^2 \cdot 5 \cdot 13$
Fi_{23}	$2^8 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$		

3.3. 李型单群

本节研究李型单群, 部分引用符号参见 [7] 或 [10].

命题 1. *设 S 为例外单群, 则 S 至少有两个不同共轭类长, 它们的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子.*

证明: 每一个例外单群以 s_1, s_2 为代表元素的共轭类长有公因子 q^3 , 即得证. □

命题 2. *设 S 为 $A_n(q)$, 其中 q 为素数的方幂, $n \in Z^+$, ($q > 3$ 如果 $n = 1$) , 只有当 $S = A_1(4)$ 和 $A_1(5)$ 时, 其任意两个不同共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 的素因子.*

证明: 注意到以 s_1 为代表元素的共轭类长为:

$$\frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(n+1,\ q-1)} \prod_{i=1}^{n}(q^i - 1),$$

而以 s_2 为代表元素的共轭类长为:

$$\frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(n+1,\ q-1)} (q^{n+1} - 1) \prod_{i=1}^{n-2}(q^{i+1} - 1).$$

当 $n \geq 2$ 时, 这两个共轭类长必有公因子 q^3 , 所以 $A_n(q)(n \geq 2)$ 至少有两个不同共轭类长，其最大公因子有至少三个 (可以相同) 的素因子.

下设 $n=1$.

1. 当 q 为奇素数方幂即 $q \neq 2^f$ 时, 根据引理3与1可知, 只有当:
$$(q+1)(\frac{1}{2}(q-1),\, q)\;,\; 2q\;,\; (q-1)(\frac{1}{2}(q+1),\, q)$$
均最多有两个 (可相同) 素因子时, $A_1(q)$ 其任意两个不同共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 素因子. 若 $2q$ 最多有两个 (可相同) 素因子, q 只能为素数的一次幂, 此时只需考虑 $q-1,\ q+1$,
$$当\ q=3\ 时,\ q+1=4=2^2,\, q-1=2\ ,$$
所以 $A_1(3)$ 其任意两个不同共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 素因子. 但是 $A_1(3)$ 可解, 不必考虑.
$$当\ q=5\ 时,\ q+1=6=2\cdot 3,\, q-1=4=2^2\ ,$$
所以 $A_1(5)$ 其任意两个不同共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 素因子.
$$当\ q \geq 7\ 时,\ q+1,\ q-1\ 中至少有一个有至少三个\ (可相同)\ 的素因子,$$
所以 $A_1(q)(q \neq 2^f,\ p \geq 7)$ 不符合.
2. 当 $q=2^f$ 时, 根据引理2可知, $A_1(q)$ 不同共轭类长的最大公因子分别为 $q,\ q-1,\ q+1$, 首先考虑 q , 若 q 最多有两个素因子 (可以相同) , 则 $q=2$ 或 2^2 , $A_1(2)$ 可解, 不必考虑. 当 $q=2^2$ 时, $q-1=3,\ q+1=5$, 此时 $q,\ q-1,\ q+1$ 均最多有两个 (可以相同) 素因子, 所以 $A_1(4)$ 其任意两个不同共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 素因子.

综上所述, 只有当 $S=A_1(4) \cong A_1(5)$ 时, 其任意两个不同共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 素因子. 命题得证. □

命题 3. *设 S 为 ${}^2A_n(q^2)$, q 为素数的方幂, $n \in Z^+$, 其中 $n \geq 2($ 以及 $q>2$ 如果 $n=2)$, 则 S 至少有两个不同共轭类长, 它们的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子.*

证明: 当 $n \geq 3$ 为奇数时, 以 s_1 为代表元素的共轭类长为:
$$\frac{1}{(n+1,\ q+1)} q^{\frac{1}{2}n(n+1)} \prod_{i=1}^{n} (q^i - (-1)^i),$$
而以 s_2 为代表元素的共轭类长为:
$$\frac{(q^{n+1}-1)}{(n+1,\ q+1)} q^{\frac{1}{2}n(n+1)} \prod_{i=1}^{n-2} (q^{i+1} - (-1)^{i+1}).$$
这两个共轭类长有公因子 q^3 , 故此时 ${}^2A_n(q^2)$ 有两个不同共轭类长的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子.

当 $n \geq 2$ 为偶数时, 以 s_1 为代表元素的共轭类长度为:
$$\frac{1}{(n+1,\ q+1)} q^{\frac{1}{2}n(n+1)} \prod_{i=1}^{n} (q^i - (-1)^i),$$

而以 s_2 为代表元素的共轭类长度为:

$$\frac{(q^{n+1}+1)}{(n+1,\ q+1)}q^{\frac{1}{2}n(n+1)}\prod_{i=1}^{n-2}(q^{i+1}-(-1)^{i+1}).$$

这两个共轭类长有公因子 q^3 , 而同样此时 ${}^2A_n(q^2)$ 有两个不同共轭类长的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子. 命题得证. □

命题 4. *设 S 为 $B_n(q)$ 或 $C_n(q)$, $n \geq 2$(以及 $q > 2$ 如果 $n = 2$) , 其中 q 为素数的方幂, 则 S 至少有两个不同共轭类长, 它们的最大公因子至少有三个 (可以相同) 的素因子.*

证明: 当 $n \geq 3$ 为奇数时, 以 s_1 为代表元素的共轭类长为:

$$\frac{q^{n^2}}{(2,\ q-1)}\frac{1}{q^n+1}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1),$$

而以 s_2 为代表元素的共轭类长为:

$$\frac{q^{n^2}}{(2,\ q-1)}\frac{1}{q^n-1}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1).$$

这两个共轭类长有公因子 q^3 , 故此时 S 有两个不同共轭类长的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子.

当 $n \geq 2$ 为偶数时, 以 s_1 为代表元素的共轭类长度为

$$\frac{q^{n^2}}{(2,\ q-1)}\frac{1}{q^n+1}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1),$$

而以 s_2 为代表元素的共轭类长度为

$$\frac{q^{n^2}}{(2,\ q-1)}\frac{1}{(q+1)(q^{n-1}+1)}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1).$$

这两个共轭类长有公因子 q^3 , 而同样此时 S 有两个不同共轭类长的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子. 命题得证. □

命题 5. *设 S 为 $D_n(q)$, 其中 q 为素数的方幂, $n > 3$, $n \in Z^+$, 则 S 至少有两个不同共轭类长, 它们的最大公因子至少有三个 (可以相同) 的素因子.*

证明: 当 $n \geq 5$ 为奇数时, 以 s_1 为代表元素的共轭类长为

$$\frac{q^{n(n-1)}(q^n-1)}{(4,\ q^n-1)}\frac{1}{(q^{n-1}+1)(q+1)}\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1),$$

而以 s_2 为代表元素的共轭类长为

$$\frac{q^{n(n-1)}(q^n-1)}{(4,\ q^n-1)}\frac{1}{(q^n-1)}\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1).$$

这两个共轭类长有公因子 q^3，故此时 S 有两个不同共轭类长，其最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子.

当 $n \geq 4$ 为偶数时, 以 s_1 为代表元素的共轭类长度为

$$\frac{q^{n(n-1)}(q^n-1)}{(4,\ q^n-1)}\frac{1}{(q^{n-1}+1)(q+1)}\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1),$$

而以 s_2 为代表元素的共轭类长度为

$$\frac{q^{n(n-1)}(q^n-1)}{(4,\ q^n-1)}\frac{1}{(q^{n-1}-1)(q-1)}\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1).$$

这两个共轭类长有公因子 q^3，而同样此时 S 有两个不同共轭类长的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子. 命题得证. □

命题 6. *设 S 为 ${}^2D_n(q^2)$，其中 q 为素数的方幂，$n>3,\ n\in Z^+$，则 S 至少有两个不同共轭类长，它们的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子.*

证明:　以 s_1 为代表元素的共轭类长度为

$$\frac{1}{(4,\ q^n+1)}q^{n(n-1)}(q^n+1)\frac{1}{q^n+1}\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1),$$

而以 s_2 为代表元素的共轭类长为

$$\frac{1}{(4,\ q^n+1)}q^{n(n-1)}(q^n+1)\frac{1}{(q^{n-1}+1)(q-1)}\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1).$$

这两个共轭类长有公因子 q^3，故此时 S 有两个不同共轭类长的最大公因子有三个及以上 (可以相同) 的素因子. □

定理3. *若 S 为李型单群, 若 S 的不同共轭类长的最大公因子最多有两个 (可以相同) 素因子, 则为 $A_1(4)$ 或 $A_1(5)$.*

证明:　根据命题1-6即可得证. □

定理1的证明: 根据定理1-3即可得证. □

致 谢

本文得到江西省青年科学基金——重点项目20192ACB21008的资助, 特此感谢!

参考文献

[1] Khukhro, E.I. and Mazurov, V.D. (2021) Unsolved Problems in Group Theory: The Kourovka Notebook. arXiv:1401.0300 [math.GR]

[2] Lewis, M. (2005) The Number of Irreducible Character Degrees of Solvable Groups Satisfying the One-Prime Hypothesis. *Algebras and Representation Theory*, **8**, 479-497. https://doi.org/10.1007/s10468-005-3596-1

[3] Hamblin, J. and Lewis, M. (2012) Solvable Groups Satisfying the Two-Prime Hypothesis, II. *Algebras and Representation Theory*, **15**, 1099-1130. https://doi.org/10.1007/s10468-011-9281-7

[4] Liu, Y., Song, X. and Zhang, J. (2015) Nonsolvable Groups Satisfying the Prime-Power Hypothesis. *Journal of Algebra*, **442**, 455-483. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.02.010

[5] Du, N. and Lewis, M.L. (2017) The Prime-Power Hypothesis and Solvable Groups. *Archiv der Mathematik (Basel)*, **109**, 301-303. https://doi.org/10.1007/s00013-017-1085-5

[6] Camina, A.R. and Camina, R.D. (2017) One-Prime Power Hypothesis for Conjugacy Class Sizes. *International Journal of Group Theory*, **6**, 13-19.

[7] Dornhoff, L. (1971) Group Representation Theory, Part A: Ordinary Representation Theory. Marcel Dekker, New York.

[8] Gorenstein, D. (1982) Finite Simple Groups. An Introduction to Their Classification. University Series in Mathematics. Plenum Publishing Corp., New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-8497-7_1

[9] The GAP Group (2015) GAP-Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.9. http://www.gap-system.org

[10] 徐明曜. 有限群初步[M]. 北京: 科学出版社, 2013.