Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(2), 276-279
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.122032

拉格朗日中值定理的结构分析及其应用

王耀革，郭从洲，刘　倩

信息工程大学基础部，河南　郑州

收稿日期：2022年1月6日；录用日期：2022年2月4日；发布日期：2022年2月11日

摘　要

拉格朗日中值定理是函数微分理论的核心内容，是研究函数高级分析性质的主要工具。通过对拉格朗日中值定理结构的分析，得出拉格朗日中值定理可以作用对象的结构特征，不仅解决了“如何用”拉格朗日中值定理的问题，更解决了“为什么能用”的问题，有利于帮助学生理解和掌握拉格朗日中值定理和题目之间的联系与应用。

关键词

拉格朗日中值定理，结构分析，如何用，为什么能用，应用

Structure Analysis and Application of Lagrange Mean Value Theorem

Yaoge Wang, Congzhou Guo, Qian Liu

Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Jan. 6th, 2022; accepted: Feb. 4th, 2022; published: Feb. 11th, 2022

Abstract

Lagrange mean value theorem is the core content of function differential theory and the main tool to study the advanced analytical properties of function. Through the analysis of the structure of the Lagrange mean value theorem, it is concluded that the Lagrange mean value theorem can act on the structural characteristics of the object, which not only solves the problem of “how to use” the Lagrange mean value theorem, but also solves the problem of “why it can be used”, which is helpful to help students understand and master the relationship and application between the Lagrange mean value theorem and the problem.

文章引用: 王耀革, 郭从洲, 刘倩. 拉格朗日中值定理的结构分析及其应用[J]. 理论数学, 2022, 12(2): 276-279.
DOI: 10.12677/pm.2022.122032

Keywords

Lagrange Mean Value Theorem, Structural Analysis, How to Use, Why, Application

1. 引言

拉格朗日中值定理是高等数学一系列的“微分中值定理”中最重要的一个，它在理论上起着“承上启下”的作用，“上承”罗尔定理，“下启”泰勒公式，是微分学应用的桥梁，在理论和实际中具有极高的研究价值。目前，对拉格朗日中值定理的研究一般都是对定理的证明方法和具体的应用进行研究[1] [2] [3]，我们通过对拉格朗日中值定理的结构进行分析，首次利用其结构特征解决“为什么能用”和“如何用”拉格朗日中值定理的问题，尤其是如何用拉格朗日中值定理构造辅助函数和解决中值问题的证明的具体思想方法。

2. 拉格朗日中值定理的结构分析

定理 1 [4] (拉格朗日中值定理)若函数 $f(x)$ 满足条件：1) 在 $[a,b]$ 上连续；2) 在 (a,b) 内可导，则存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$。

拉格朗日中值定理的结构分析：1) 从结论看，定理给出了中值点 ξ 处的导数信息，由于等式的左端为一个确定的数，因此，结论本质上给出了导函数的零点或对应的方程根的存在性，因此，从这个意义上讲，它和连续函数的介值定理、导函数的罗尔定理属于同一类结论，可以用于研究解决函数的零点或方程的根的问题[5]；这同时也决定了该定理的证明方法，应采用与导函数零点有关的罗尔定理来证明。

2) 从结论的结构看，结构相对复杂，涉及到中值点、区间的两个端点，其明显特点为两个分离的结构特征：等式两端的中值点与端点分离的结构，即等式右端只涉及中值点，左端只涉及区间端点；以及左端两个端点的分离结构[5]。由此，决定了研究对象的一个特征：含中值点、区间的两个端点，遇到此类型的题目时，首先考虑使用拉格朗日中值定理；同时该结论形式也决定了解题的思路方法：分离中值与端点，并且两端点也要分离开。

3) 从结论的左端结构看，左端分式的分子和分母都是差值结构，分子为函数在端点处的函数值差，分母为自变量在端点处的差，分式为二者差值的比；由于差值结构也是增量结构，因此，分式也可以视为函数和自变量在区间上的增量比；进一步的，结论还可以改变一下形式，表示为 $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$ 或 $f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x\ (0<\theta<1)$，由此可见，拉格朗日中值定理给出了函数的导数和函数值的差(或函数增量)的联系，所以，函数差值结构可以视为拉格朗日中值定理作用对象的又一特征，因此，遇到研究恒等式(函数差值恒为零)、单调性、不等式或与函数差值有关的命题等，都可以考虑利用该定理进行研究。

3. 拉格朗日中值定理的应用

由拉格朗日中值定理的结构分析可以看出，拉格朗日中值定理可用于研究方程根的存在性问题、恒等式、不等式、尤其是与函数差值有关的命题等的解决。下面我们仅从与函数差值有关的证明题的解题思想和解题方法进行举例，说明拉格朗日中值定理“如何用”的问题。

3.1. 单中值问题

证明的方法一般是将含端的的部分与含 ξ 的部分进行分离，并将两个端点进行分离，再应用拉格朗日中值定理。

例 1 证明：对任意 $0<a<b$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)。$$

结构分析：题型为中值问题的证明，且待证结论含有中值点、区间的两个端点，是典型的拉格朗日中值定理作用对象的特征；思路方法：使用拉格朗日中值定理，具体的，根据两个分离的结构特征，需要将要证结论的端点进行分离，将结论转化为 $\frac{ae^b-be^a}{a-b}=(1-\xi)e^{\xi}$，注意到左端的两个端点还没有彻底分离，再次分离端点，结论再转化为

$$\frac{\frac{1}{b}e^b-\frac{1}{a}e^a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=(1-\xi)e^{\xi},$$

至此，左端形式已经与拉格朗日中值定理结论的左端形式完全一致，由此确定研究对象为函数 $xe^{\frac{1}{x}}$，研究区间为 $\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$，应用拉格朗日中值定理即可求解。

证明 记 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$ 上连续，在 $\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$ 内可导，由拉格朗日中值定理得，存在 $\eta\in\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$，使 $\frac{f\left(\frac{1}{b}\right)-f\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=f'(\eta)$，即 $\frac{\frac{1}{b}e^b-\frac{1}{a}e^a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=e^{\frac{1}{\eta}}+\eta e^{\frac{1}{\eta}}\left(-\frac{1}{\eta^2}\right)=\left(1-\frac{1}{\eta}\right)e^{\frac{1}{\eta}}$，令 $\xi=\frac{1}{\eta}$，则 $\xi\in(a,b)$，

于是 $\frac{\frac{1}{b}e^b-\frac{1}{a}e^a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=(1-\xi)e^{\xi}$。

既得所证明的结论。

注本题也可以对函数 $F(x)=\frac{1}{x}e^x, f(x)=\frac{1}{x}$，在区间 $[a,b]$ 上利用柯西中值定理证明。

3.2. 双中值问题

情形一：没有明确要求两个中值点不相等时，证明的方法一般是在同一区间上用两次中值定理。

例 2 [6]设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$。

结构分析：题型为与导数有关的双中值问题；思路方法：使用中值定理，首先分离两个中值，将结论转化为 $e^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=e^{\xi}$，即只需证 $\left[e^x f(x)\right]'_{x=\eta}=\left(e^x\right)'_{x=\xi}$，分别对函数 $e^x f(x)$ 和 e^x 在上 $[a,b]$ 应用拉格朗日中值定理即可。

证明 令 $G(x)=e^x$，$F(x)=e^x f(x)$，则 $G(x)$ 和 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，分别对 $G(x)$ 和 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理知，存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=\left(e^x\right)'_{x=\xi}=e^{\xi},\quad \frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=\left[e^x f(x)\right]'_{x=\eta}=e^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right],$$

又由于 $f(a)=f(b)=1$，故 $\dfrac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$，因此，$e^{\xi}=e^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]$，也即 $e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$。

情形二：明确要求两个中值点不相等时，证明的方法一般需要先找出一个特殊点，该点将区间分成两个不相交的子区间，在两个子区间上分别使用拉格朗日中值定理。

例 3 (第十二届预赛试题二)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，试证：

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $\left[1+f'(\xi)\right]\left[1+f'(\eta)\right]=4$。

结构分析：题(1)为方程根的存在性问题；类比已知：零点定理或 Rolle 定理；从已知条件来看，存在不相等的两端点的函数值，确定思路为零点定理；需要进一步确定研究对象，将 $f(x_0)=2-3x_0$ 转化为一端为零的标准形式，不为零的一端即为研究对象。

题(2)为与导数有关的双中值问题；将(1)中所得点 x_0 作为特殊点，该点将区间 $[0,1]$ 分成两个不相交的子区间 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$，在这两个子区间上分别使用拉格朗日中值定理。

证明 (1) 令 $F(x)=f(x)-2+3x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$F(0)=-2<0,\quad F(1)=2>0,$$

于是由零点定理知，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=2-3x_0$.

(2) 在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 上对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，则存在 $\xi\in(0,x_0)$，$\eta\in(x_0,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{2}{x_0}-3,\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{-1+3x_0}{1-x_0},$$

于是

$$\left[1+f'(\xi)\right]\left[1+f'(\eta)\right]=\left(1+\frac{2}{x_0}-3\right)\left(1+\frac{-1+3x_0}{1-x_0}\right)=4.$$

4. 结语

拉格朗日中值定理是微分理论的核心结论，是研究函数分析性质的主要工具，我们首次从结构的角度对拉格朗日中值定理进行分析，明确了定理能够作用的对象，启发了我们解决对应中值问题时，可利用结构特征分析、设计和研究解决中值问题的具体解题方法，有利于熟练掌握拉格朗日中值定理的应用。

基金项目

信息工程大学教育教学研究课题(JXYJ2021C001)。

参考文献

[1] 李庆娟. 拉格朗日中值定理及其应用探析[J]. 山西大同大学学报(自然科学版), 2019(2): 34-37.

[2] 高霞. 拉格朗日中值定理及其应用[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2012(4): 9-10.

[3] 董斌斌. 拉格朗日中值定理及其应用[J]. 科教导刊, 2020(20): 41.

[4] 同济大学数学系. 高等数学(第七版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[5] 崔国忠. 数学分析(一) [M]. 北京: 科学出版社, 2018: 205-206.

[6] 郑华盛. 高等数学一题多解 300 例[M]. 北京: 科学出版社, 2019: 153-154.