Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 36-40
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121005

Hans汉斯

低阶特殊线性李超代数的型心与拟型心

高晨阳，陆炳权，郑克礼*
东北林业大学数学系，黑龙江 哈尔滨

收稿日期：2021年12月2日；录用日期：2022年1月6日；发布日期：2022年1月13日

摘 要

本文主要研究了复数域上不超过三阶的特殊线性李超代数的型心与拟型心。应用解方程组的方法，分别在奇变换和偶变换两种情况下完全确定这些李超代数型心与拟型心的矩阵表示。

关键词

李超代数，型心，拟型心，矩阵表示

Centroids and Quasicentroids of Low Order Special Linear Lie Superalgebras

Chenyang Gao, Bingquan Lu, Keli Zheng*
Department of Mathematics, Northeast Forestry University, Harbin Heilongjiang

Received: Dec. 2nd, 2021; accepted: Jan. 6th, 2022; published: Jan. 13th, 2022

Abstract

In this paper, we study the centroids and quasicentroids of special linear lie superalgebras of no more than third order over the complex number field. By the methods of solving equations, matrix representations of centroids and quasicentroids for these lie superalgebras are determined in the case of odd and even transformations respectively.

Keywords

Lie Superalgebra, Centroid, Quasicentroid, Matrix Representation

*通讯作者。

文章引用: 高晨阳，陆炳权，郑克礼. 低阶特殊线性李超代数的型心与拟型心[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 36-40.
DOI: 10.12677/pm.2022.121005

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

作为超流形的数学模型，李超代数在理论物理和其它数学领域都有着重要的意义[1] [2] [3] [4]。型心和拟型心作为重要的李超代数上的映射，其在双导子的研究中起到关键的作用[5]。文献[6]证明了李超代数的拟型心保持诣零根不变。在文献[7]中具体研究了一般线性李超代数一类子代数的型心与拟型心。在文献[8]中作者给出并研究了一类 Jordan-李代数的型心。文献[9]证明了复单李超代数的型心是常数阵或其平方是常数阵，且型心与拟型心相同，但未研究具体给定单李超代数的型心与拟型心。本文将主要研究不超过 3 阶(即)复特殊线性李超代数的型心与拟型心的矩阵表示。由李超代数的 Schur 引理[2] [10]可知，$sl(m,0)$，$sl(0,n)$ 的型心和拟型心矩阵均为常数阵，因此本文只需研究 m 和 n 非零的情况。

本文结构如下：第一部分是预备知识，介绍了本文用到的一些基本概念及符号。第二部分得到了 $sl(1,1)$ 的型心与拟型心的矩阵表示。第三部分得到了 $sl(1,2)$ 的型心与拟型心的矩阵表示。第四部分类比 $sl(1,2)$ 的求解方法推导出 $sl(2,1)$ 的型心与拟型心。

2. 基础知识

定义 2.1 设 $Z_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$ 为模 2 剩余类环，则复数域上的 Z_2-阶化线性空间 $L=L_{\overline{0}}\oplus L_{\overline{1}}$ 称为**李超代数**，若对其上定义的双线性二元运算[,]满足：

1) 超反对称性：$[x,y]=-(-1)^{d(x)d(y)}[y,x]$

2) 超莱布尼茨公式：$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+(-1)^{d(x)d(y)}[y,[x,z]]$，

其中 x,y,z 是李超代数中的 Z_2-齐次元素，$d(x),d(y)$ 分解为 x,y 的 Z_2-阶化次数。

注：超莱布尼茨公式移项整理后就是超雅各比恒等式，李超代数也称为 Z_2-阶化李代数。

由特殊线性李超代数 $sl(m,n)$ 的定义[2] [3]可验证 $e_{12},e_{21},(e_{11}+e_{22})$ 是 $sl(1,1)$ 的一组基，

$e_{12},e_{13},e_{21},e_{23},e_{31},e_{32},(e_{11}+e_{22}),(e_{22}-e_{33})$ 是 $sl(1,2)$ 的一组基，

$e_{12},e_{13},e_{21},e_{23},e_{31},e_{32},(e_{11}-e_{22}),(e_{22}+e_{33})$ 是 $sl(2,1)$ 的一组基，

其中 e_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素为 1，其余位置为 0 的方阵。为简便本文称这三组基为对应代数的标准基。

定义 2.2 设 L 是复李超代数，则称

$$\Gamma_\theta(L)=\left\{f\in End_\theta(L)\mid f[x,y]=[f(x),y]=(-1)^{d(x)d(f)}[x,f(y)],x,y\in L,\theta\in Z_2\right\}$$

为 L 上的 Z_2-阶化**型心**；称

$$Q\Gamma_\theta(L)=\left\{f\in End_\theta(L)\mid[f(x),y]=(-1)^{d(x)d(f)}[x,f(y)],x,y\in L,\theta\in Z_2\right\}$$

为 L 上的 Z_2-阶化**拟型心**，其中 $End_\theta(L)$ 表示所有 L 中 Z_2-阶化线性变换的集合。

注：对任意 $f\in End_\theta(L)$，若 $\theta=\overline{0}$，则称 f 为偶变换，即 $d(f)=\overline{0}$；若 $\theta=\overline{1}$，则称 f 为奇变换，即 $d(f)=\overline{1}$。

命题 2.3 设 f 是李超代数上的线性变换，则 f 在一组基上的矩阵表示式为：

$$f\left(e_{11},e_{12},\cdots,e_{nn}\right)=\left(e_{11},e_{12},\cdots,e_{nn}\right)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{n^2,1} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{n^2,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n^2,1} & k_{n^2,2} & \cdots & k_{n^2,n^2} \end{pmatrix}$$

注：当 f 表示型心时，由元素 k_{ij} 组成的矩阵即是型心矩阵表示法；当 f 表示拟型心时，由元素 k_{ij} 组成的矩阵即是拟型心矩阵表示法。

3. $sl(1,1)$型心与拟型心的矩阵表示

引理 2.1 设 f 是 $sl(1,1)$ 线性变换，则 f 在 $sl(1,1)$ 的标准基上的线性变换为：

$$f\left(e_{12}\right)=k_{11}e_{12}+k_{21}e_{21}+k_{31}\left(e_{11}+e_{22}\right)$$

$$f\left(e_{21}\right)=k_{12}e_{12}+k_{22}e_{21}+k_{32}\left(e_{11}+e_{22}\right)$$

$$f\left(e_{11}+e_{22}\right)=k_{13}e_{12}+k_{23}e_{21}+k_{33}\left(e_{11}+e_{22}\right)$$

定理 3.2 若 $sl(1,1)$ 的拟型心偶变换，则其在标准基上的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ b & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

其中 a,b,c,λ 为任意的复数。

证明：设偶变换为 f 是 $sl(1,1)$ 的拟型心，根据拟型心的定义分别用 e_{12}， e_{21}， $\left(e_{11}+e_{22}\right)$ 代替定义中的 x,y 进行运算。当 $x=e_{12},y=e_{21}$ 时， $f\left(e_{12}\right)$ 与 e_{21} 的情况为：

$$\left[f\left(e_{12}\right),e_{21}\right]=f\left(e_{12}\right)e_{21}-(-1)^{d\left(f\left(e_{12}\right)\right)d\left(e_{21}\right)}e_{21}f\left(e_{12}\right)=f\left(e_{12}\right)e_{21}+e_{21}f\left(e_{12}\right)=k_{11}e_{11}+2k_{31}e_{21}+k_{11}e_{22}$$

$$\left[e_{12},f\left(e_{21}\right)\right]=e_{12}f\left(e_{21}\right)-(-1)^{d\left(e_{12}\right)d\left(f\left(e_{21}\right)\right)}f\left(e_{21}\right)e_{12}=e_{12}f\left(e_{21}\right)+f\left(e_{21}\right)e_{12}=k_{22}e_{11}+2k_{32}e_{12}+k_{22}e_{22}$$

又因为$\left[f\left(e_{12}\right),e_{21}\right]=\left[e_{12},f\left(e_{21}\right)\right]$，所以通过比较系数可得： $k_{11}=k_{22},k_{31}=0,k_{32}=0$ 。

其他情况同理可得 $k_{13}=0,k_{23}=0$ 。

类似的，可得 f 是奇变换即 $d\left(f\right)=\overline{1}$ 的情况。

定理 3.3 若 $sl(1,1)$ 的拟型心是奇变换，则其在标准基上的阵为：

$$\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ b & -\lambda & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$$

其中 a,b,c,d,λ 为任意的复数。

定理 3.4 若 $sl(1,1)$ 的型心是偶变换，则其在标准基上的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} c & d & 0 \\ f & c & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

其中 c,d,f,h 为任意的复数。

证明：设 $sl(1,1)$ 的型心 f 是偶变换，根据定义当 $x=e_{12},y=e_{21}$ 时，有：

$$f[e_{12},e_{21}]=f(e_{11}+e_{22})=[f(e_{12}),e_{21}]=k_{11}e_{11}+k_{11}e_{22}+2k_{31}e_{21}=c(e_{11}+e_{22})$$

所以 $k_{11}=c, k_{31}=0$，其他情况同理可得 $k_{22}=c, k_{32}=0$。

同理，根据 f 为奇变换定义运算可得型心矩阵。

定理 3.5 若 $sl(1,1)$ 的型心是奇变换，则其在标准基上的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

其中 a,d 为任意的复数。

4. $sl(1,2)$ 型心与拟型心的矩阵表示

令 f 是 $sl(1,2)$ 上的一个线性变换，基为 $e_{12},e_{13},e_{21},e_{23},e_{31},e_{32},(e_{11}+e_{22}),(e_{22}-e_{33})$，则可设 f 在 $sl(1,2)$ 的标准基上的线性表示系数为：

$$\begin{aligned}
f(e_{12})&=k_{11}e_{12}+k_{21}e_{13}+k_{31}e_{21}+k_{41}e_{23}+k_{51}e_{31}+k_{61}e_{32}+k_{71}(e_{11}+e_{22})+k_{81}(e_{22}-e_{33})\\
f(e_{13})&=k_{12}e_{12}+k_{22}e_{13}+k_{32}e_{21}+k_{42}e_{23}+k_{52}e_{31}+k_{62}e_{32}+k_{72}(e_{11}+e_{22})+k_{82}(e_{22}-e_{33})\\
&\vdots\\
f(e_{11}+e_{22})&=k_{17}e_{12}+k_{27}e_{13}+k_{37}e_{21}+k_{47}e_{23}+k_{57}e_{31}+k_{67}e_{32}+k_{77}(e_{11}+e_{22})+k_{87}(e_{22}-e_{33})\\
f(e_{22}-e_{33})&=k_{18}e_{12}+k_{28}e_{13}+k_{38}e_{21}+k_{48}e_{23}+k_{58}e_{31}+k_{68}e_{32}+k_{78}(e_{11}+e_{22})+k_{88}(e_{22}-e_{33})
\end{aligned}$$

定理 4.2 设 $sl(1,2)$ 的拟型心是偶变换，则其在标准基上的矩阵为 λI_8。

证明：根据型心与拟型心的定义分别用标准基中的 $(e_{12},e_{13},\cdots,(e_{22}-e_{33}))$ 代替定义中的 x,y 进行运算。当 $x=e_{12},y=e_{13}$ 时，$f(e_{12})$ 与 e_{13} 的情况为：

$$\begin{aligned}
[f(e_{12}),e_{13}]&=f(e_{12})e_{13}-(-1)^{d(f(e_{12}))d(e_{13})}e_{13}f(e_{12})=f(e_{12})e_{13}+e_{13}f(e_{12})\\
&=k_{51}e_{11}+k_{61}e_{12}+(k_{71}-k_{81})e_{13}+k_{31}e_{23}+k_{51}e_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[e_{12},f(e_{13})]&=e_{12}f(e_{13})-(-1)^{d(e_{12})d(f(e_{13}))}f(e_{13})e_{12}=e_{12}f(e_{13})+f(e_{13})e_{12}\\
&=k_{32}e_{11}+(2k_{72}+k_{82})e_{12}+k_{42}e_{13}+k_{32}e_{22}+k_{52}e_{32}
\end{aligned}$$

因为 $[f(e_{12}),e_{13}]=(-1)^{d(f)d(e_{12})}[e_{12},f(e_{13})]=[e_{12},f(e_{13})]$。

因此有 $k_{51}-k_{32}=0, k_{61}=2k_{72}+k_{82}, k_{42}=k_{71}-k_{81}, k_{31}=0, k_{32}=0, k_{52}=0, k_{51}=0$。

其他情况同理可得：$k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}=k_{66}=k_{77}=k_{88}$ 其它 $k_{ij}=0$。

定理 4.3 若 $sl(1,2)$ 的拟型心是奇变换，则其在标准基上的矩阵为：

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{6\times6} & 0_{6\times2} \\ \hline 0_{2\times6} & Q_{2\times2} \end{array}\right)$$

其中，$M_{6\times6}=\begin{pmatrix} \lambda I_{2\times2} & 0_{2\times4} \\ 0_{4\times2} & -\lambda I_{4\times4} \end{pmatrix}$，$Q_{2\times2}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\lambda & \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{2}{3}\lambda & -\frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为任意的复数。

定理 4.4 $sl(1,2)$ 的型心在其标准基上的矩阵为 λI_8。

证明：一方面，若 $sl(1,2)$ 型心 f 是偶变换，则由 f 在基上的线性表示和任意两个基的方括号运算可

以求得型心矩阵表示的各元素 k_{ij}。根据型心的定义，当 $x=e_{12}, y=e_{21}$ 时：

$$f\left[e_{12},e_{21}\right]=f\left(e_{11}+e_{22}\right)=\left[f\left(e_{12}\right),e_{21}\right]=k_{11}\left(e_{11}+e_{22}\right)+k_{61}e_{31}+k_{21}e_{23}+\left(2k_{71}+k_{81}\right)e_{21}$$

比较系数可得：$k_{11}=\lambda, k_{61}=0, k_{21}=0, 2k_{71}+k_{81}=0$。

其他情况同理可得：$k_{11}=k_{22}=k_{33}=k_{44}=k_{55}=k_{66}=k_{77}=k_{88}=\lambda$，

其它 $k_{ij}=0$。

另一方面，若 $sl(1,2)$ 型心 f 是奇变换，则 $sl(1,2)$ 的型心在其标准基上的矩阵为零矩阵。

5. $sl(2,1)$ 型心与拟型心的矩阵表示

由于 $sl(1,2)$ 与 $sl(2,1)$ 同构，则可得 $sl(2,1)$ 的型心与拟型心矩阵如下：

定理 5.1 若 $sl(2,1)$ 的型心与拟型心是偶变换，则其在标准基上的矩阵都为 λI_8。

定理 5.2 若 $sl(2,1)$ 的型心与拟型心是奇变换，则其型心在标准基上的矩阵为零矩阵，拟型心在标准基上的矩阵为：

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{6\times6} & 0_{6\times2} \\ \hline 0_{2\times6} & Q_{2\times2} \end{array}\right)$$

其中，$M_{6\times6}=\begin{pmatrix} \lambda I_{4\times4} & 0_{4\times2} \\ 0_{2\times4} & -\lambda I_{2\times2} \end{pmatrix}$，$Q_{2\times2}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\lambda & -\frac{2}{3}\lambda \\ -\frac{2}{3}\lambda & \frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为任意的复数。

致　谢

衷心感谢审稿人提出的细致建议。

基金项目

东北林业大学大学生创新训练项目(202110225250)；中央高校基本科研业务费专项资金资助(2572021BC02)。

参考文献

[1] 孙洪洲，韩其智. 李超代数综述[J]. 物理学进展, 1983, 3(1): 81-125.

[2] Scheunert, M. (1979) The Theory of Lie Superalgebras: An Introduction. Springer-Verlag, Berlin, 46-47. https://doi.org/10.1007/BFb0070929

[3] Kac, V. (1977) Lie Superalgebras. *Advances in Mathematics*, **26**, 8-96. https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90017-2

[4] 张润萱，张永正. 低维李超代数的确定[J]. 东北师范大学报(自然科学版), 2008, 40(1): 1-5.

[5] Yuan, J., Chen, L. and Cao, Y. (2021) Super-Biderivations of Cartan Type Lie Superalgebras. *Communications in Algebra*, **49**, 4416-4426. https://doi.org/10.1080/00927872.2021.1921185

[6] 李明珠，孙玉莉. 李超代数拟型心[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(24): 226-232.

[7] 张洪娟，李明明，郑克礼. 李超代数 gl(1,2)型心与拟型心的矩阵表示[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报，2017, 33(1): 1-3.

[8] 周佳，曹燕. Jordan-李代数的型心[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2019, 36(3): 262-265.

[9] Zheng, K. and Zhang, Y. (2013) On (*α*, *β*, *γ*)-Derivations of Lie Superalgebras. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, **10**, 1-18. https://doi.org/10.1142/S0219887813500503

[10] 孙丽萍，马金江. 关于李超代数的 Schur 引理[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2001, 18(1): 22-23.